В. И. СМИРНОВ

# КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ II

Акад. В. И. СМИРНОВ

# КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ШЕСТНАДЦАТОЕ

*Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебника
для механико-математических
и физико-математических факультетов
государственных университетов
и для втузов с расширенной программой*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

11-5-2

*Смирнов Владимир Иванович.* Курс высшей математики, том II

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *К. М. Волчок* Корректор *А. И. Исакова*

Печать с матриц. Подписано к печати 12/VI 1958 г. Бумага 60×92/16. Физ. печ. л. 39,25.
Усл. печ. л. 39,25. Уч.-изд. л. 42,6. Тираж 25 000 экз. Заказ 3251. Цена 14 р. 30 к.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71. Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Глава IV

## ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Глава V

## ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



Глава VI

## РЯДЫ ФУРЬЕ

Глава VII

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание второго тома значительно отличается от предыдущего. Вся первая глава предыдущего издания, содержащая теорию комплексных чисел, основы высшей алгебры и интегрирование функций, перешла в первый том. Наоборот, из первого тома перенесен во второй том весь материал, относящийся к основам векторной алгебры. Этот материал объединен с векторным анализом и вошел в состав главы IV.

Изложение остальных глав подверглось существенным изменениям. Особенно это относится к главам III, VI и VII. В главе III, между прочим, добавлен специальный параграф, посвященный изложению теории измерения и строгой теории кратных интегралов. В главе VI произведено некоторое перераспределение материала и добавлено доказательство уравнения замкнутости на основе теоремы Вейерштрасса о приближении к непрерывной функции полиномами. В главе VII добавлены вопросы распространения сферических и цилиндрических волн и формула Кирхгофа для решения волнового уравнения. Изложение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ведется сначала без применения символического метода.

Первые параграфы каждой главы сохранили прежний характер изложения. Примеры и дополнительный теоретический материал выделены в мелкий шрифт. Изложение ведется так, что основной материал, напечатанный крупным шрифтом, может изучаться самостоятельно.

Профессор Г. М. Фихтенгольц прочел всю рукопись настоящего издания и сделал мне ряд ценных указаний в отношении изложения, за что я выражаю ему мою глубокую благодарность.

13 июня 1937 г. *В. Смирнов.*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТЫРНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

Общий план настоящего издания второго тома тот же, что и в предыдущем издании. Но во многих местах книги внесены небольшие изменения, цель которых — уточнить изложение и сделать его более отчетливым.

Наибольшим изменениям подвергся девятый параграф (глава III) „Дополнительные сведения по теории кратных интегралов".

В седьмой главе, посвященной простейшим задачам математической физики, уточнены формулировки условий при решении ряда основных задач.

В отдельных местах этой главы добавлены указания на те вопросы, которые будут более подробно изложены в четвертом томе.

4 октября 1955 г. *В. Смирнов.*

ГЛАВА I

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1. Общие понятия.** Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит еще и производные неизвестных функций или их дифференциалы [**I, 51**]. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от *одной независимой переменной*, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным* уравнением. Если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют *дифференциальным уравнением с частными производными*. В настоящей главе мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, и бо̀льшая часть главы будет посвящена тому случаю, когда задано одно уравнение, содержащее одну неизвестную функцию.

Пусть $x$ — независимая переменная и $y$ — искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок $n$ производных неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*. В настоящем параграфе мы будем рассматривать одно обыкновенное дифференциальное уравнение *первого порядка*. Общий вид такого уравнения будет:

$$\Phi(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

или, в решенной относительно $y'$ форме:

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

Если *некоторая функция*

$$y = \varphi(x) \qquad (3)$$

*удовлетворяет дифференциальному уравнению*, т. е. если это уравнение обращается в тождество при замене $y$ и $y'$ на $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, *то функция $\varphi(x)$ называется решением этого дифференциального уравнения.*

Самая задача нахождения решений дифференциального уравнения называется иначе задачей интегрирования дифференциального уравнения.

Если рассматривать $x$ и $y$ как координаты точек на плоскости, то дифференциальное уравнение (1) [или (2)] выражает зависимость между координатами точек некоторой кривой и угловым коэффициентом касательной к этой кривой в соответствующих точках. Решению (3) дифференциального уравнения соответствует кривая, вдоль которой координаты точек и угловой коэффициент касательной удовлетворяют дифференциальному уравнению. Кривая эта называется *интегральной кривой данного дифференциального уравнения.*

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (2) не содержит $y$, получается дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x).$$

Нахождение решений этого уравнения есть основная задача интегрального исчисления [I, 86], и вся совокупность этих решений дается формулой

$$y = \int f(x)\,dx + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная. Таким образом в этом простейшем случае мы получаем решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Как мы увидим, и в общем случае дифференциального уравнения первого порядка мы будем иметь решение, содержащее произвольную постоянную; такое решение называется *общим интегралом уравнения.* Придавая этой произвольной постоянной различные численные значения, будем получать различные решения уравнения — так называемые *частные решения уравнения.*

В следующих разделах мы укажем некоторые частные типы уравнений первого порядка, интегрирование которых приводится к вычислению неопределенных интегралов, или, как говорят, *интегрирование их приводится к квадратурам* [1]).

**2. Уравнения с отделяющимися переменными.** Заменяя в дифференциальном уравнении (2) $y'$ частным $\frac{dy}{dx}$, умножая обе части на $dx$ и перенося все члены в левую часть, можно привести его к виду:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \qquad (4)$$

[1]) Вычисление интеграла непосредственно связано с вычислением площади, откуда и происходит термин „квадратура“.

что в некоторых случаях бывает более удобным. При этом обе переменные $x$ и $y$ играют в уравнении одинаковую роль, так как уравнение (4) не связывает нас выбором неизвестной функции. За таковую мы можем принять как $y$, так и $x$.

Положим, что каждая из функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ представляет собою произведение двух множителей, из которых один зависит только от $x$, а другой только от $y$:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0. \qquad (5)$$

Деля обе части уравнения на $M_2(y)\,N_1(x)$, приведем его к виду:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0, \qquad (6)$$

так что коэффициент при $dx$ будет зависеть только от $x$, а коэффициент при $dy$ только от $y$. Уравнение (5) называется уравнением с отделяющимися переменными [**I, 93**], самый же способ приведения его к виду (6) называется отделением переменных.

Левая часть уравнения (6) есть дифференциал следующего выражения:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy,$$

и равенство нулю дифференциала этого выражения равносильно тому, что само выражение равно произвольной постоянной

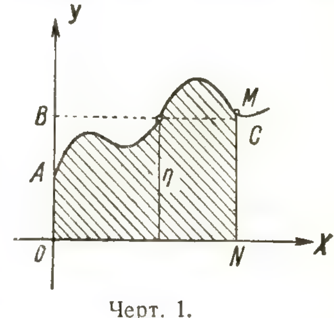
$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C, \qquad (7)$$

где $C$ — произвольная постоянная. Формула эта дает бесчисленное множество решений, и в геометрической интерпретации она представляет собою уравнение в неявной форме семейства интегральных кривых. Если в уравнении (7) выполним квадратуры и решим его относительно $y$, то получим уравнение семейства интегральных кривых (решения дифференциального уравнения) в явной форме:

$$y = \varphi(x, C).$$

П р и м е р. Площадь $OAMN$, ограниченная осями координат, дугой $AM$ кривой и ее ординатой $MN$ (черт. 1), равновелика площади некоторого прямоугольника $OBCN$ с тем же основанием $ON = x$ и высотою $\eta$:

$$\int_0^x y\,dx = x\eta; \quad \eta = \frac{1}{x}\int_0^x y\,dx. \qquad (8)$$



Черт. 1.

Величина $\eta$ называется *средней ординатой кривой в промежутке* $(0, x)$.

Найдем кривые, для которых средняя ордината пропорциональна крайней ординате $NM$. На основании формулы (8) будем иметь:

$$\int_0^x y\,dx = kxy, \tag{9}$$

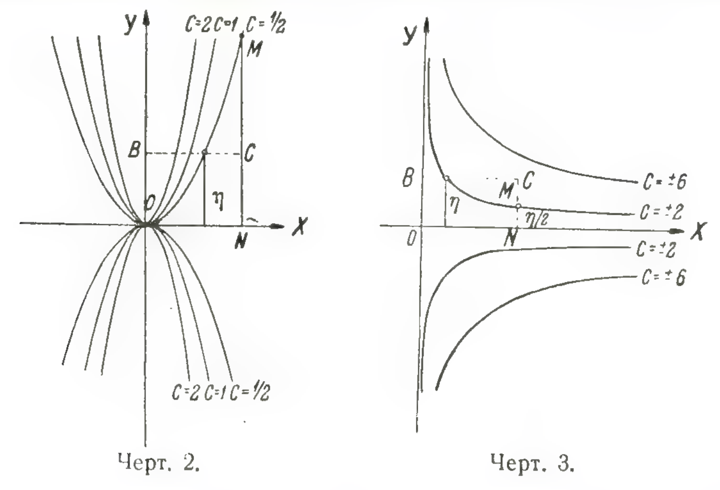
где $k$ — коэффициент пропорциональности. Дифференцируя почленно уравнение (9), получаем дифференциальное уравнение:

$$y = ky + kxy', \quad \text{или} \quad xy' = ay, \tag{10}$$

где

$$a = \frac{1-k}{k}. \tag{11}$$

При дифференцировании мы могли ввести посторонние решения, ибо из равенства производных вытекает лишь, что сами функции отличаются постоянным слагаемым. В данном случае, однако, посторонних решений не будет. Действительно, из уравнения (10), которое получилось от почленного дифференцирования уравнения (9), вытекает, что обе части уравнения (9)




Черт. 2. Черт. 3.

могут отличаться лишь постоянным слагаемым. Но непосредственно видно, что при $x = 0$ обе эти части равны нулю, а следовательно, упомянутое слагаемое равно нулю, т. е. всякое решение уравнения (10) будет и решением уравнения (9). Переходим к интегрированию уравнения (10). Его можно переписать так:

$$x\,\frac{dy}{dx} = ay,$$

и переменные отделяются:

$$\frac{dy}{y} = a\,\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим:

$$\lg y = a \lg x + C_1 \quad \text{или} \quad y = Cx^a, \tag{12}$$

где $C = e^{C_1}$ есть произвольная постоянная.

Согласно формуле (11), при увеличении $k$ от 0 до $+\infty$, $a$ будет уменьшаться от $+\infty$ до $(-1)$, и, следовательно, мы должны считать $a > -1$, так что во всяком случае интеграл, стоящий в левой части уравнения (9), будет иметь смысл. При $k=1$ будем иметь $a=0$, и формула (12) даст очевидное решение — семейство прямых, параллельных оси $OX$. При $k=\frac{1}{3}$ будем иметь $a=2$, что даст семейство парабол (черт. 2)

$$y = Cx^2,$$

для которых средняя ордината равна одной трети крайней. При $k=2$ получим семейство кривых:

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}},$$

для которых средняя ордината в два раза больше крайней (черт. 3).

**3. Однородные уравнения.** *Однородным уравнением называется уравнение вида*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)^{1)}. \tag{13}$$

Сохраняя прежнюю независимую переменную $x$, введем вместо функции $y$ новую функцию $u$:

$$y = xu, \quad \text{откуда} \quad y' = u + xu'. \tag{14}$$

Преобразуем уравнение

$$u + xu' = f(u) \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Переменные отделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - f(u)} = 0.$$

Обозначая через $\psi_1(u)$ коэффициент при $du$, получим:

$$\lg x + \int \psi_1(u)\,du = C_1,$$

откуда

$$x = Ce^{-\int \psi_1(u)\,du} \quad \text{или} \quad x = C\psi(u),$$

где $C = e^{C_1}$ есть произвольная постоянная.

---

[1]) Заметим, что функция двух переменных $\varphi(x, y)$ тогда и только тогда будет функцией от одного отношения $\frac{y}{x}$, когда величина функции $\varphi(x, y)$ не меняется при умножении $x$ и $y$ на произвольный множитель $t$, т. е. $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$. Условие это равносильно тому, что $\varphi(x, y)$ есть однородная функция $x$ и $y$ нулевой степени **[I, 151]**.

Возвращаясь к прежней переменной, можем написать уравнение семейства интегральных кривых в виде:

$$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{15}$$

Рассмотрим преобразование подобия плоскости $XOY$ с центром подобия в начале координат. Преобразование это сводится к тому, что точка $(x, y)$ переходит в новое положение

$$x_1 = kx; \quad y_1 = ky \qquad (k > 0) \tag{16}$$

или, что то же, оно сводится к умножению длины радиуса-вектора всякой точки плоскости на $k$ с сохранением его направления. Если $M$ есть первоначальное положение точки, а $M_1$ — положение той же точки после преобразования, то (черт. 4):

$$\overline{OM_1} : \overline{OM} = x_1 : x = y_1 : y = k.$$

Черт. 4.

Применяя преобразование (16) к уравнению (15), получим уравнение:

$$x_1 = kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right), \tag{17}$$

которое ввиду произвольности постоянной $C$ не отличается от уравнения (15), т. е. преобразование (16) не меняет всей совокупности кривых (15), но лишь переводит одну из кривых семейства (15) в другую кривую того же семейства. Всякая кривая семейства (15) может быть, очевидно, получена из одной определенной кривой этого семейства при помощи преобразования (16), если соответствующим образом выбрать постоянную $k$. Полученный результат можно формулировать так: *все интегральные кривые однородного уравнения могут быть получены из одной интегральной кривой при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.*

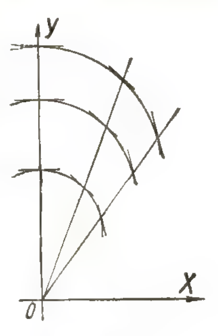
Уравнение (13) можно переписать так:

$$\operatorname{tg}\alpha = f(\operatorname{tg}\theta),$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной, а $\theta$ — угол, образованный радиусом-вектором из начала координат с положительным направлением оси $OX$. Таким образом уравнение (13) устанавливает связь между углами $\alpha$ и $\theta$, так что *вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, касательные к интегральным кривым однородного уравнения должны быть параллельны между собой* (черт. 4).

Из этого свойства касательных становится очевидным то обстоятельство, что преобразование подобия с центром подобия в начале

координат преобразует интегральную кривую в интегральную же кривую, ибо, при удлинении радиусов-векторов точек кривой в одном и том же отношении, направления касательных на каждом радиусе-векторе не меняются (черт. 5).



Черт. 5.

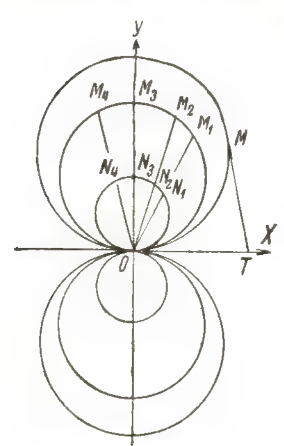
Если мы применим указанное выше преобразование подобия к интегральной кривой, которая представляет собою прямую, проходящую через начало координат, то после преобразования мы получим ту же прямую, так что в этом случае упомянутый выше прием получения интегральных кривых из одной из них неприменим.

Пример. Определить кривые, у которых отрезок $MT$ касательной от точки касания до пересечения с осью $OX$ равен отрезку $OT$ оси $OX$ (черт. 6).

Уравнение касательной имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

где $(X, Y)$—текущие координаты касательной. Подставляя $Y = 0$, определим след касательной на оси $OX$:



Черт. 6.

$$\overline{OT} = x - \frac{y}{y'},$$

и условие $\overline{MT}^2 = \overline{OT}^2$ даст нам [I, 77]

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \tag{18}$$

которое очевидно принадлежит к типу однородных.

Вводим вместо $y$ новую функцию $u$ по формуле:

$$y = xu; \quad y' = xu' + u.$$

Подставив в уравнение (18), имеем:

$$xu' + u = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} - \frac{u + u^3}{1 - u^2} = 0, \tag{19}$$

и переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} - \frac{1 - u^2}{u + u^3}\,du = 0. \tag{20}$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{x(u^2+1)}{u}=C,$$

или, возвращаясь к прежней переменной $y$:

$$x^2+y^2-Cy=0, \tag{21}$$

т. е. искомые кривые суть окружности, проходящие через начало координат и касающиеся в этой точке оси $OX$ (черт. 6).

При переходе от уравнения (19) к уравнению (20) нам приходилось делить обе части уравнения на $(u+u^3)$, и мы могли потерять решение $u=0$ или, что то же, $y=0$. Подставляя в уравнение (18), видим, что оно действительно будет решением уравнения. Но это решение заключается и в формуле (21). Чтобы получить его, надо обе части формулы (21) разделить на $C$ и затем положить $C=\infty$.

Каждая из окружностей семейства (21) может быть получена из одной из них при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат, так что (черт. 6):

$$\frac{\overline{OM_1}}{\overline{ON_1}}=\frac{\overline{OM_2}}{\overline{ON_2}}=\frac{\overline{OM_3}}{\overline{ON_3}}=\ldots$$

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{22}$$

как мы сейчас покажем, приводится к однородному. Введем вместо $x$ и $y$ новые переменные $\xi$ и $\eta$:

$$x=\xi+\alpha; \quad y=\eta+\beta, \tag{23}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — постоянные, которые мы сейчас определим.

Уравнение (22) в новых переменных будет:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right).$$

Определим $\alpha$ и $\beta$ из условия:

$$a\alpha+b\beta+c=0, \quad a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.$$

При этом уравнение приведется к однородному:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left[\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}\right].$$

Преобразованию (23) соответствует параллельное перенесение координатных осей, причем начало координат переходит в точку $(\alpha, \beta)$ пересечения прямых

$$ax+by+c=0 \quad \text{и} \quad a_1x+b_1y+c_1=0. \tag{24}$$

Полученные в предыдущем результаты будут, таким образом, применимы и к уравнению (22), с той лишь разницей, что роль начала координат будет играть точка $(\alpha, \beta)$.

Если прямые (24) параллельны, то указанное выше преобразование не может быть выполнено. Но в этом случае, как известно из аналитической геометрии, коэффициенты в уравнениях (24) должны быть пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \quad \text{и} \quad a_1 x + b_1 y = \lambda (ax + by);$$

вводя вместо $y$ новую переменную $u$:

$$u = ax + by,$$

получим, как нетрудно видеть, уравнение с отделяющимися переменными.

Ниже мы познакомимся с весьма важным приложением однородного уравнения к исследованию течения жидкости.

**4. Линейные уравнения и уравнение Бернулли.** Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y' + P(x) y + Q(x) = 0. \tag{25}$$

Рассмотрим сначала *соответствующее уравнение без свободного члена* $Q(x)$:

$$z' + P(x) z = 0.$$

Переменные здесь отделяются:

$$\frac{dz}{z} + P(x)\, dx = 0,$$

и мы получим:

$$z = Ce^{-\int P(x)\, dx}. \tag{26}$$

Для интегрирования данного линейного уравнения (25) воспользуемся методом изменения произвольной постоянной, а именно — будем искать решение этого уравнения в форме, аналогичной форме (26) для $z$:

$$y = ue^{-\int P(x)\, dx}, \tag{27}$$

где только $u$ не постоянная, а искомая функция от $x$. Дифференцируя, находим:

$$y' = u'e^{-\int P(x)\, dx} - P(x)\, ue^{-\int P(x)\, dx}.$$

Подставив в уравнение (25), получим:

$$u'e^{-\int P(x)\,dx} + Q(x) = 0$$

$$u' = -Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}, \quad \text{откуда} \quad u = C - \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx$$

и окончательно, согласно равенству (27) для $y$, получаем:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[C - \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{28}$$

При определении $y$ по этой формуле надо брать одно из значений неопределенных интегралов

$$\int P(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx,$$

так как прибавление к ним произвольных постоянных изменяет только значение $C$.

Заменяя их определенным интегралом с переменным верхним пределом [**I, 96**], можем переписать формулу (28) так:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[C - \int\limits_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx\right], \tag{29}$$

где $x_0$ — произвольно выбранное, но определенное число. При подстановке вместо переменного верхнего предела значения $x = x_0$ правая часть написанной формулы будет равна $C$, так как интегралы с одинаковыми верхним и нижним пределами равны нулю, т. е. постоянная $C$ в формуле (29) есть значение функции $y$ при $x = x_0$. Это значение, которое мы обозначим через $y_0$, называется *начальным значением решения*.

Для обозначения этого обстоятельства пишут:

$$y\,|_{x=x_0} = y_0. \tag{30}$$

Таким образом, если задано начальное значение искомого решения при $x = x_0$, то формула (29) дает вполне определенное решение уравнения:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\left[y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} Q(x)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{31}$$

Условие (30), которое называется *начальным условием*, с геометрической точки зрения равносильно тому, что ищется интегральная кривая, проходящая через *заданную точку* $(x_0, y_0)$.

Если положить $Q(x) \equiv 0$, то получим решение однородного уравнения

$$y' + P(x) y = 0,$$

удовлетворяющее условию (30):

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx}. \tag{$31_1$}$$

Из формулы (29) следует, что решения линейного дифференциального уравнения имеют вид:

$$y = \varphi_1(x) C + \varphi_2(x), \tag{32}$$

т. е. *$y$ есть линейная функция произвольной постоянной.*

Пусть $y_1$ есть решение уравнения (25). Полагая

$$y = y_1 + z,$$

получим для $z$ уравнение:

$$z' + P(x) z + [y_1' + P(x) y_1 + Q(x)] = 0.$$

Сумма, стоящая в квадратных скобках, равна нулю, так как по предположению $y_1$ есть решение уравнения (25). Следовательно, $z$ есть решение соответствующего уравнения без свободного члена и определяется по формуле (26), а тогда:

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)\,dx}. \tag{33}$$

Положим теперь, что известно еще второе решение $y_2$ уравнения (25), и пусть это решение получается из формулы (33) при $C = a$:

$$y_2 = y_1 + ae^{-\int P(x)\,dx}. \tag{34}$$

Исключая $e^{-\int P(x)\,dx}$ из равенств (33) и (34), получим выражение решений линейного уравнения через его два решения $y_1$ и $y_2$:

$$y = y_1 + C_1 (y_2 - y_1), \tag{35}$$

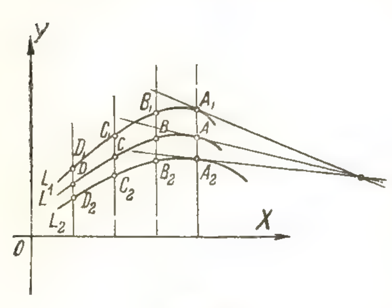
где $C_1$ — произвольная постоянная, заменяющая $\frac{C}{a}$ в прежних обозначениях. Из уравнения (35) вытекает следующее соотношение:

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{1 - C_1}{C_1} = C_2, \tag{36}$$

которое показывает, что отношение $\frac{y_2 - y}{y - y_1}$ есть величина постоянная, т. е. *семейство интегральных кривых линейного уравнения*

*есть семейство кривых, делящих в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя кривыми этого семейства.*

Таким образом, если известны две интегральные кривые $L_1$ и $L_2$ линейного уравнения, то всякая другая интегральная кривая $L$ определяется постоянным значением отношений (черт. 7)




Черт. 7.

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{A_1A}}=\frac{\overline{BB_2}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{CC_2}}{\overline{C_1C}}=\frac{\overline{DD_2}}{\overline{D_1D}}=\ldots$$

В силу этого равенства хорды $A_1B_1$, $AB$ и $A_2B_2$ должны или пересекаться в одной точке, или быть параллельными. При беспредельном приближении отрезка ординаты $\overline{B_1B_2}$ к отрезку $\overline{A_1A_2}$ направление этих хорд перейдет в направление касательных к кривым в точках $A_1$, $A$ и $A_2$, и мы получаем следующее свойство касательных к интегральным кривым линейного уравнения: *касательные к интегральным кривым линейного уравнения в точках пересечения этих кривых прямой, параллельной оси $OY$, или пересекаются в одной точке, или параллельны.*

Примеры. 1. Рассмотрим процесс устанавливающегося переменного тока в цепи с самоиндукцией. Пусть $i$ — сила тока, $v$ — напряжение, $R$ — сопротивление цепи и $L$ — коэффициент самоиндукции.

Имеет место соотношение:

$$v=Ri+L\frac{di}{dt},$$

откуда для $i$ получаем линейное уравнение

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i-\frac{v}{L}=0.$$

Считая $R$ и $L$ постоянными и $v$ — заданной функцией времени $t$, вычисляем интегралы, входящие в формулу (31):

$$\int_0^t P\,dt=\int_0^t\frac{R}{L}\,dt=\frac{R}{L}t;\qquad \int_0^t Qe^{\int_0^t P\,dt}\,dt=-\frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt.$$

Обозначив через $i_0$ начальное значение $i$, т. е. значение силы тока при $t=0$, получим, согласно (31), формулу для определения $i$ в любой момент времени:

$$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left(i_0+\frac{1}{L}\int_0^t ve^{\frac{R}{L}t}\,dt\right).$$

При *постоянном напряжении* $v$ будем иметь:

$$i = \left(i_0 - \frac{v}{R}\right) e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{v}{R}.$$

При возрастании $t$ множитель $e^{-\frac{R}{L} t}$ быстро убывает, и практически через короткий промежуток времени процесс можно будет считать установившимся, причем сила тока определяется по закону Ома: $i = \frac{v}{R}$.

В частности, при $i_0 = 0$ получим формулу:

$$i = \frac{v}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right) \tag{37}$$

для силы тока при *замыкании* цепи.

Постоянную $\frac{L}{R}$ называют *временной постоянной* рассматриваемой цепи.

Рассмотрим напряжение $v$ синусоидального характера $v = A \sin \omega t$. Согласно формуле (31), получим:

$$i = e^{-\frac{R}{L} t} \left[i_0 + \frac{A}{L} \int_0^t e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t \, dt\right].$$

Нетрудно видеть, что [I, 201]

$$\int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t \, dt = e^{\frac{R}{L} t}\left[\frac{RL}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos \omega t\right]$$

и следовательно

$$\int_0^t e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t \, dt = e^{\frac{R}{L} t}\left[\frac{RL}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin \omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos \omega t\right] + \frac{\omega L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}.$$

Подставляя в выражение $i$, получим:

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega L A}{\omega^2 L^2 + R^2}\right) e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{RA}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin \omega t - \frac{\omega L A}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos \omega t. \tag{38}$$

Первое слагаемое, содержащее множитель $e^{-\frac{R}{L} t}$, быстро затухает, и практически через короткий промежуток времени после $t = 0$ сила тока будет определяться суммой двух остальных слагаемых формулы (38). Эта сумма представляет собою синусоидальную величину той же частоты $\omega$, что и напряжение $v$, но с другими амплитудой и фазой. Заметим также, что эта сумма, дающая установившийся процесс тока, не зависит от начального значения тока $i_0$.

**2.** При явлениях включения, когда появляется искра, сопротивление $R$ нельзя считать постоянным. Оно возрастает от начальной величины $R_0$ до бесконечно большой (к моменту выключения $\tau$).

Иногда допускают, что зависимость $R$ от $t$ выражается формулой

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{t}{\tau}} = \frac{R_0 \tau}{\tau - t}.$$

Это приводит нас к уравнению

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0 \tau}{L(\tau - t)} i - \frac{v}{L} = 0.$$

Выражая $t$ в долях $\tau$, мы должны ввести вместо $t$ новую независимую переменную $x$ по формуле:

$$t = \tau x,$$

причем $x$ изменяется от $x = 0$ (начальный момент) до $x = 1$ (момент погасания искры, выключение). Уравнение примет вид:

$$\frac{di}{dx} + \frac{R_0 \tau}{L(1 - x)} i - \frac{v\tau}{L} = 0 \tag{39}$$

при условии

$$i \Big|_{x=0} = i_0 \qquad \left(i_0 = \frac{v}{R_0}\right).$$

Применяя формулу (28), получим без труда общее решение уравнения:

$$i = (1 - x)^{\frac{R_0 \tau}{L}} \left[\frac{v\tau}{L} \int (1 - x)^{-\frac{R_0 \tau}{L}} dx + C\right],$$

причем придется различать два случая:

$$1)\ \frac{L}{R_0} \neq \tau \quad \text{и} \quad 2)\ \frac{L}{R_0} = \tau.$$

В случае 1) находим:

$$i = \frac{v\tau}{R_0 \tau - L}(1 - x) + C(1 - x)^{\frac{R_0 \tau}{L}}$$

и, подставляя $x = 0$, определяем произвольную постоянную $C$:

$$i_0 = \frac{v\tau}{R_0 \tau - L} + C; \quad C = i_0 - \frac{v\tau}{R_0 \tau - L},$$

и окончательно,

$$i = \frac{v\tau}{R_0 \tau - L}(1 - x) + \left(i_0 - \frac{v\tau}{R_0 \tau - L}\right)(1 - x)^{\frac{R_0 \tau}{L}}. \tag{40$_1$}$$

В случае 2) находим аналогичным путем:

$$i = (1 - x)\left[i_0 - \frac{v\tau}{L} \lg (1 - x)\right]. \tag{40$_2$}$$

Обобщением линейного дифференциального уравнения (25) является уравнение Бернулли:

$$y' + P(x) y + Q(x) y^m = 0, \tag{41}$$

причем показатель степени $m$ можно считать отличным от нуля и единицы, так как в этих случаях уравнение будет линейным. Делим

обе части на $y^m$:

$$y^{-m}y' + P(x)\,y^{1-m} + Q(x) = 0$$

и вводим вместо $y$ новую искомую функцию $u$:

$$u = y^{1-m}; \quad u' = (1-m)\,y^{-m}y'.$$

При этом уравнение приведется к виду:

$$u' + P_1(x)\,u + Q_1(x) = 0,$$

где

$$P_1(x) = (1-m)\,P(x) \quad \text{и} \quad Q_1(x) = (1-m)\,Q(x),$$

т. е. *подстановкой* $u = y^{1-m}$ *уравнение Бернулли* (41) *приводится к линейному* и интегрируется затем как линейное.

Отметим, что интегрирование дифференциального уравнения вида

$$y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^2 + R(x) = 0, \tag{41$_1$}$$

которое называется *уравнением Рикатти*, не приводится при произвольных коэффициентах к квадратурам. Его можно привести к линейному уравнению, если известно его какое-либо частное решение. Действительно, пусть $y_1(x)$ — решение уравнения ($41_1$), т. е.

$$y_1' + P(x)\,y_1 + Q(x)\,y_1^2 + R(x) = 0. \tag{*}$$

Введем в уравнение ($41_1$) вместо $y$ новую искомую функцию $u$ по формуле:

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Подставляя в ($41_1$) и принимая во внимание равенство (*), получим для $u$ линейное уравнение вида:

$$u' - [P(x) + 2Q(x)\,y_1]\,u - Q(x) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид: $u = C\varphi(x) + \psi(x)$. Подставляя это выражение $u$ в написанное выше равенство для $y$, получим общий интеграл уравнения Рикатти в виде:

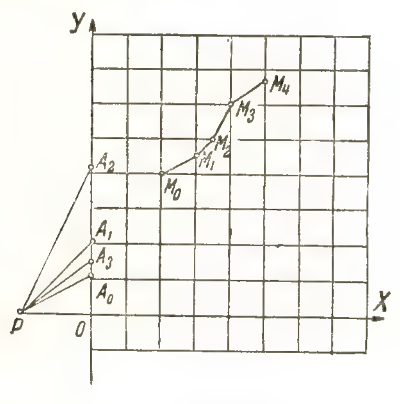
$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \psi_1(x)}{C\varphi_2(x) + \psi_2(x)}.$$

**5. Определение решения дифференциального уравнения по начальному условию.** Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{42}$$

представляет собой, как мы уже говорили, зависимость между координатами $(x, y)$ точки и угловым коэффициентом касательной $y'$ в этой

точке. Положим, что $f(x, y)$ есть однозначная непрерывная функция $(x, y)$. При этом любой точке плоскости, в которой $f(x, y)$ определена, соответствует, в силу уравнения (42), определенное направление, угловой коэффициент которого равен $f(x, y)$. Указывая это направление стрелкой, проходящей через соответствующую точку, мы будем иметь на плоскости *поле направлений*, причем всякое направление связано с некоторой точкой плоскости. Интегральные кривые уравнения (42) суть кривые, для которых упомянутые направления суть направления касательных: эти кривые можно назвать *интегральными кривыми данного поля направлений*.



Черт. 8.

В качестве примера можно привести магнитное поле на земной поверхности. Рассматривая некоторую часть земной поверхности как плоскость, мы будем иметь в каждой точке определенное направление, которое в этой точке имеет магнитная стрелка.

Перейдем теперь к вопросу об определении интегральных кривых уравнения (42). Чтобы вполне определить положение интегральной кривой, нужно задать еще какую-нибудь точку, через которую интегральная кривая должна пройти, например, точку пересечения интегральной кривой с прямой $x = x_0$, параллельной оси $OY$, или, что то же самое, *начальное значение* $y_0$ искомой функции $y$, которое она должна принимать при заданном значении $x = x_0$:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0.$$

Для приближенного построения интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0, y_0)$, можно применить излагаемый ниже способ Эйлера.

Прямыми, параллельными координатным осям, нанесем на координатной плоскости сетку равных малых квадратов и от начала координат в отрицательном направлении оси $OX$ отложим отрезок $\overline{OP}$, по длине равный единице (черт. 8). Подставляя в правую часть уравнения (42) $x = x_0$ и $y = y_0$, определим величину $f(x_0, y_0)$ и отложим на оси ординат отрезок $\overline{OA_0}$, равный $f(x_0, y_0)$. Отрезок $PA_0$ будет иметь, очевидно, угловой коэффициент, равный $f(x_0, y_0)$, и будет, следовательно, параллелен касательной к интегральной кривой в точке $(x_0, y_0)$. Приступаем теперь к приближенному построению самой интегральной кривой в виде ломаной линии.

Из точки $(x_0, y_0)$ проводим луч $M_0M_1$, параллельный $PA_0$ и имеющий, следовательно, угловой коэффициент $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — первая точка пересечения этого луча с какой-либо из сторон построенной квадратной сетки. На оси ординат откладываем отрезок $\overline{OA_1}$, равный $f(x_1, y_1)$, и через точку $M_1(x_1, y_1)$ проводим луч $M_1M_2$, параллельный $PA_1$ [имеющий, следовательно, угловой коэффициент $y'_1 = f(x_1, y_1)$] до первой следующей его точки пересечения $M_2(x_2, y_2)$ с какой-либо из сторон квадратной сетки и т. д. Это построение можно выполнять как в направлении возрастающих, так и в направлении убывающих абсцисс. Построенная указанным образом ломаная линия и представляет приближенно искомую интегральную кривую.

Заметим еще, что при построении отрезка $\overline{OP}$ отрезков $\overline{OA_0}$, $\overline{OA_1}$, ... можно пользоваться масштабом и отличным от масштаба, употребляемого для координат $x$ и $y$, ибо направление отрезков $\overline{PA_0}$, $\overline{PA_1}$, ... не зависит, очевидно, от выбора масштаба для вышеуказанных отрезков.

Из этого построения становится наглядно очевидным то обстоятельство, что через заданную точку $(x_0, y_0)$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (42).

Это утверждение справедливо и может быть строго доказано, если функция $f(x, y)$, кроме непрерывности, обладает еще некоторым свойством. Так, например, *если в соседстве с точкой* $(x_0, y_0)$ *функция* $f(x, y)$ *есть однозначная непрерывная функция своих аргументов и имеет непрерывную производную по* $y$, *то через точку* $(x_0, y_0)$ *проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (42).

Теорема эта, которую мы сейчас примем без доказательства, называется обычно *теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии*. В конце следующей главы мы приведем доказательство этой теоремы.

Кроме указанного выше геометрического пояснения формулированной теоремы, приведем еще аналитические пояснения для одного важного частного случая, а именно для того случая, когда правая часть уравнения (42) представляет собою ряд, расположенный по целым положительным степеням разностей $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ **[I, 161]**:

$$f(x, y) = \sum_{p, q=0}^{\infty} a_{pq} (x - x_0)^p (y - y_0)^q,$$

сходящийся, если абсолютные значения этих разностей достаточно малы.

В этом случае решение уравнения (42), удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=y_0, \tag{43}$$

может быть представлено в виде ряда Тэйлора, расположенного по целым положительным степеням разности $(x-x_0)$, причем уравнение (42) даст вполне определенные значения коэффициентов этого ряда. Действительно, подставляя в правую часть уравнения (42) $x=x_0$ и $y=y_0$, получим значение $y_0'$ первой производной $y'$ при $x=x_0$. Дифференцируя уравнение (42) по $x$, получим уравнение:

$$y''=\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}y';$$

подставляя в его правую часть $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y_0'$, определим значение $y_0''$ второй производной $y''$ при $x=x_0$. Дифференцируя написанное выше равенство еще раз по $x$, получим уравнение для $y'''$ и т. д. Таким образом определится ряд Тэйлора:

$$y=y_0+\frac{y_0'}{1!}(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)^2+\ldots, \tag{44}$$

который и будет давать при значениях $x$, близких к $x_0$, решение уравнения (42), удовлетворяющее начальному условию (43).

Вместо указанного приема постепенного определения производных при $x=x_0$ можно применить и другой прием, а именно метод неопределенных коэффициентов. Поставим в обе части уравнения (42) вместо $y$ степенной ряд с неопределенными коэффициентами:

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \tag{45}$$

Располагая правую часть по степеням $(x-x_0)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$, сможем определить постепенно коэффициенты $a_1$, $a_2$ ... Ряды (44) и (45) будут совпадать, как в этом нетрудно убедиться.

Пример. Найдем решение уравнения

$$y'=\frac{xy}{2}, \tag{46}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0}=1, \tag{47}$$

в виде степенного ряда:

$$y=1+\sum_{s=1}^{\infty}a_s x^s,$$

причем мы взяли свободный член равным единице, в силу начального условия (47).

Дифференцируем этот ряд:

$$y' = \sum_{s=1}^{\infty} s\alpha_s x^{s-1}.$$

Подставляем полученные выражения вместо $y$ и $y'$ в уравнение (46):

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \ldots + (n+1)\alpha_{n+1}x^n + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2}x(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и в правой частях, получим приведенные в табличке соотношения. Отсюда ясно, что

| | |
|---|---|
| $x^0$ | $\alpha_1 = 0$ |
| $x^1$ | $2\alpha_2 = \frac{1}{2}$ |
| $x^2$ | $3\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1$ |
| $x^3$ | $4\alpha_4 = \frac{1}{2}\alpha_2$ |
| . . | . . . . . . . . . . . . . |
| $x^n$ | $(n+1)\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$ |
| . . | . . . . . . . . . . . . . |

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_{2n+1} = \ldots = 0;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}; \quad \alpha_4 = \frac{1}{2!\,4^2}; \quad \ldots; \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{n!\,4^n};$$

т. е. окончательно [I, 126]

$$y = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n + \ldots = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

**6. Способ Эйлера — Коши.** Указанное в предыдущем пункте приближенное построение интегральной кривой уравнения (42) можно упростить, употребляя вместо сетки квадратов лишь прямые, параллельные оси $OY$. Видоизмененный таким образом способ Эйлера приводит к сравнительно простому и практически удобному способу приближенного вычисления ординаты интегральной кривой $y$ при наперед заданной абсциссе $x$.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка интегральной кривой (черт. 9). Из этой точки проводим луч с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до пересечения его в точке $M_1$ с прямой $x = x_1$, параллельной оси $OY$. Пусть $y_1$ — ордината $M_1$. Она определяется очевидно из соотношения:

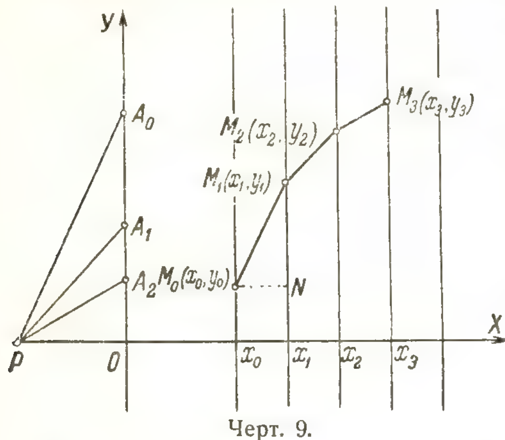
$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

ибо отрезки $\overline{M_0N}$ и $\overline{NM_1}$ выражаются числами $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$ и тангенс угла $\overline{NM_0M_1}$ по построению равен $f(x_0, y_0)$.

Из точки $(x_1, y_1)$ проводим луч $M_1M_2$ с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ до пересечения его в точке $M_2$ со следующей прямой $x = x_2$, параллельной оси $OY$. Ордината точки пересечения будет определяться, как и выше, из соотношения:

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Точно так же, исходя из точки $M_2(x_2, y_2)$, можно определить следующую точку $M_3(x_3, y_3)$ и т. д. Лучи $PA_0$, $PA_1$, ... на чертеже 9 играют ту же роль, что и на черт. 8.



Черт. 9.

Положим теперь, что нам надо при заданном значении $x$ определить значение $y$ решения уравнения (42), удовлетворяющее начальным условиям (43). В силу сказанного выше, для этого надо поступать так: промежуток $(x_0, x)$ разбиваем на отдельные части:

$$x_0 < x_1 < x_2 < < x_3 < \ldots < x_{n-2} < < x_{n-1} < x \ldots \tag{48}$$

и последовательно определяем ординаты $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \\ y_2 - y_1 &= f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \\ y_3 - y_2 &= f(x_2, y_2)(x_3 - x_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ Y - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

При указанных в [5] условиях относительно свойств функции $f(x, y)$, если число промежутков увеличивается, а каждый из них стремится к нулю, то величина $Y$, получаемая из формул (49), будет стремиться к истинной ординате $y$ искомой интегральной кривой, если заданное значение $x$ достаточно близко к начальному $x_0$.

Складывая равенства (49) почленно, найдем без труда:

$$y \sim Y = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \tag{50}$$

В простейшем случае уравнения

$$y' = f(x)$$

написанная формула будет иметь вид:

$$y_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f(x_s)(x_{s+1} - x_s),$$

что, как известно [I, 87], дает приближенное выражение для величины интеграла $y_0 + \int\limits_{x_0} f(x)\,dx$, т. е. для решения данного уравнения.

Вычисления по формулам (49) производятся в следующем порядке. Первая из формул (49) дает разность $(y_1 - y_0)$. Складывая ее с $y_0$, получаем вторую ординату $y_1$ и с помощью второй из формул (49) находим разность $y_2 - y_1$. Складывая эту последнюю с $y_1$, получаем третью ординату $y_2$ и с помощью третьей из формул (49) находим разность $(y_3 - y_2)$ и т. д. Прибавляя все эти разности к $y_0$, находим $Y$.

П р и м е р. Применим указанный способ к решению уравнения (46) при начальных условиях (47). Промежутки $(x_0, x_1)$, $(x_1, x_2)$, ... будем считать все равными 0,1.

| $x$ | $y$ | $\frac{xy}{2}$ | $\Delta y = \frac{xy}{2} \cdot 0{,}1$ | $e^{\frac{x^2}{4}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0,1 | 1 | 0,05 | 0,005 | 1,0025 |
| 0,2 | 1,005 | 0,1005 | 0,0101 | 1,0100 |
| 0,3 | 1,0151 | 0,1523 | 0,0152 | 1,0227 |
| 0,4 | 1,0303 | 0,2061 | 0,0206 | 1,0408 |
| 0,5 | 1,0509 | 0,2627 | 0,0263 | 1,0645 |
| 0,6 | 1,0772 | 0,3232 | 0,0323 | 1,0942 |
| 0,7 | 1,1095 | 0,3883 | 0,0388 | 1,1303 |
| 0,8 | 1,1483 | 0,4593 | 0,0459 | 1,1735 |
| 0,9 | 1,1942 | 0,5374 | 0,0537 | 1,2244 |

В прилагаемой таблице приведены результаты вычислений. Первый столбец содержит величины $x$, второй — соответствующие им величины $y$, третий — значения $f(x, y)$, т. е. $\frac{xy}{2}$, четвертый — разности $\Delta y = y_{s+1} - y_s$ и, наконец, последний — значения ординат точной интегральной кривой $y = e^{\frac{x^2}{4}}$.

При $x = 0{,}9$ ошибка, как видно из таблицы, меньше 0,031, т. е. составляет приблизительно 2,5%.

**7. Общий интеграл.** Изменяя в начальном условии

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

значение $y_0$, мы получим бесчисленное множество решений уравнения (42), или, в геометрической интерпретации, *семейство интегральных кривых*, зависящее от произвольной постоянной $y_0$ — ординаты точки пересечения интегральной кривой с прямой $x = x_0$. Произвольная постоянная может входить в решение и не как начальное значение $y$, но и в общей форме:

$$y = \varphi(x, C). \tag{51}$$

Такое решение уравнения (42), содержащее произвольную постоянную, как мы уже говорили [1], называется общим интегралом этого уравнения. Оно может быть и в неявной форме:

$$\psi(x, y, C) = 0. \tag{52}$$

Придавая постоянной $C$ определенное численное значение, получим определенное решение уравнения (42); такое решение называется *частным решением уравнения*. Для того чтобы из семейства кривых общего интеграла (52) выделить ту кривую, которая проходит через заданную точку $(x_0, y_0)$, надо определить численное значение $C$ из условия

$$\psi(x_0, y_0, C) = 0. \tag{53}$$

Задача, обратная задаче интегрирования дифференциального уравнения первого порядка, состоит в следующем: *дано семейство кривых* (52), *зависящее от одного параметра* $C$, *и требуется составить дифференциальное уравнение, для которого данное семейство будет семейством общего интеграла.*

Дифференцируя данное уравнение (52) по $x$, получим:

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y} y' = 0. \tag{54}$$

Исключая параметр $C$ из уравнений (52) и (54), будем иметь искомое дифференциальное уравнение семейства (52)

$$\Phi(x, y, y') = 0.$$

Общий интеграл (52) может быть написан в разрешенной относительно произвольной постоянной форме:

$$\omega(x, y) = C. \tag{55}$$

В таком виде мы получаем общий интеграл, в случае уравнения с отделяющимися переменными [2]. Функция $\omega(x, y)$, стоящая в левой части уравнения (55), называется интегралом дифференциального уравнения (42).

При подстановке в эту функцию вместо $y$ какого-либо частного решения уравнения (42) мы должны получить постоянную величину, т. е. *интеграл уравнения* (42) *есть такая функция* $x$ *и* $y$, *полная производная которой по* $x$ *равна нулю в силу уравнения* (42).

Беря полную производную по $x$ от обеих частей уравнения (55), получим [**I, 69**]:

$$\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y}y'=0,$$

или, поскольку $y$ есть по предположению решение уравнения (42), заменяя $y'$ на $f(x, y)$, получим:

$$\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0. \qquad (56)$$

Функция $\omega(x, y)$ должна удовлетворять этому уравнению независимо от того, какое именно решение уравнения (42) мы подставляли в эту функцию. Но в силу произвольности начального условия (43) в теореме существования и единственности значения $x$ и $y$ могут быть какие угодно, если мы берем все решения уравнения (42), т. е. *функция* $\omega(x, y)$ *должна удовлетворять уравнению* (56) *тождественно относительно* $x$ и $y$. Покажем, наконец, каким образом можно проверить решение уравнения (42), когда оно дано в неявной форме:

$$\omega_1(x, y)=0. \qquad (57_1)$$

Как и выше, получаем уравнение

$$\frac{\partial\omega_1(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1(x, y)}{\partial y}f(x, y)=0, \qquad (57_2)$$

причем это соотношение должно быть выполнено во всех точках кривой ($57_1$), т. е. равенство ($57_2$) должно быть выполнено не обязательно тождественно относительно $x$ и $y$, но лишь в силу равенства ($57_1$), т. е., короче говоря, ($57_2$) должно быть следствием ($57_1$)

Рассмотрим, например, уравнение:

$$y'=\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}.$$

Нетрудно видеть, что окружность

$$x^2+y^2-1=0$$

есть решение этого уравнения. Действительно, в данном случае $f(x, y)=$ $=\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}$ и $\omega_1(x, y)=x^2+y^2-1$, равенство ($57_2$) имеет вид:

$$2x+2y\frac{1-3x^2-y^2}{2xy}=0, \quad \text{т. е.}\quad \frac{1-x^2-y^2}{x}=0,$$

и оно очевидно выполняется в силу уравнения окружности. Покажем, что общий интеграл данного дифференциального уравнения будет:

$$x^3 + xy^2 - x = C.$$

Подставляя в (56) $\omega_1(x, y) = x^3 + xy^2 - x$, получим:

$$3x^2 + y^2 - 1 + 2xy\frac{1 - 3x^2 - y^2}{2xy} = 0,$$

и непосредственно видно, что это равенство выполнено тождественно при всяких $x$ и $y$.

Положим, что дифференциальное уравнение дано в нерешенном относительно $y'$ виде:

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{58}$$

Решая его относительно $y'$, мы приведем его к виду (42), но функция $f(x, y)$ может оказаться и многозначной функцией. Положим, что она имеет $m$ различных значений, так что данным $x$ и $y$ соответствуют $m$ различных значений $y'$, и тогда данной точке соответствует не одно, а $m$ различных направлений. Таким образом мы имеем на плоскости не одно, а $m$ различных полей направлений. Для каждого из этих полей через заданную точку проходит одна интегральная кривая, так что в общем счете через заданную точку будет проходить $m$ интегральных кривых уравнения (58). Общий интеграл этого уравнения будет содержать, однако, только одну произвольную постоянную, т. е. будет иметь вид (52), но уравнение (53) должно давать, вообще говоря, не одно, а $m$ различных значений для $C$.

В связи с последним указанием приведем один искусственный пример, когда решение, содержащее произвольную постоянную, не является, строго говоря, общим интегралом. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y'^2 - xy' = 0. \tag{59}$$

Левая часть его разлагается на множители $y'(y' - x) = 0$, и мы имеем по существу два различных дифференциальных уравнения:

$$y' = 0 \quad \text{и} \quad y' - x = 0,$$

имеющих общие интегралы

$$y - C = 0 \tag{59$_1$}$$

и

$$y - \frac{1}{2}x^2 - C = 0. \tag{59$_2$}$$

Мы можем объединить эти два уравнения в одно

$$(y - C)\left(y - \frac{1}{2}x^2 - C\right) = 0,$$

которое и дает общий интеграл уравнения (59). Через всякую точку плоскости проходят две интегральные линии: прямая $(59_1)$ и парабола $(59)_2$.

Формула ($59_1$) $y = C$ дает, очевидно, решение уравнения (59), содержащее произвольную постоянную; это решение не является общим интегралом уравнения (59), но лишь общим интегралом уравнения $y' = 0$.

Уравнения (42) или (58) могут иметь решения, которые и не заключаются в семействе общего интеграла, т. е. не могут быть получены из формулы (52) ни при каких частных значениях постоянной $C$. Такие решения называются *особыми решениями* уравнения. В [**10**] мы займемся вопросом о нахождении и геометрическом истолковании таких решений.

Понятия интеграла и общего интеграла, строго говоря, нуждаются в дополнительных разъяснениях. Но мы не будем этим заниматься, поскольку наиболее естественной основой теоретического исследования дифференциальных уравнений является теорема существования и единственности решения при заданном начальном условии. Нахождение общего интеграла, что мы делали выше для уравнений частного вида, является, конечно, весьма удобным практическим способом построения решений дифференциальных уравнений. Отметим при этом, что если мы, переходя от дифференциального уравнения к общему его интегралу, не нарушали при каждой отдельной операции равносильности следующих друг за другом уравнений, то особых решений не может быть, т. е. все решения заключаются в общем интеграле, если придавать $C$ различные численные значения. В случае потери равносильности уравнений особые решения надо искать среди потерянных решений, что мы будем делать в [**8**] и [**9**].

Естественно понимать под общим интегралом такое решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную, из которого можно получить все решения, определяемые теоремой существования и единственности при начальных условиях, заполняющих некоторую область плоскости $(x, y)$. Эта область определяется функцией $f(x, y)$, входящей в уравнение (42). Особыми решениями естественно называть решения дифференциального уравнения, обладающие тем свойством, что ни в одной точке соответствующей интегральной линии не выполняются условия, гарантирующие теорему существования и единственности. Все эти определения требуют, конечно, некоторых предположений относительно функций $f(x, y)$ или $\Phi(x, y, y')$, входящих в уравнения (42) или (58).

Заменяя в дифференциальном уравнении (42) [или в уравнении (58)] $y'$ произвольной постоянной $C_1$, получаем семейство кривых:

$$f(x, y) = C_1 \quad \text{или} \quad \Phi(x, y, C_1) = 0.$$

Каждая кривая этого семейства является геометрическим местом точек плоскости, которым соответствует одно и то же направление касательной, а потому всё семейство называется семейством изоклин данного дифференциального уравнения или семейством кривых равного уклона. В частности, в случае магнитного поля на земной поверхности

изоклины суть линии, вдоль которых направление магнитной стрелки постоянно.

Для однородного уравнения [3] изоклинами были прямые, проходящие через начало координат.

Посмотрим, в каких случаях изоклина является интегральной линией уравнения, т. е. дает решение уравнения. Возьмем какую-нибудь изоклину

$$\Phi(x, y, b) = 0,$$

соответствующую частному значению $C_1 = b$. В точках этой изоклины дифференциальное уравнение дает одно и то же направление касательных, и именно мы имеем $y' = b$. Для того, чтобы изоклина была и решением, необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной к изоклине во всех ее точках был также равен $b$, откуда непосредственно видно, что изоклина должна быть прямой с угловым коэффициентом $b$, ибо из $y' = b$ вытекает, что $y = bx + c$, где $c$ — некоторая постоянная. Итак, *изоклина будет решением уравнения только в том случае, когда она есть прямая и когда направление этой прямой совпадает с тем постоянным направлением касательных, которое определяется дифференциальным уравнением в точках этой изоклины.*

Пример. Найти кривые, у которых длина нормали $MN$ равна постоянной величине $a$ (черт. 10). Пользуясь выражением длины нормали [I, 77], будем иметь дифференциальное уравнение:

$$\pm y\sqrt{1 + y'^2} = a. \tag{60}$$

Возводя обе части уравнения в квадрат и решая уравнение относительно $y'$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \tag{61}$$

Правая часть этого уравнения определена лишь при $|y| \leq a$, т. е. в полосе между прямыми

$$y = a \quad \text{и} \quad y = -a, \tag{62}$$

ибо иначе подрадикальное выражение отрицательно, и в каждой точке внутри этой полосы $y'$ имеет два различных значения.

В уравнении (61) переменные отделяются:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm\, dx. \tag{63}$$

Интегрируя, получим без труда:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2, \tag{64}$$

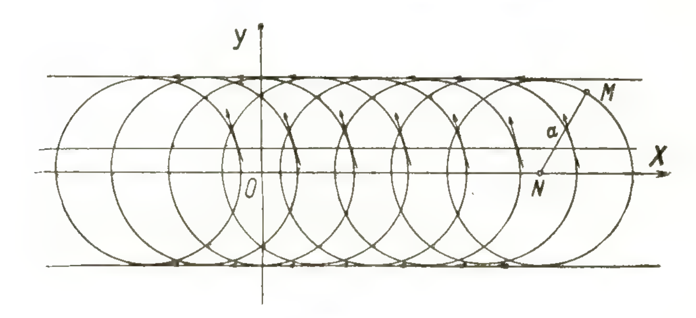
т. е. семейство окружностей, имеющих центры на оси $OX$ и радиус, равный $a$ (черт. 10). Все эти окружности находятся в полосе, ограниченной прямыми (62), причем через каждую точку внутри этой полосы проходят две окружности семейства (64).

При переходе от уравнения (61) к уравнению (63) нам приходилось делить на $\sqrt{a^2-y^2}$, и мы могли вследствие этого потерять решения $y=\pm a$. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что это действительно будут решения уравнения (61). Геометрически эти решения изображаются прямыми (62), и они не заключаются в семействе общего интеграла (64); иначе говоря, эти решения не могут быть получены из формулы (64) ни при каком постоянном значении $C$, т. е. являются особыми решениями уравнения.

Подставляя в уравнение (60) вместо $y'$ постоянную $C_1$, получим семейство изоклин

$$\pm y\sqrt{1+C_1^2}=a.$$

Это будут прямые, параллельные оси $OX$. Вдоль этих прямых касательные к окружностям (64) сохраняют постоянное направление.




Черт. 10.

В частности, прямые (62) также являются изоклинами, и вдоль этих прямых $y'$ сохраняет постоянное значение нуль, совпадающее с угловым коэффициентом самих этих прямых, вследствие чего прямые оказываются одновременно и решениями уравнения (61).

Внутри полосы, определяемой прямыми (62), мы имеем два дифференциальных уравнения (61): одно соответствует знаку (+) и другое — знаку (—) Окружности (64) внутри упомянутой полосы получаются согласно теореме существования и единственности. Эта теорема уже неприменима в точках прямых $y=\pm a$, и эти прямые суть особые решения уравнения (60) или (61).

**8. Уравнение Клеро.** Уравнением Клеро называется уравнение вида:

$$y=xy'+\varphi(y'). \tag{65}$$

Подставляя вместо $y'$ произвольную постоянную $C$, получим семейство изоклин этого уравнения:

$$y=xC+\varphi(C). \tag{66}$$

Мы видим, что все изоклины суть прямые линии, и угловой коэффициент $C$ каждой из этих прямых есть та самая постоянная, которой мы заменили $y'$, т. е. направление каждой из прямых (66) совпадает с тем постоянным направлением касательных, которое определяется

дифференциальным уравнением в точках этой прямой. Вспоминая сказанное в предыдущем номере, можем утверждать, что каждая из прямых (66) есть и решение уравнения (65), т. е. семейство изоклин (66) есть в то же время и семейство общего интеграла уравнения (65).

Укажем теперь другой способ получения общего интеграла уравнения (65), причем этот способ даст нам не только общий интеграл, но и особое решение уравнения (65). Обозначая $y' = p$, перепишем уравнение (65):

$$y = xp + \varphi(p). \tag{67}$$

Дело сводится к нахождению $p$ как функции от $x$: $p = \omega(x)$ так, чтобы при подстановке $p = \omega(x)$ в правую часть (67) получить для $y$ такую функцию от $x$, производная которой $y'$ была бы равна: $y' = p = \omega(x)$. Взяв дифференциалы от обеих частей (67) и полагая слева $dy = y'dx = p\,dx$, получим дифференциальное уравнение первого порядка для $p$:

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp \quad \text{или} \quad [x + \varphi'(p)]\,dp = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из множителей, мы получаем два случая. Случай $dp = 0$ дает $p = C$, где $C$ — произвольная постоянная; подставляя $p = C$ в уравнение (67), получим опять общий интеграл (66). Во втором случае мы имеем уравнение:

$$x + \varphi'(p) = 0. \tag{68}$$

Исключая $p$ из уравнений (67) и (68), т. е. из двух уравнений

$$y = xp + \varphi(p) \quad \text{и} \quad x + \varphi'(p) = 0, \tag{69}$$

получим так же решение уравнения (65), уже не содержащее произвольной постоянной. Это решение, обычно, является особым решением уравнения.

К уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по заданному свойству ее касательной, причем свойство это должно относиться лишь к самой касательной, но не к точке касания. Действительно, уравнение касательной имеет вид:

$$Y - y = y'(X - x) \quad \text{или} \quad Y = y'X + (y - xy'),$$

и всякое свойство касательной выражается соотношением между $(y - xy')$ и $y'$:

$$\Phi(y - xy',\ y') = 0.$$

Решая его относительно $(y - xy')$, придем к уравнению вида (65). Прямые линии, образующие общий интеграл уравнения Клеро, очевидно не представляют интереса в смысле ответа на задачу, и этот ответ будет даваться особым решением уравнения.

Пример. Найти такую кривую, чтобы отрезок $T_1T_2$ ее касательной между координатными осями имел постоянную длину $a$ (черт. 11).

Определяя из уравнения касательной следы $OT_1$ и $OT_2$ касательной на координатных осях, составим без труда дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$\frac{(y-xy')^2}{y'^2}+(y-xy')^2=a^2 \quad \text{или} \quad y=xy'\pm\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Общий интеграл его:

$$y=xC\pm\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} \tag{70}$$

представляет собой семейство прямых линий, длина отрезка которых между координатными осями равна $a$. Особое решение получится в результате исключения $p$ из уравнения:

$$y=xp\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \tag{71}$$

и уравнения

$$x\pm\frac{\sqrt{1+p^2}-\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2}=0,$$

которое приводится к виду:

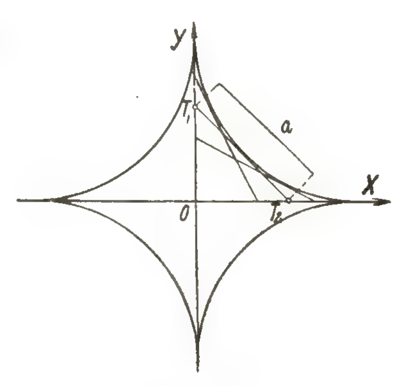
$$x\pm\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}=0.$$

Полагая $p=\operatorname{tg}\varphi$, получим:

$$x=\mp a\cos^3\varphi$$

и из уравнения (71) для $y$ будем иметь:

$$y=\mp a\cos^3\varphi\operatorname{tg}\varphi\pm a\sin\varphi=\pm a\sin^3\varphi.$$



Черт. 11.

Возводя два последних равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно, исключим $\varphi$:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

т. е. искомая кривая есть астроида, о которой мы говорили в [**I, 80**]. Прямые (70) образуют семейство касательных к ней (черт. 11).

**9. Уравнение Лагранжа.** Уравнением Лагранжа называется уравнение вида:

$$y=x\varphi_1(y')+\varphi_2(y'). \tag{72}$$

причем мы считаем $\varphi_1(y')$ отличным от $y'$, так как при $\varphi_1(y')=y'$ мы получаем уже разобранное уравнение Клеро.

Применим к уравнению (72) тот же метод дифференцирования, что и к уравнению Клеро. Обозначая $y' = p$, перепишем уравнение в виде:

$$y = x\varphi_1(p) + \varphi_2(p). \tag{73}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей, находим уравнение первого порядка для $p$:

$$p\,dx = \varphi_1(p)\,dx + x\varphi_1'(p)\,dp + \varphi_2'(p)\,dp. \tag{73$_1$}$$

Деля на $dp$, получим уравнение:

$$[\varphi_1(p) - p]\frac{dx}{dp} + \varphi_1'(p)\,x + \varphi_2'(p) = 0,$$

которое является линейным дифференциальным уравнением, если считать $x$ функцией от $p$. Деля обе части его на коэффициент $[\varphi_1(p) - p]$, приведем его к виду (25) и получим его общий интеграл в виде:

$$x = \psi_1(p)\,C + \psi_2(p). \tag{74}$$

Подставляя это выражение $x$ в уравнение (72), получим для $y$ уравнение вида:

$$y = \psi_3(p)\,C + \psi_4(p). \tag{75}$$

Формулы (74) и (75) выражают $x$ и $y$ через произвольную постоянную $C$ и переменный параметр $p$, т. е. дают параметрическое представление общего интеграла уравнения Лагранжа. Если исключим из уравнений (74) и (75) параметр $p$, то получим обычное уравнение для общего интеграла.

При делении уравнения на $dp$ мы могли потерять решения, соответствующие значению $dp = 0$, т. е. соответствующие постоянным значениям $p$ или, что то же, $y'$. Но постоянное значение $y'$ приводит к полиному первой степени для $y$, т. е. эти потерянные решения, если они и есть, должны быть прямыми линиями. Заметим еще, что при постоянном $p = a$ уравнение ($73_1$) дает $a\,dx = \varphi_1(a)\,dx$, т. е. значение постоянной $a$ должно определяться из уравнения $\varphi_1(a) - a = 0$.

Приведем геометрическую интерпретацию этого факта. Подставляя в уравнение (72) вместо $y'$ постоянную $C_1$, получим уравнение изоклин:

$$y = x\varphi_1(C_1) + \varphi_2(C_1), \tag{76}$$

т. е. *изоклины уравнения Лагранжа суть прямые линии*. Среди изоклин надо искать и те решения, которые представляются прямыми линиями. Для этого надо поставить условие, что угловой коэффициент $\varphi_1(C_1)$ изоклины совпадает с постоянным значением $C_1$ углового коэффициента касательной вдоль изоклины:

$$\varphi_1(C_1) - C_1 = 0.$$

Решая это уравнение и подставляя найденные для $C_1$ значения в уравнение (76), получим искомые решения, среди которых должны заключаться и указанные особые решения.

**10. Огибающие семейства кривых и особые решения.** Мы имели уже два примера, в которых, кроме общего интеграла, были получены и особые решения. В примере из [7] общий интеграл представлял собою семейство окружностей

$$(x-C)^2+y^2=a^2 \tag{77}$$

с центрами на оси $OX$ и фиксированным радиусом $a$.

Особыми решениями являлись две прямые $y=\pm a$, параллельные оси $OX$. Прямые эти в каждой своей точке касаются одной из окружностей семейства (77) (черт. 10). В примере из [8] общий интеграл представлял собою семейство прямых, длина отрезка которых между координатными осями равна заданной величине $a$, а особое решение представляло собою астроиду, касающуюся во всех своих точках с одной из указанных прямых, т. е. упомянутое семейство прямых являлось семейством касательных для этой астроиды.

Эти примеры естественно приводят нас к понятию огибающей данного семейства линий. Пусть дано семейство линий

$$\psi(x, y, C)=0, \tag{78}$$

где $C$ — произвольная постоянная. *Огибающей этого семейства называется линия, которая во всех своих точках касается различных линий семейства*, т. е. *имеет в каждой своей точке касательную, общую с линией семейства* (78), *проходящей через эту же точку.*

Выясним правило нахождения этой огибающей. Прежде всего определим угловой коэффициент касательной к линии семейства (78). Дифференцируя равенство (78) и принимая во внимание, что $y$ есть функция от $x$, а $C$ — постоянная, получим:

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

откуда [I, 69]

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}}. \tag{79}$$

Положим, что искомое уравнение огибающей будет

$$R(x, y)=0. \tag{80}$$

Мы можем считать, что неизвестная нам пока левая часть этого уравнения, т. е. $R(x, y)$, имеет вид $\psi(x, y, C)$, где только $C$ не постоянная, а какая-то неизвестная пока функция от $x$ и $y$.

Действительно, для любой функции $R(x, y)$ мы можем написать равенство

$$R(x, y) = \psi(x, y, C),$$

которое и определит нам $C$ как функцию от $x$ и $y$. Итак, мы можем искать уравнение огибающей также в виде (78), считая только $C$ не постоянной, а искомой функцией от $x$ и $y$. Беря дифференциал от обеих частей уравнения (78), мы получим, принимая во внимание, что $C$ уже не постоянная:

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}dC = 0. \qquad (81)$$

У искомой огибающей угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ должен быть по условию таким же, что и у кривой семейства (78), проходящей через ту же точку, т. е. равенство (81) должно дать для $\frac{dy}{dx}$ прежнее выражение (79), а это будет иметь место лишь в том случае, когда третье слагаемое в левой части формулы (81) будет равно нулю, т. е. $\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C}dC = 0$. Возможность $dC = 0$ дает постоянную $C$, т. е. дает опять кривую семейства, а не огибающую, и, следовательно, чтобы получить огибающую, мы должны положить

$$\frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

Это уравнение и определит нам $C$ как функцию от $(x, y)$. Подставляя это выражение $C$ через $x$ и $y$ в левую часть равенства (78), получим искомое уравнение огибающей (80), т. е. *уравнение огибающей семейства* (78) *может быть получено исключением $C$ из двух уравнений*:

$$\psi(x, y, C) = 0; \qquad \frac{\partial\psi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \qquad (82)$$

Когда мы двигаемся по огибающей, то мы касаемся различных линий семейства (78), каждая из которых определяется своим значением постоянной $C$, таким образом становится наглядно понятным тот факт, что мы искали уравнение огибающей также в виде (78), считая только $C$ переменным.

Вернемся теперь к особым решениям дифференциального уравнения. Положим, что (78) есть семейство общего интеграла дифференциального уравнения:

$$\Phi(x, y, y') = 0, \qquad (83)$$

т. е. что на любой линии семейства (78) координаты $(x, y)$ и угловой коэффициент касательной $y'$ удовлетворяют уравнению (83). В каждой точке огибающей $x$, $y$ и $y'$ будут совпадать с таковыми же

величинами некоторой кривой семейства (78), т. е. $x$, $y$ и $y'$ огибающей будут также удовлетворять (83). Итак, *огибающая семейства общего интеграла есть также интегральная кривая уравнения.*

Таким образом, если $\psi(x, y, C) = 0$ есть общий интеграл уравнения (83), то исключение $C$ из уравнений (82) приводит нас в некоторых случаях к особому решению. Мы оговорились здесь, добавив „в некоторых случаях" (а не всегда), из следующих соображений. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что линии (78) имеют касательную, поэтому, если мы исключим $C$ из уравнений (82), то можем получить не только огибающую, а также и совокупность всех особых точек кривых семейства (78), т. е. геометрическое место тех точек кривых (78), в которых эти кривые не имеют определенной касательной [**I, 76**]. Кроме того, иногда случается, что сама огибающая входит в состав семейства линий (78). Мы не останавливаемся на строгом изложении теории огибающей и особых решений. Такая теория должна быть тесно связана с теоремой существования и единственности, о которой мы упоминали в [**5**]. Мы ограничимся выяснением вопроса на некоторых примерах.

**1.** Будем искать огибающую семейства окружностей (77):

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2.$$

Уравнения (82) имеют в данном случае вид:

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2; \quad -2(x - C) = 0.$$

Второе уравнение дает $C = x$, и, подставляя его в первое уравнение, получаем $y^2 = a^2$, т. е. совокупность двух прямых $y = \pm a$, что мы имели и раньше.

**2.** Общий интеграл уравнения Клеро $y = xy' + \varphi(y')$ будет

$$y = xC + \varphi(C).$$

Огибающая получится исключением $C$ из двух уравнений:

$$y = xC + \varphi(C); \quad 0 = x + \varphi'(C).$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (69) из [**8**], с несущественной заменой буквы $p$ на букву $C$, т. е. мы получим прежнее правило нахождения особого решения уравнения Клеро.



Черт. 12.

**3.** Кривая $y^2 = x^3$ представляет собою так называемую полукубическую параболу (черт. 12). Двигая ее параллельно оси $OY$, получим семейство таких полукубических порабол:

$$(y + C)^2 = x^3.$$

Каждая из этих кривых имеет острие на оси $OY$, и в этом острие имеется с правой стороны касательная, параллельная оси $OX$. Уравнения (82) в данном случае имеют вид:

$$(y + C)^2 = x^3; \quad 2(y + C) = 0.$$

Исключая $C$, получаем $x = 0$, т. е. ось $OY$. В данном случае эта ось $OY$ не является огибающей семейства, а геометрическим местом особых точек кривых семейства.

**4.** Рассмотрим семейство кривых

$$y = C(x - C)^2.$$

При $C \neq 0$ это есть парабола, а при $C = 0$ — ось $OX$. Уравнения (82) имеют вид

$$y = C(x - C)^2; \quad (x - C)(x - 3C) = 0.$$

Второе уравнение дает $C = x$ или $C = \frac{1}{3}x$. Подставляя в первое уравнение, получим или $y = 0$, или $y = \frac{4}{27}x^3$. Первая линия $y = 0$ есть ось $OX$, которая содержится в самом семействе кривых, а кубическая парабола $y = \frac{4}{27}x^3$ есть огибающая семейства.

**5.** Возьмем хорды окружности с центром в начале координат и радиусом единица, перпендикулярные к оси $OX$, и построим на каждой такой хорде, как диаметре, окружность. Таким образом получится семейство окружностей. Если $x = C$ — точка пересечения упомянутой хорды с осью $OX$, то квадрат радиуса соответствующей окружности будет $(1 - C^2)$ (черт. 13), и уравнение семейства будет

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 - C^2.$$

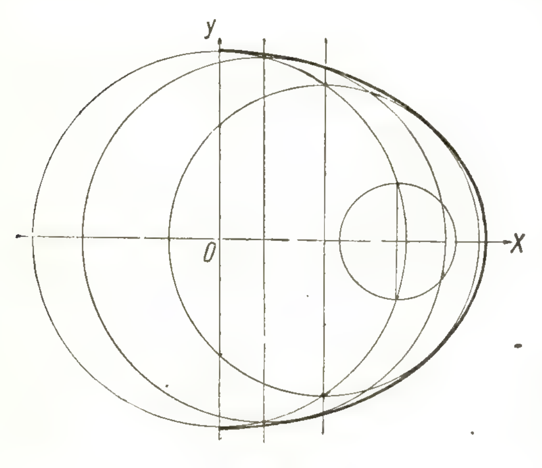
Дифференцируя по $C$, получим уравнение

$$-2(x - C) = -2C;$$

исключая $C$ из последних двух уравнений, будем иметь уравнение

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

т. е. получится эллипс с полуосями $\sqrt{2}$ и 1, для которого координатные оси суть оси симметрии. Из чертежа ясно, что этот эллипс будет касаться не всех окружностей семейства.




Черт. 13.

**11. Уравнения, квадратные относительно $y'$.** Рассмотрим более подробно с точки зрения особых решений квадратные относительно $y'$ дифференциальные уравнения:

$$\Phi(x, y, y') = y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0. \tag{84}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однозначны, непрерывны и с непрерывными производными по $y$ на всей плоскости, например, полиномы от $x$ и $y$. Решая относительно $y'$, получим:

$$y' = -P(x, y) \pm \sqrt{R(x, y)}, \tag{85}$$

где мы обозначили: $R(x, y) = [P(x, y)]^2 - Q(x, y)$. В той части плоскости, где $R(x, y) > 0$, уравнение (85) равносильно двум дифференциальным уравнениям, и согласно теореме существования и единственности через всякую точку упомянутой части плоскости проходят две и только две интегральные кривые. Никаких особых решений у дифференциального уравнения (84) в упомянутой части плоскости быть не может. В той части плоскости, где $R(x, y) < 0$, уравнение (85) не дает вещественного $y'$, и никаких интегральных кривых в этой части плоскости нет. Наконец, рассмотрим уравнение

$$R(x, y) = 0, \tag{86}$$

которое может определять одну или несколько кривых на плоскости. Только среди этих кривых и могут находиться особые решения дифференциального уравнения (84). Отметим, что уравнение (86) может быть получено исключением $y'$ из уравнения (84) и уравнения:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, y')}{\partial y'} = 0, \quad \text{т. е.} \quad y' + P(x, y) = 0.$$

Последнее уравнение выражает тот факт, что уравнение (84) имеет кратный относительно $y'$ корень.

1. В случае уравнения

$$y = xy' + y'^2, \quad \text{т. е.} \quad y'^2 + xy' - y = 0$$

формула (86) принимает вид $\frac{x^2}{4} + y = 0$, и парабола $y = -\frac{x^2}{4}$ является особым решением написанного уравнения Клеро.

2. В случае уравнения

$$y'^2 + 2xy' + y = 0$$

формула (86) дает $y = x^2$. Эта парабола не удовлетворяет написанному уравнению, так что последнее вовсе не имеет особых решений.

**12. Изогональные траектории.** *Изогональными траекториями* семейства кривых

$$\psi(x, y, C) = 0 \tag{87}$$

называется семейство кривых, пересекающихся с кривыми заданного семейства под постоянным углом.

Если этот постоянный угол есть прямой угол, то изогональные траектории называются *ортогональными траекториями*. Мы покажем, что нахождение изогональных траекторий приводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

Исключая $C$ из уравнений:

$$\psi(x, y, C) = 0; \quad \frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, y, C)}{\partial y} y' = 0,$$

получим дифференциальное уравнение заданного семейства (87) [7]

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{88}$$

Займемся сначала определением ортогональных траекторий. По условию ортогональности, искомая кривая в точке ее пересечения с какой-либо кривой семейства (87) имеет по сравнению с этой кривой угловой коэффициент касательной, обратный по величине и знаку, и, следовательно, *чтобы получить дифференциальное уравнение*

*ортогональных траекторий, надо в дифференциальном уравнении заданного семейства заменить* $y'$ *на* $\left(-\frac{1}{y'}\right)$.

Таким образом нахождение ортогональных траекторий приводится к интегрированию уравнения:

$$\Phi\left(x,\ y_1,\ -\frac{1}{y_1'}\right)=0,$$

где $y_1$ — искомая функция от $x$.

Обратимся теперь к общей задаче изогональных траекторий, и пусть $\varphi$ — постоянный угол, под которым искомые кривые должны пересекать кривые семейства (87). Обозначая, как и выше, через $y_1$ ординату искомой кривой и принимая во внимание выражение для тангенса разности двух углов

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\psi_1-\psi)=\frac{\operatorname{tg}\psi_1-\operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\psi\operatorname{tg}\psi_1},$$

где $\operatorname{tg}\psi=y'$ есть угловой коэффициент касательной к кривым (87) и $\operatorname{tg}\psi_1=y_1'$ — к искомым кривым, можем написать

$$\frac{y_1'-y'}{1+y'y_1'}=\operatorname{tg}\varphi, \tag{89}$$

где $\varphi$ отсчитывается от кривой (87) к искомой кривой. Исключая $y'$ из последнего уравнения и уравнения (88), получим дифференциальное уравнение изогональных траекторий, которое и надо интегрировать.

Ортогональные траектории встречаются, между прочим, при рассмотрении *плоского течения жидкости*. Положим, что на плоскости происходит течение жидкости, так что в каждой точке плоскости $(x, y)$ определен вектор $\mathbf{v}$ — скорость движения. Если этот вектор скорости зависит только от положения точки на плоскости, но не зависит от времени, то движение называется *стационарным*, или *установившимся*. Такое движение мы и будем только рассматривать. Кроме того, мы допустим, что существует потенциал скорости, иначе говоря, что проекции вектора $\mathbf{v}(x, y)$ на координатные оси суть частные производные $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ некоторой функции $u(x, y)$. Линии семейства

$$u(x, y)=C \tag{90}$$

называются в этом случае *эквипотенциальными линиями*.

Линии, касательные к которым во всех точках совпадают по направлению с вектором $\mathbf{v}(x, y)$, называются *линиями тока* и дают траектории движущихся частиц. Покажем, что эти линии тока суть *ортогональные траектории семейства эквипотенциальных линий*.

Пусть $\varphi$ — угол, образованный вектором скорости $\mathbf{v}(x, y)$ с осью $OX$, и $|\mathbf{v}|$ — длина этого вектора. Величины $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ по условию суть проекции $\mathbf{v}(x, y)$ на координатные оси, т. е.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=|\mathbf{v}|\cdot\cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=|\mathbf{v}|\cdot\sin\varphi,$$

откуда получим выражение углового коэффициента касательной к линии тока

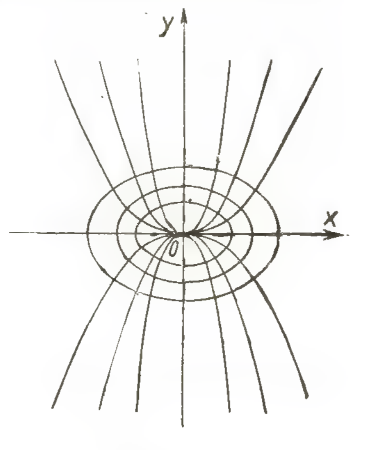
$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \qquad (91)$$

Угловой коэффициент касательной к эквипотенциальным линиям (90) получится дифференцированием уравнения по $x$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} y' = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = -\frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}},$$

т. е. получится угловой коэффициент, обратный по величине и знаку угловому коэффициенту (91), откуда и вытекает, что *эквипотенциальные линии и линии тока взаимно ортогональны.*

Таким образом, если некоторое семейство кривых есть семейство эквипотенциальных линий, то семейство ортогональных траекторий к ним суть семейство соответствующих линий тока, и наоборот. В случае плоского электростатического поля ортогональными траекториями семейства эквипотенциальных линий будут силовые линии этого поля.




Черт. 14.

Пример. Найти изогональные траектории семейства

$$y = Cx^m. \qquad (92)$$

Исключая $C$ из уравнений

$$y = Cx^m; \quad y' = Cmx^{m-1},$$

получим дифференциальное уравнение семейства (92):

$$y' = m\frac{y}{x}.$$

Подставляя это выражение для $y'$ в формулу (89), получим дифференциальное уравнение искомого семейства:

$$\frac{y' - m\dfrac{y}{x}}{1 + m\dfrac{yy'}{x}} = \frac{1}{k},$$

причем постоянную $\operatorname{tg}\varphi$ мы обозначили через $\frac{1}{k}$ и вместо $y_1$ написали просто $y$. Это уравнение приводится к виду:

$$y' = \frac{km\dfrac{y}{x} + 1}{k - m\dfrac{y}{x}} \qquad (93)$$

и, следовательно, есть однородное уравнение [3].

Если $m=1$, то семейство (92) будет семейством лучей, проходящих через начало координат, а искомые кривые должны пересекать их под постоянным углом, т. е. будут логарифмические спирали [I, 83] или окружности.

Если $m=-1$ и $k=0$, задача сводится к нахождению ортогональных траекторий равнобочных гипербол

$$xy = C. \tag{94}$$

Уравнение (93) приводится в этом случае к уравнению с отделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{или} \quad x\,dx - y\,dy = 0.$$

Интегрируя, получим опять семейство равнобочных гипербол, только отнесенных к осям симметрии:

$$x^2 - y^2 = C.$$

Как нетрудно проверить, это семейство получается из данного семейства (94), если повернуть его вокруг начала на 45°. Вообще при $k=0$ уравнение (93) приводится к виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{my},$$

и его общий интеграл будет:

$$my^2 + x^2 = C,$$

т. е. ортогональные траектории семейства (92) при $m > 0$ будут составлять семейство подобных эллипсов, а при $m < 0$ — гипербол. На черт. 14 изображены ортогональные траектории парабол $y = Cx^2$.

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

**13. Общие понятия.** Обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка имеет вид:

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

или в решенном относительно $y^{(n)}$ виде:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Всякая функция $y$ независимой переменной $x$, удовлетворяющая уравнению (1) или (2), называется *решением этого уравнения*, а самая задача нахождения решений дифференциального уравнения называется, иначе, *задачей интегрирования дифференциального уравнения*. В качестве примера рассмотрим прямолинейное движение точки массы $m$ под действием силы $F$, зависящей от времени $t$, положения точки и ее скорости. Приняв прямую, по которой движется точка, за ось $OX$, можем считать, что сила $F$ есть заданная функция от $t$, $x$ и $\frac{dx}{dt}$. По закону Ньютона произведение массы точки на ее ускорение должно быть равно действующей силе. Это дает нам дифференциальное уравнение движения:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^4} = F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right). \tag{3}$$

Интегрирование этого уравнения второго порядка определит зависимость $x$ от $t$, т. е. движение точки под влиянием заданной силы. Чтобы получить определенное решение задачи, мы должны задать еще *начальные условия движения*, а именно положение точки и ее скорость в некоторый начальный момент времени, например, при $t=0$:

$$x\Big|_{t=0}=x_0;\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=x_0'. \tag{4}$$

Для уравнения $n$-го порядка (1) или (2) начальные условия состоят в задании функции $y$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно, при некотором определенном значении $x=x_0$:

$$y\,|_{x=x_0}=y_0;\ y'\,|_{x=x_0}=y_0';\ \ldots;\ \ y^{(n-1)}\,|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \tag{5}$$

В этих условиях $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ суть определенные заданные числа.

При этом для уравнения $n$-го порядка, как и для уравнения первого порядка, имеет место теорема существования и единственности, которую можно формулировать следующим образом: *если функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *есть однозначная функция своих аргументов, непревывная при всех значениях* $x$, *близких к* $x_0$, *и значениях* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *близких к* (5), *и имеющая непрерывные частные производные первого порядка по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, *то начальным условиям* (5) *соответствует одно определенное решение уравнения* (2).

Изменяя в начальных условиях постоянные $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, получим бесчисленное множество решений или, точнее говоря, получим семейство решений, зависящее от $n$ произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные могут входить в решение и не как начальные условия, но в более общей форме:

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{6}$$

*Такое решение уравнения* (2), *содержащее* $n$ *произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения* (2). Уравнение общего интеграла может быть написано и в неявной форме:

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n)=0. \tag{7}$$

Придавая постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные значения) получим *частное решение* уравнения.

Дифференцируя уравнение (6) или (7) $(n-1)$ раз по $x$ и подставляя затем $x=x_0$ и начальные условия (5), получим $n$ уравнений. Предполагается, что эти уравнения разрешимы относительно $C_1$, $C_2, \ldots, C_n$ при любых начальных условиях $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ из некоторого промежутка изменения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Таким

4 Зак. 3251. В Смирнов, т. II

образом, мы получаем решение, удовлетворяющее условиям (5). Если правая часть уравнения (2) есть многозначная функция, то начальным условиям (5) будет соответствовать несколько решений уравнения (7). Всякое решение, которое не заключается в семействе общего интеграла, т. е. не может быть получено из формулы (6) ни при каких значениях постоянных $C_s$, называется особым решением уравнения.

По поводу понятия общего интеграла и особого решения надо иметь в виду замечания, которые мы сделали в [7] применительно к уравнениям первого порядка. Эти понятия должны быть связаны с теоремой существования и единственности.

Если правая часть уравнения (2) разложена в ряд, расположенный по целым положительным степеням разностей:

$$(x-x_0),\ (y-y_0),\ (y'-y'_0),\ \ldots,\ (y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}),$$

при условии, что абсолютные значения этих разностей не превышают некоторого положительного числа, то решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), может быть представлено в виде ряда

$$y_0+\frac{y'_0}{1!}(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\ldots \tag{8}$$

для всех $x$, достаточно близких к $x_0$. При этом само уравнение (2), как и в случае уравнения первого порядка [5], дает вполне определенные значения коэффициентов этого ряда. Действительно, подставляя в уравнение $x=x_0$ и начальные условия (5), определим $y_0^{(n)}$. Дифференцируя затем уравнение (2) по $x$ и подставляя $x=x_0$, начальные значения (5) и $y^{(n)}=y_0^{(n)}$, определим $y_0^{(n+1)}$ и т. д.

Для определения коэффициентов ряда можно поступать и иначе, а именно подставить в обе части уравнения (2) вместо $y$ степенной ряд:

$$y=y_0+\frac{y'_0}{1!}(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+a_n(x-x_0)^n+a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\ldots$$

с неопределенными коэффициентами $a_n$, $a_{n+1}$, ... Располагая правую часть по степеням $(x-x_0)$, сможем определить постепенно упомянутые коэффициенты, приравнивая члены с одинаковыми степенями $(x-x_0)$ в обеих частях полученного тождества [5].

Пример. Рассмотрим движение точки массы $m$ по прямой линии под влиянием упругой силы, стремящейся вернуть точку в положение равновесия и пропорциональной удалению точки от этого положения. Предположим, кроме того, что движение совершается в среде, сопротивление которой выражается суммою двух слагаемых: одного — пропорционального первой степени, а другого — кубу скорости. Обозначая буквою $x$ удаление точки от

положения равновесия, получим дифференциальное уравнение:

$$mx'' = -k_1x - k_2x' - k_3x'^3,$$

где $k_1$, $k_2$, $k_3$ — положительные коэффициенты пропорциональности.

Рассмотрим численный пример:

$$x'' = -x - 0{,}1x' - 0{,}1x'^3 \tag{9}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x|_{t=0} = x_0 = 1; \quad x'|_{t=0} = x'_0 = 1, \tag{10}$$

в виде ряда, расположенного по степеням $t$. Дифференцируем уравнение (9) по $t$:

$$\left.\begin{aligned}
x''' &= -x' - 0{,}1x'' - 0{,}3x'^2x''\\
x^{(IV)} &= -x'' - 0{,}1x''' - 0{,}3(x'^2x''' + 2x'x''^2)\\
x^{(V)} &= -x''' - 0{,}1x^{(IV)} - 0{,}3(6x'x''x''' + x'^2x^{(IV)} + 2x''^3)\\
x^{(VI)} &= -x^{(IV)} - 0{,}1x^{(V)} - 0{,}3(12x''^2x''' + 6x'x'''^2 + 8x'x''x^{(IV)} + x'^2x^{(V)}).
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставляя начальные значения (10) в уравнение (9) и уравнения (11), последовательно вычислим начальные значения производных:

$$x_0 = 1; \quad x'_0 = 1; \quad x''_0 = -1{,}2; \quad x'''_0 = -0{,}52; \quad x_0^{(IV)} = 0{,}544;$$

$$x_0^{(V)} = 0{,}2160; \quad x_0^{(VI)} = 3{,}1453.$$

Пользуясь формулой Тэйлора, получим приближенное выражение $x_1$ искомого решения [1]):

$$x_1 = 1 + t - 0{,}6t^2 - 0{,}0867t^3 + 0{,}0227t^4 + 0{,}0018t^5 + 0{,}0044t^6,$$

$$x'_1 = 1 - 1{,}2t - 0{,}26t^2 + 0{,}907t^3 + 0{,}0090t^4 + 0{,}0262t^5,$$

$$x''_1 = -1{,}2 - 0{,}52t + 0{,}272t^2 + 0{,}036t^3 + 0{,}1311t^4,$$

дающее хорошую точность при $t$, близких к нулю.

**14. Графические способы интегрирования дифференциального уравнения второго порядка.** Всякому решению дифференциального уравнения $n$-го порядка соответствует некоторая кривая, которую мы, как и в случае уравнения первого порядка, будем называть интегральной кривой этого уравнения. Дифференциальному уравнению первого порядка соответствовало поле направлений [5].

---

[1]) Заметим что ряды для $x'_1$ и $x''_1$ мы получаем не дифференцированием ряда для $x_1$, а применяя к $x'_1$ и $x''_1$ формулу Тэйлора:

$$x'_1 = x'_0 + \frac{x''_0}{1}t + \frac{x'''_0}{2!}t^2 + \frac{x_0^{(IV)}}{3!}t^3 + \frac{x_0^{(V)}}{4!}t^4 + \frac{x_0^{(VI)}}{5!}t^5,$$

$$x''_1 = x''_0 + \frac{x'''_0}{1}t + \frac{x_0^{(IV)}}{2!}t^2 + \frac{x_0^{(V)}}{3!}t^3 + \frac{x_0^{(VI)}}{4!}t^4.$$

Выясним теперь геометрический смысл уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{12}$$

Пусть $s$ — длина дуги интегральной кривой и $\alpha$ — угол, образованный положительным направлением касательной с положительным направлением оси $OX$. Мы имеем [I, 70]:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

и, дифференцируя по $x$, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos^3\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{ds};$$

но $\frac{d\alpha}{ds}$ есть, как известно [I, 71], кривизна кривой

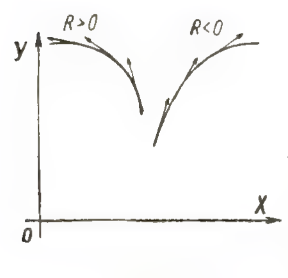
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}, \tag{13}$$

и предыдущее равенство дает:

$$\frac{1}{R} = \cos^3\alpha\cdot\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{14}$$

Мы считаем здесь $R$ положительным, если $\alpha$ возрастает вместе с $s$, и отрицательным, если $\alpha$ убывает при возрастании $s$.

Положим, например, что ось $OX$ направлена вправо и ось $OY$ наверх (черт. 15). При этом, если $R > 0$, то кривая будет при возрастании $s$ закручиваться справа налево (против часовой стрелки), а при $R < 0$ — в противоположную сторону.



Черт. 15.

Согласно формуле (14), дифференциальное уравнение (12) можно переписать так:

$$\frac{1}{R} = f(x, y, \operatorname{tg}\alpha)\cos^3\alpha. \tag{15}$$

Отсюда видно, что *дифференциальное уравнение второго порядка дает величину радиуса кривизны, если заданы положение точки и направление касательной в этой точке.*

Из этого обстоятельства вытекает способ приближения к интегральной кривой уравнения второго порядка при помощи кривой *с непрерывно меняющейся касательной и составленной из дуг окружностей.* Этот способ аналогичен способу приближения к интегральной кривой уравнения первого порядка при помощи ломаной линии [5].

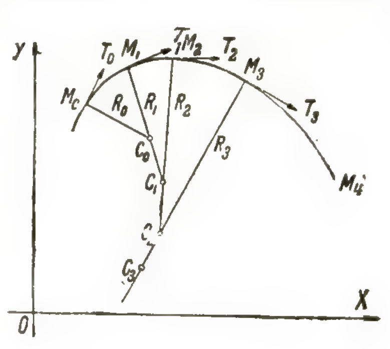
Положим, что начальные условия для искомой интегральной кривой:

$$y\,|_{x=0} = y_0; \quad y'\,|_{x=0} = y_0'.$$

Отмечаем точку $M_0$ с координатами $(x_0, y_0)$ и через эту точку проводим направление $M_0T_0$ с угловым коэффициентом $y' = \operatorname{tg}\alpha = y_0'$ (черт. 16).

Уравнение (15) дает нам соответствующую величину $R = R_0$. Отложим отрезок $M_0C_0$, равный $R_0$ и перпендикулярный к направлению $M_0T_0$, и из точки $C_0$, как центра, опишем небольшую дугу $M_0M_1$ окружности радиуса $R_0$.

Заметим при этом, что направление отрезка $M_0C_0$, в силу сказанного выше, определится знаком $R_0$. Если, например, $R_0 < 0$, то движение по дуге окружности от $M_0$ к $M_1$ должно происходить по часовой стрелке (черт. 16). Пусть $(x_1, y_1)$ — координаты точки $M_1$ и $\operatorname{tg} \alpha_1$ — угловой коэффициент касательной $M_1T_1$ к окружности, проведенной в точке $M$. Уравнение (15) даст соответствующую величину $R = R_1$. Отложим отрезок $M_1C_1$, равный $R_1$ и перпендикулярный к $M_1T_1$, т. е. лежащий на прямой $M_1C_0$, причем направление его определится знаком $R_1$, и из точки $C_1$, как центра, опишем небольшую дугу $M_1M_2$ радиуса $R_1$. Для точки $M_2$ так же, как и для $M_1$, получим из уравнения (15) значение $R = R_2$, отложим отрезок $M_2C_2$, равный $R_2$, и т. д.

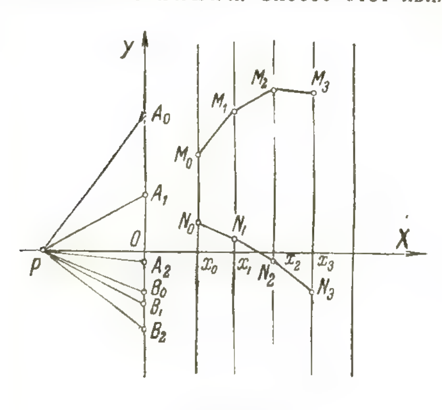


Черт. 16.

Для указанного построения употребляют линейку, в одном конце которой находится отверстие для карандаша. От этого отверстия вдоль линейки идет прямая линия с делениями, по которой отсчитывается величина $R$, и имеется небольшой треножник, одно отверстие которого устанавливается в соответствующей величине $R$ точке прямой, а два других — только на бумаге. Передвигая в точках $M_1$, $M_2$ и т. д. треножник вдоль упомянутой прямой в зависимости от изменения величины $R$, мы не меняем в этих точках направление касательной и получаем таким образом требуемую кривую.

Укажем теперь другой способ графического интегрирования уравнения (12), дающий приближенное представление интегральной кривой в виде *ломаной линии*. Способ этот является обобщением способа, указанного нами на черт. 9. Кроме $y$, введем еще неизвестную функцию $z = y'$. Вместо одного уравнения второго порядка (12) мы получим тогда систему двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями $y$ и $z$:

$$\frac{dy}{dx} = z; \qquad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z). \tag{16}$$



Черт. 17.

Способ, который мы изложим, применим к общему случаю системы двух каких угодно уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y, z);$$

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z). \tag{17}$$

Будем рассматривать $x$ как абсциссу, а $y$ и $z$ как ординаты в одной и той же координатной системе, так что всякому решению системы (17) будут соответствовать две интегральные кривые.

На оси абсцисс отложим отрезок $\overline{OP}$, равный единице и направленный в отрицательную сторону этой оси (черт. 17). Кроме того, на оси ординат придется откладывать значения функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$.

Масштаб для этих величин может быть и отличен от масштаба $x$, $y$ и $z$, и длина отрезка $\overline{OP}$ должна служить единицей масштаба для $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$.

Пусть требуется найти решение системы (17), удовлетворяющее начальным условиям

$$y\,|_{x=x_0} = y_0;$$

$$z\,|_{x=x} = z_0.$$

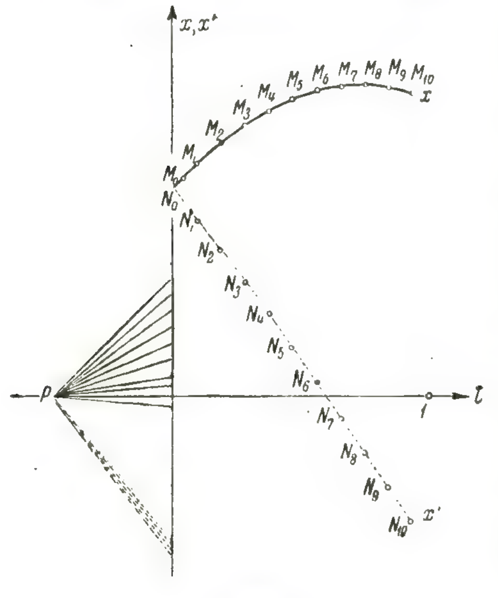
Нанесем на плоскость ряд прямых, параллельных оси $OY$:

$$x = x_0;$$

$$x = x_1.$$

$$x = x_2; \ldots$$

Отметим точки $M_0$ и $N_0$ с координатами $(x_0, y_0)$ и $(x_0, z_0)$. Отложим по оси ординат отрезки $\overline{OA_0}$ и $\overline{AB_0}$, равные $g(x_0, y_0, z_0)$ и $f(x_0, y_0, z_0)$. Направления $\overline{PA_0}$ и $\overline{PB_0}$ будут иметь угловые коэффициенты $g(x_0, y_0, z_0)$ и $f(x_0, y_0, z_0)$ и, следовательно, будут давать направления искомых интегральных кривых в начальных точках $M_0$ и $N_0$.




Черт. 18.

Из этих точек проведем отрезки $\overline{M_0M_1}$ и $\overline{N_0N_1}$, параллельные $\overline{PA_0}$ и $\overline{PB_0}$, до пересечения с прямой $x = x_1$. Пусть $(x_1, y_1)$ и $(x_1, z_1)$ — координаты точек $M_1$ и $N_1$. На оси ординат откладываем отрезки $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_1}$, равные $g(x_1, y_1, z_1)$ и $f(x_1, y_1, z_1)$.

Из точек $M_1$ и $N_1$ проводим отрезки $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{N_1N_2}$, параллельные $\overline{PA_1}$ и $\overline{PB_1}$, до пересечения с прямой $x = x_2$ и т. д. Таким образом получаются две ломаные линии $M_0M_1M_2\ldots$ и $N_0N_1N_2\ldots$, которые и дают приближенное представление искомых интегральных кривых.

В случае системы (16) $g(x, y, z)$ совпадает с ординатой $z$ второй из линий $N_0N_1N_2\ldots$, и построение упрощается. Эта вторая линия дает в этом случае приближенное представление графика первой производной $y'$.

Построение особенно упрощается, если дифференциальное уравнение имеет вид:

$$y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y'),$$

что часто встречается при исследовании колебания материальной системы с одной степенью свободы.

Написанное уравнение равносильно системе:

$$\frac{dy}{dx}=z;$$

$$\frac{dz}{dx}=f_1(x)+f_2(y)+f_3(z).$$

Имея график функций $f_1$, $f_2$ и $f_3$ с одинаковым масштабом ординат, мы сможем определить величину $f(x, y, z)$ простым сложением ординат этих трех кривых при соответственным образом выбранных значениях абсцисс $x$, $y$ и $z$.

Изложенный метод применим и для системы $n$ уравнений первого порядка с $n$ неизвестными функциями. Заметим, что иногда бывает удобнее откладывать отрезок, обозначенный нами через $\overline{OP}$, и значение функций $g(x, y, z)$ и $f(x, y, z)$ не от начала координат $O$, а от некоторой другой точки $O_1$ оси $OY$. Это делается для того, чтобы избежать пересечения отрезков $PA_0$, $PB_0, \ldots$, дающих направление ломаных линий, с самими линиями.

На черт. 18 указано построение решения уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям (10).

**15. Уравнение $y^{(n)}=f(x)$.** Уравнение

$$y^{(n)}=f(x) \tag{18}$$

является непосредственным обобщением уравнения $y'=f(x)$. Выясним сначала формулу общего интеграла уравнения (18). Пусть $y_1(x)$ — какое-либо решение уравнения (18), т. е.

$$y_1^{(n)}(x)=f(x). \tag{19}$$

Введем вместо $y$ новую искомую функцию $z$ по формуле:

$$y=y_1(x)+z. \tag{20}$$

Подставляя в уравнение (18), получим для $z$ уравнение

$$y_1^{(n)}+z^{(n)}=f(x),$$

или в силу тождества (19)

$$z^{(n)}=0.$$

Раз $n$-я производная функция $z$ должна быть равна нулю, то сама функция $z$ есть полином $(n-1)$-й степени с произвольными постоянными коэффициентами

$$z=C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1},$$

и формула (20) дает общий интеграл уравнения (18)

$$y=y_1(x)+C_1+C_2x+\ldots+C_nx^{n-1},$$

т. е. *общий интеграл уравнения* (18) *есть сумма какого-либо частного решения этого уравнения и полинома* $(n-1)$-*й степени с произвольными коэффициентами.*

Нам остается, таким образом, найти какое-либо частное решение уравнения (18). Будем искать то решение, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} y\,|_{x=x_0} &= 0; \\ y'\,|_{x=x_0} &= 0; \\ \ldots y^{(n-1)}\,|_{x=x_0} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (18) почленно от значения $x_0$ до переменного значения $x$, получим:

$$y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

где $y_0^{(n-1)}$ есть значение $y^{(n-1)}$ при $x = x_0$.

В силу последнего из условий (21) $y_0^{(n-1)} = 0$, и мы будем иметь:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Интегрируя правую часть по $x$ еще раз в пределах от $x_0$ до $x$, получим $y^{(n-2)}$ и т. д. и, наконец, после $n$-го интегрирования получим искомую функцию. Это повторное интегрирование обычно записывают так:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{22}$$

Эти $n$ повторных квадратур можно заменить одной, как мы сейчас покажем.

Напишем для $y(x)$ формулу Тэйлора с остаточным членом в виде интеграла [**I, 126**]:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{y_0'}{1!} + (x - x_0)^2\frac{y_0''}{2!} + \ldots +$$
$$+ (x - x_0)^{n-1}\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} y^{(n)}(t)\,dt,$$

где $y_0$, $y_0'$, $y_0''$, ..., $y_0^{(n-1)}$ — значения $y$ и его производных при $x = x_0$, и буква $t$ обозначает просто переменную интегрирования. В силу начальных условий (21)

$$y_0 = y_0' = y_0'' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0,$$

а в силу дифференциального уравнения (18) $y^{(n)}(t)=f(t)$, так что вышеуказанная формула Тэйлора дает

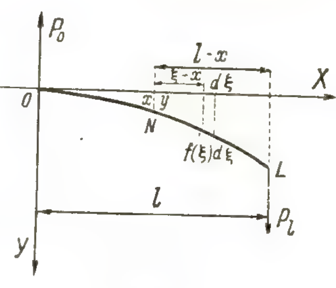
$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_1}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt. \tag{23}$$

Итак, *формула* (23) *дает решение уравнения* (18) *при нулевых начальных условиях* (21) *или, что то же, дает выражение повторного интеграла* (22) *в виде однократного интеграла.*

Прибавляя к решению (23) полином $(n-1)$-й степени с произвольными коэффициентами, получим общий интеграл уравнения (18). Заметим, что в правой части формулы (23) $x$ входит как в верхний предел интеграла, так и под знак интеграла. Интегрирование совершается по $t$, и при этом $x$ считается постоянным. Формула (23) справедлива, очевидно, и при $n=1$, если только считать $0!=1$.

**16. Изгиб балки.** Рассмотрим упругую призматическую балку, изгибающуюся под действием внешних сил, как непрерывно распределенных (вес, нагрузка), так и сосредоточенных.

Направим ось $OX$ по нейтральной оси балки в ее недеформированном состоянии, ось $OY$ — вертикально вниз (черт. 19). Силы, действующие на балку, условимся считать положительными, если они направлены книзу. Выделим сечение $N$ балки с абсциссой $x$.




Черт. 19.

Обозначим через $y$ смещение точки нейтральной оси, через $R$ — радиус кривизны деформированной оси. Как доказывается в теории сопротивления материалов, при некоторых предположениях о характере деформации и о расположении балки относительно осей $OX$, $OY$, для того, чтобы получить уравнение равновесия, нужно отбросить или часть балки налево от $N$, или часть ее направо от $N$, и вычислить *изгибающий момент* $M(x)$, который равен сумме моментов относительно нейтральной линии сечения $N$ всех внешних сил, действующих на отброшенную часть, причем моменты эти считаются положительными при отбрасывании левой части, если они вращают ее обратно часовой стрелке, при отбрасывании же правой части — если вращают по часовой стрелке. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки будет тогда

$$\frac{EI}{R}=M(x), \tag{24}$$

где $E$ — коэффициент упругости, $I$ — момент инерции рассматриваемого поперечного сечения относительно нейтральной линии, лежащей в нем.

Считая, что деформации вообще малы и что ось балки при деформации мало отличается от оси $OX$, мы можем пренебречь квадратом малой величины $y'$ в выражении для $R$ **[I, 71]**

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cong\frac{1}{y''},$$

что при подстановке в уравнение (24) дает

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}. \tag{25}$$

Допустим теперь, что сосредоточенные силы имеются лишь в концах балки и равны соответственно $P_0$ и $P_l$ (в случае черт. 19 $P_0$ есть величина отрицательная); сверх того имеются на концах изгибающие пары, моменты которых мы обозначим через $M_0$ и $M_l$. Непрерывно же распределенную нагрузку, отнесенную к единице длины балки, обозначим $f(x)$.

Вычислим сумму моментов внешних сил, действующих на часть балки $NL$ (черт. 19). Взяв какой-нибудь элемент $d\xi$ с абсциссой $\xi$, мы для нагрузки на этот элемент имеем величину $f(\xi)\,d\xi$, для ее момента относительно $N$:

$$(\xi - x) f(\xi)\,d\xi,$$

а для полного момента всей нагрузки этой части:

$$\int\limits_x^l (\xi - x) f(\xi)\,d\xi.$$

Прибавив момент силы $P_l$, равный $(l-x)P_l$, и пару с моментом $M_l$, получим

$$M(x) = \int\limits_x^l (\xi - x) f(\xi)\,d\xi + (l-x)P_l + M_l. \tag{26}$$

Вычисляя при сделанном выше условии относительно знака сумму моментов всех внешних сил, действующих на часть $ON$ балки, мы получили бы:

$$M(x) = \int\limits_0^x (x - \xi) f(\xi)\,d\xi + xP_0 + M_0. \tag{27}$$

Нетрудно непосредственно проверить, что оба эти выражения между собой равны. В самом деле, равенство

$$\int\limits_x^l (\xi - x) f(\xi)\,d\xi + (l-x)P_l + M_l = \int\limits_0^x (x - \xi) f(\xi)\,d\xi + xP_0 + M_0$$

приводится к следующему:

$$x\left[\int\limits_0^l f(\xi)\,d\xi + P_0 + P_l\right] - \left[\int\limits_0^l \xi f(\xi)\,d\xi + lP_l - M_0 + M_l\right] = 0,$$

но это равенство есть непосредственное следствие равенств:

$$\int\limits_0^l f(\xi)\,d\xi + P_0 + P_l = 0, \tag{28}$$

$$\int\limits_0^l \xi f(\xi)\,d\xi + lP_l + M_l - M_0 = 0, \tag{29}$$

из которых первое выражает равенство нулю суммы всех внешних сил, второе — суммы моментов относительно точки $O$ всех внешних сил, действующих на балку, т. е. просто условие равновесия.

Вспомнив формулы, выражающие повторный интеграл в виде простого [**15**], можем написать, в силу (27),

$$M(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x)\,dx + xP_0 + M_0, \tag{30}$$

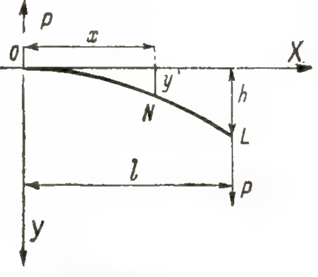
откуда

$$\frac{dM(x)}{dx} = S(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi + P_0, \tag{31}$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = f(x). \tag{32}$$

Величина $S(x)$, равная сумме всех внешних сил, действующих налево от сечения $N$, называется *срезывающим усилием в сечении $N$. Уравнение* (31) показывает, что *срезывающее усилие равно производной от изгибающего момента.*

Уравнение же (32) имеет тот же вид, что и (25), если в этом последнем заменить неизвестную функцию $y$ на $M(x)$, а в правой части $\frac{M(x)}{EI}$ на $f(x)$. Это замечание весьма важно для различных построений графической статики.




Черт. 20.

Примеры. 1. Балка наглухо заделана в конце $O$ и подвергается сосредоточенной вертикальной силе $P$ в конце $L$ (черт. 20); весом балки можно пренебречь. В этом случае мы имеем:

$$f(x) = 0;\quad P_l = P;\quad M_l = 0;\quad M(x) = (l - x)P_l,$$

и уравнение равновесия (25) будет:

$$y'' = \frac{P}{EI}(l - x).$$

На заделанном конце $x = 0$ прогиб должен быть 0, и касательная к изогнутой оси должна совпадать с осью $OX$, т. е. имеем начальные условия:

$$y\,|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad y'\,|_{x=0} = 0,$$

откуда находим [**15**]:

$$y = \int_0^x (x - \xi)\frac{P}{EI}(l - \xi)\,d\xi = \frac{P}{2EI}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

Прогиб конца балки $L$ дается формулой

$$h = y\,|_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Опорные реакции будут действовать лишь на конце $O$. Принимая во внимание, что в данном случае непрерывная нагрузка отсутствует и что $M_l = 0$, из равенств (28) и (29) будем иметь $R_0 = P_0 = -P$ (сила реакции); $M_0 = lP_l$ (пара реакции).

**2.** Определить кривую изгиба бруска, опирающегося на две опоры $A$ и $B$ (черт. 21) и подверженного напору воды, уровень которой приходится против верхней опоры (плотина). Силы, действующие здесь на брусок, сводятся: 1) к непрерывно распределенному напору воды и 2) к силам реакции в опорах.

Черт. 21.

Пусть $b$ есть ширина бруска и $\rho$ — вес кубической единицы воды. Выделив площадку бруска длиною $dx$, на глубине $x$ под уровнем воды, для напора воды на эту площадку получим вес столба воды, основание которого равно основанию площадки, а высота — глубине ее погружения, т. е.

$$\rho \cdot b \cdot dx \cdot x = kx\,dx \qquad (k = \rho b)$$

Итак, в этом случае $f(x) = -kx$.

Данная задача приводится поэтому к исследованию изгиба балки, лежащей на опорах, под действием непрерывно распределенной нагрузки $f(x) = -kx$.

Вычислим прежде всего силы реакции опор $P_0$ и $P_l$. Вся нагрузка будет

$$P = \int_0^l k\xi\,d\xi = \frac{kl^2}{2}.$$

Элементарная нагрузка $k\xi\,d\xi$ дает, согласно обычному правилу рычага, в опорах $O$ и $L$ реакции:

$$\frac{k\xi\,(l-\xi)}{l}\,d\xi \quad \text{и} \quad \frac{k\xi^2}{l}\,d\xi,$$

откуда очевидно

$$P_0 = \int_0^l \frac{k\xi\,(l-\xi)}{l}\,d\xi = \frac{kl^2}{6} = \frac{1}{3}P, \quad P_l = P - P_0 = \frac{2}{3}P.$$

По формуле (26) имеем далее:

$$M(x) = -\int_x^l (\xi - x)\,k\xi\,d\xi + (l-x)\,P_l =$$

$$= -k\int_x^l (\xi - x)\,\xi\,d\xi + \frac{2}{3}P\,(l-x) = -\frac{k}{6}(x^3 - l^2x).$$

Дифференциальное уравнение изгиба (25) будет тогда

$$y'' = \frac{-k}{6EI}(x^3 - l^2x), \tag{33}$$

при очевидных условиях:

$$y\,|_{x=0} = 0; \qquad y\,|_{x=l} = 0. \tag{34}$$

Общее решение будет

$$y = \frac{-k}{6EI}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{l^2x^3}{6} + C_1x + C_2\right).$$

Постоянные $C_1$ и $C_2$ определятся из условий (34):

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{7}{60} l^4,$$

откуда окончательно:

$$y = \frac{-k}{360EI}(3x^5 - 10l^2x^3 + 7l^4x).$$

Для отыскания точки наибольшего прогиба и стрелы прогиба полагаем $x = lt$ и переписываем предыдущее выражение для $y$ в виде:

$$y = \frac{-kl^5}{360EI}(3t^5 - 10t^3 + 7t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Внутри промежутка (0, 1) производная от полинома в круглых скобках:

$$15t^4 - 30t^2 + 7$$

имеет только один корень:

$$t_0 = \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{2}{15}}} \approx 0{,}519\ldots,$$

который соответствует максимуму для $|y|$.

Таким образом, наибольший прогиб будет не в середине, а ближе к концу $L$. Стрелка прогиба будет

$$h = y\,|_{x=lt_0} = \frac{-kl^5}{360EI}(3t_0^5 - 10t_0^3 + 7t_0) \approx \frac{-kl^5}{360EI} \cdot 2{,}348 = \frac{-Pl^3}{180EI}\, 2{,}348.$$

**17. Понижение порядка дифференциального уравнения.** Укажем еще несколько частных случаев, когда порядок уравнения может быть понижен.

1. Положим, что уравнение не содержит функции $y$ и ее нескольких последовательных производных $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, т. е. имеет вид

$$\Phi(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Вводя новую функцию $z = y^{(k)}$, понизим порядок уравнения на $k$ единиц:

$$\Phi(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Если найдем общий интеграл этого последнего уравнения:

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

то $y$ определится из уравнения

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

рассмотренного нами в **[15]**.

2. Если уравнение не содержит независимой переменной $x$, т. е. имеет вид:

$$\Phi(y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0,$$

то примем $y$ за независимую переменную и введем новую функцию $p = y'$.

Считая, что $p$ есть функция от $y$ и через посредство $y$ зависит от $x$, и применяя правило дифференцирования сложных функций, получим для производных от $y$ по $x$ выражения:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$
$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} p\right) p = \frac{d^2p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

откуда видно, что в новых переменных порядок уравнения будет $(n-1)$.

Если это преобразованное уравнение проинтегрировано:

$$p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}),$$

то нахождение общего интеграла данного уравнения приводится к квадратуре:

$$dy = p\,dx = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx,$$

откуда

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

Одна из произвольных постоянных $C_n$ входит в качестве слагаемого к $x$, а это равносильно тому, что всякую интегральную кривую можно перемещать параллельно оси $OX$.

3. Если левая часть уравнения

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

есть однородная функция [I, **154**] аргументов $y, y', \ldots, y^{(n)}$, то вводя вместо $y$ новую функцию $u(x)$ по формуле

$$y = e^{\int u\,dx},$$

получим для $u$ уравнение $(n-1)$ порядка. Это следует из следующих очевидных формул:

$$y' = e^{\int u\,dx} u; \quad y'' = e^{\int u\,dx}(u' + u^2); \ \ldots$$

и из того, что после подстановки в левую часть уравнения вынесется некоторая степень написанной показательной функции (в силу условия однородности), и на этот множитель можно разделить обе части уравнения. Аддитивная постоянная в интеграле, стоящем в показателе степени у $e$, будет произвольным множителем в $y$.

Примеры. **1.** Уравнение вида

$$y'' = f(y) \tag{35}$$

относится к случаю 2. Его можно проинтегрировать и непосредственно. Умножим обе его части на $2y'\,dx = 2dy$:

$$2y'y''\,dx = 2f(y)\,dy.$$

Слева стоит, очевидно, дифференциал от $y'^2$ и, интегрируя, получим:

$$y'^2 = \int_{y_0}^{y} 2f(y)\,dy + C_1 = f_1(y) + C_1, \text{ откуда } \frac{dy}{dx} = \sqrt{f_1(y) + C_1}; \quad (36)$$

отделяя переменные и интегрируя, получим:

$$x + C_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f_1(y) + C_1}}. \quad (37)$$

Если имеются начальные условия

$$y\,|_{x=x_0} = y_0; \qquad y'\,|_{x=x_0} = y'_0,$$

то, подставляя в (36) и (37) $x = x_0$, $y = y_0$ и $y' = y'_0$, получим:

$$C_1 = y_0'^2; \qquad C_2 = -x_0,$$

и искомое решение будет

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\int_{y_0}^{y} 2f(y)\,dy + y_0'^2}}.$$

Положим, что точка движется по оси $OX$ под действием силы $F(x)$, зависящей только от положения точки. Дифференциальное уравнение движения будет [**13**]:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x).$$

Пусть $x_0$ и $v_0$ — начальная абсцисса и начальная скорость точки при $t = 0$

$$x\Big|_{t=0} = x_0; \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0.$$

Умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{dt}\,dt$ и интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \text{ или } \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (38)$$

Первое слагаемое в левой части $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ представляет собой кинетическую энергию, а второе слагаемое $\left[-\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx\right]$ — потенциальную энергию движущейся точки, и из (38) следует, что сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной во все время движения. Решая равенство (38) относительно $dt$ и интегрируя, получим зависимость между $t$ и $x$.

**2.** Если при изгибе балки этот изгиб настолько велик, что нельзя заменить кривизну второй производной $y''$ [**16**], то, вместо приближенного

уравнения (25), мы должны рассматривать точное уравнение (24). Таким образом мы приходим к следующей задаче: найти кривую, кривизна которой есть заданная функция абсциссы

$$\frac{1}{R}=\varphi(x). \tag{39}$$

Это уравнение есть дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

Вводя $p=y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с отделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}=\varphi(x)\,dx,$$

и, интегрируя, будем иметь:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1,$$

откуда

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1}{\sqrt{1-\left[\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+C_1\right]^2}}=\psi(x), \tag{40}$$

и окончательно:

$$y=\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+C_2.$$

В случае, если балка наглухо заделана в конце $x=0$ и подвергается сосредоточенной нагрузке в другом конце $x=l$, мы имеем [16]:

$$M(x)=(l-x)P;\quad \varphi(x)=\frac{(l-x)P}{EI}=2k(l-x)\quad\left(k=\frac{P}{2EI}\right).$$

Уравнение будет

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=2k(l-x),$$

и начальные условия:

$$y|_{x=0}=0;\quad y'|_{x=0}=0.$$

Полагая в формуле (40) $x_0=0$, мы должны будем, в силу второго из начальных условий, считать $C_1=0$ и получим в рассматриваемом случае:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\int\limits_{0}^{x}2k(l-x)\,dx}{\sqrt{1-\left[\int\limits_{0}^{x}2k(l-x)\,dx\right]^2}}=k\frac{l^2-(l-x)^2}{\sqrt{1-k^2[l^2-(l-x)^2]^2}}=$$

$$=k\frac{x(2l-x)}{\sqrt{1-k^2x^2(2l-x)^2}}.$$

Интегрируя еще раз и пользуясь условием $y|_{x=0} = 0$, найдем $y$:

$$y = k\int_0^x \frac{x(2l-x)}{\sqrt{1-k^2x^2(2l-x)^2}}\,dx. \tag{41}$$

Написанный интеграл не выражается через элементарные функции. Кривая, соответствующая уравнению (41), называется *упругой кривой*.

**3.** Рассмотрим уравнение:

$$x^2yy'' = (y - xy')^2,$$

обе части которого однородные функции $y$, $y'$, $y''$. Вводя подстановку

$$y = e^{\int u\,dx},$$

получим

$$x^2(u' + u^2) = (1 - xu)^2,$$

откуда для $u$ получаем линейное уравнение:

$$u' + \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2} = 0,$$

интегрирование которого дает:

$$u = x^{-2}(C_1 + x) = C_1x^{-2} + x^{-1}.$$

Подставляем в выражение $y$ через $u$:

$$y = e^{-C_1x^{-1} + \lg x + C}$$

или

$$y = C_2xe^{C_1x^{-1}},$$

причем $(-C_1)$ мы заменили на $C_1$ и положили $e^C = C_2$.

**18. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Система $n$ уравнений первого порядка с $n$ неизвестными функциями в разрешенном относительно производных виде будет:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Как и в случае одного уравнения, имеет место теорема существования и единственности: *если функции*

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

*суть однозначные функции своих аргументов, непрерывные при всех значениях* $x$, $y_i$, *близких к* $x_0$, $y_i^{(0)}$, *и имеющие непрерывные*

*частные производные первого порядка по* $y_i$, *то существует одно и только одно решение системы* (42),

$$y_i = \omega_i(x),$$

*удовлетворяющее начальным условиям*

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^{(0)}; \quad y_2|_{x=x_0} = y_2^{(0)}; \quad \ldots; \quad y_n|_{x=x_0} = y_n^{(0)}. \qquad (43)$$

Мы можем изменять в начальных условиях значения $y_i^{(0)}$, так что общее решение системы (42) содержит $n$ произвольных постоянных. Эти произвольные постсянные могут входить в решение не как начальные значения $y_i^{(0)}$, но и в общей форме:

$$y_i = \psi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (44)$$

Придавая постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определенные численные значения, будем получать частные решения системы (42). Чтобы из этого семейства выделить то решение, которое удовлетворяет условиям (43), надо определить произвольные постоянные из уравнений

$$y_i^{(0)} = \psi_i(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (44_1)$$

и подставить найденные значения в формулы (44).

Решая равенства (44) относительно произвольных постоянных, получим формулы, которые дают *общее решение системы* в виде:

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (45)$$

причем существенным является обстоятельство, чтобы эти уравнения были разрешимы относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Каждое из равенств (45) называется интегралом системы (42), и, следовательно, для составления общего решения системы (42) надо найти $n$ таких интегралов системы, чтобы равенства (45) были разрешимы относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Мы можем переписать систему (42) в виде пропорционального ряда

$$dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}. \qquad (46)$$

Умножая все знаменатели на один и тот же множитель, мы получим и в первом отношении знаменатель не единицу, а некоторую функцию переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Обозначая для симметрии эти переменные буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, перепишем систему дифференциальных уравнений (42) в виде

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}, \qquad (47)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ суть заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Запись системы (42) в виде (47) удобна для дальнейших рассуждений в силу своей симметричности. В частности, если система написана в виде (47), то не фиксировано, какая именно из $(n+1)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ считается независимой переменной. Интегралы системы (45) в новых обозначениях будут:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

При подсчете числа произвольных постоянных в решении (44) существенно, чтобы невозможно было свести число произвольных постоянных к меньшему числу. Например, в формулах

$$y_1 = (C_1 + C_2)x + C_3; \quad y_2 = C_3 x^2; \quad y_3 = x^2 + C_3 x + C_1 + C_2$$

три произвольных постоянных можно свести к двум, полагая $C_1 + C_2 = C$. Критерий того, что этого сделать нельзя и что формулы (44) дают общий интеграл системы, заключается в том, что соответствующим подбором произвольных постоянных мы можем удовлетворить любым начальным условиям, т. е. что система $(44_1)$ разрешима относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ при любом выборе начальных значений $y_i^{(0)}$ искомых функций. Мы считаем при этом, что правые части уравнений (42) удовлетворяют указанным выше условиям.

Обратимся теперь к более подробному рассмотрению интегралов системы. Пусть мы имеем $k$ интегралов системы (47)

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{49}$$

Иногда интегралом системы называют не равенства (49), а сами функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, т. е. *функция* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ *называется интегралом системы, если при подстановке в нее любого решения системы эта функция обращается в постоянную.* При этом считается, конечно, что $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ не есть постоянная. Поскольку начальные условия у решения — какие угодно, значения этой постоянной могут быть какими угодно (произвольная постоянная). Если мы составим произвольную функцию от левых частей равенств (49) $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$, то при подстановке любого решения системы, все функции $\varphi_i$, а потому и новая функция, обратятся в постоянную, т. е. наряду с интегралами (49) мы имеем интеграл системы:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) = C, \tag{50}$$

где $F$ — произвольная функция своих аргументов. Иначе говоря: *произвольная функция каких-либо интегралов системы есть также интеграл системы.* Полученный интеграл (50) является следствием интегралов (49) и не дает ничего нового.

Положим, что мы имеем $n$ интегралов (48) системы (47). Они называются *независимыми*, если равенства (48) можно решить относительно каких-нибудь $n$ из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Такое решение дает нам $n$ функций одной независимой переменной, т. е. формулы, аналогичные формулам (44), причем в виде (48) эти формулы разрешены относительно произвольных постоянных, т. е. $n$ независимых интегралов (48) системы равносильны общему интегралу системы. Можно показать, что указанное выше условие независимости интегралов (48) равносильно тому, что ни один из интегралов (48) не есть следствие остальных в указанном выше смысле, или что между левыми частями равенств (48) не существует никакого соотношения вида

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0,$$

тождественного относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

В предыдущем мы не дали никакого признака, по которому можно было бы судить, что интегралы (48) суть независимые интегралы. Рассмотрим случай $n = 2$:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = C_1; \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = C_2. \tag{51}$$

Вспоминая теорему о неявных функциях [I, 159], можем утверждать, что для разрешимости уравнений (51) относительно $x_2$ и $x_3$ достаточно, чтобы выражение

$$\Delta_{x_2, x_3}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}.$$

было отлично от нуля. Аналогичный результат будет иметь место относительно переменных $x_3$, $x_1$ и $x_1$, $x_2$. Предполагая $\varphi_1$ и $\varphi_2$ непрерывными с их производными первого порядка, можно доказать, что необходимое и достаточное условие независимости интегралов (51) сводится к тому, чтобы по крайней мере одно из выражений:

$$\Delta_{x_2, x_3}(\varphi_1, \varphi_2), \quad \Delta_{x_3, x_1}(\varphi_1, \varphi_2), \quad \Delta_{x_1, x_2}(\varphi_1, \varphi_2)$$

было не равно тождественно нулю. В третьем томе мы вернемся к вопросу о независимости систем функций с любым числом переменных.

**19. Примеры. 1.** Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}. \tag{52}$$

Сокращая уравнение

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

на $\frac{1}{z}$, получим уравнение с отделенными переменными и, интегрируя, будем иметь:

$$\lg x = \lg y - C, \quad \text{т. е.} \quad \lg \frac{y}{x} = C,$$

что равносильно

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Напишем второе уравнение системы

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(x^2+y^2)}$$

и, пользуясь уже найденным интегралом, заменим в нем $y = C_1 x$. Сокращая на $\frac{1}{x}$, получим:

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-(1+C_1^2)\,x}, \quad \text{т. е.} \quad (1+C_1^2)\,x\,dx + z\,dz = 0.$$

Интегрируя, имеем

$$(1+C_1^2)\,x^2 + z^2 = C_2$$

или, заменяя $C_1 = \frac{y}{x}$, получим второй интеграл системы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Итак, мы имеем два интеграла системы

$$\frac{y}{x} = C_1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{53}$$

**2.** Система дифференциальных уравнений движения материальной точки массы $m$ под влиянием заданной силы имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{54}$$

где $X, Y, Z$ — проекции силы на координатные оси зависят от времени, положения точки и ее скорости, т. е. от переменных $t, x, y, z, x', y', z'$.

Вводя новые неизвестные функции — производные $x', y', z'$ от $x, y$ и $z$ по $t$, приведем систему (54) к системе шести уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x'; \quad \frac{dy}{dt} = y'; \quad \frac{dz}{dt} = z'; \quad m\frac{dx'}{dt} = X; \quad m\frac{dy'}{dt} = Y; \quad m\frac{dz'}{dt} = Z.$$

Общее решение этой системы содержит шесть произвольных постоянных, для определения которых должны быть заданы положение точки и ее скорость в начальный момент времени.

Из равенств (54) вытекают следующие три равенства:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = yZ - zY$$

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = zX - xZ$$

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = xY - yX,$$

которые, как нетрудно видеть, можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= yZ - zY \\ \frac{d}{dt}\,m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= zX - xZ \\ \frac{d}{dt}\,m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= xY - yX. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Положим, что сила центральна, т. е. что ее направление всегда проходит через некоторую неподвижную точку, называемую центром, которую мы принимаем за начало координат. Так как проекции вектора пропорциональны его направляющим косинусам, и в данном случае направление вектора проходит через начало координат и точку $(x, y, z)$, то будем иметь:

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z};$$

правые части равенства (55) обратятся в нуль, и мы получим три интеграла системы (54):

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C_1;\quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=C_2;\quad m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C_3. \quad (56)$$

Они выражают, как известно из механики, постоянство секториальной скорости проекций движущейся точки на координатные плоскости.

Из равенств (56) вытекает:

$$C_1x+C_2y+C_3z=0,$$

откуда видно, что траектория будет плоской кривой. Плоскость траектории определяется очевидно центром сил и вектором скорости в начальный момент времени.

Положим теперь, что $X, Y, Z$ суть частные производные некоторой функции $U$, зависящей от $x, y, z$. Эта функция $U$ называется потенциалом сил, а $(-U)$ — потенциальной энергией точки:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Умножая уравнения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x};\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y};\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

на $dx/dt$, $dy/dt$, $dz/dt$ и складывая, получим:

$$m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{dU}{dt},$$

или

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{dU}{dt},$$

откуда получаем интеграл

$$T-U=C, \quad (57)$$

где

$$T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}mv^2$$

есть *кинетическая энергия точки.*

Равенство (57) выражает постоянство суммы кинетической энергии $T$ и потенциальной $(-U)$ во все время движения.

**3.** Представим себе систему $n$ точек, связанных между собою такими связями, что координаты любой точки системы определяются как функции независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$ и времени $t$:

$$x_i=\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t);\quad y_i=\psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t);\quad z_i=\omega_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) \quad (58)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Положим, что силы, действующие на точки системы, имеют потенциал $U$, зависящий только от координат точек, так что проекции на координатные оси $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ силы, действующей на $i$-ю точку, суть частные производные $U$ по $x_i$, $y_i$, $z_i$. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — массы наших точек. При помощи равенств (58) мы можем выразить кинетическую энергию:

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right],$$

и функцию $U$ — через параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$, и движение системы будет определяться, как известно из механики, следующими уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}\qquad (s=1, 2, \ldots, k) \tag{59}$$

Функция $T$ есть, очевидно, полином второй степени относительно производных $q_1', q_2', \ldots, q_k'$ от параметров по времени, и уравнения (59) представляют собою $k$ уравнений второго порядка, что равносильно $2k$ уравнениям первого порядка; интегрирование уравнений (59) даст выражения $q_k$ в виде функций от $t$ и $2k$ произвольных постоянных.

Положим, что уравнения (58) не содержат $t$. Тогда $T$ и $U$ также не будут содержать $t$. Умножим уравнения (59) соответственно на $q_1', q_2', \ldots, q_k'$ и сложим:

$$\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)-\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{dU}{dt}. \tag{60}$$

Примем во внимание очевидное равенство:

$$\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)-\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s'}-\sum_{s=1}^{k}q_s''\frac{\partial T}{\partial q_s'}-\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

В рассматриваемом случае $T$ — однородный полином $q_s'$ и

$$\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s'}=2T$$

в силу теоремы Эйлера об однородных функциях [**I, 154**]. Отсюда

$$\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right)-\sum_{s=1}^{k}q_s'\frac{\partial T}{\partial q_s}=2\frac{dT}{dt}-\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dt},$$

и формула (60) дает:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dU}{dt},$$

откуда получается интеграл системы (59) (*интеграл живых сил*):

$$T-U=C.$$

**4.** Наличие интеграла дифференциальных уравнений движения системы позволяет в некоторых случаях решить вопрос об устойчивости малых

колебаний системы около положения равновесия. Формулируем вопрос математически, ограничиваясь для краткости рассуждений случаем трех неизвестных функций $x$, $y$, $z$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений [1]):

$$\frac{dx}{dt} = X; \quad \frac{dy}{dt} = Y; \quad \frac{dz}{dt} = Z, \tag{61}$$

где $X$, $Y$, $Z$ — известные функции от $x$, $y$, $z$ и $t$, обращающиеся в нуль при

$$x = y = z = 0. \tag{62}$$

Система (61) имеет при этом очевидное решение (62), которому соответствует положение равновесия. Это положение равновесия (или просто решение [62]) называется устойчивым, если при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое $\eta$, что для всякого решения системы (61), удовлетворяющего начальным условиям:

$$x\,|_{t=0} = x_0; \quad y\,|_{t=0} = y_0; \quad z\,|_{t=0} = z_0,$$

будет при всех $t > 0$

$$|x|, \quad |y| \quad \text{и} \quad |z| < \varepsilon, \tag{63}$$

если только

$$|x_0|, \quad |y_0| \quad \text{и} \quad |z_0| < \eta. \tag{64}$$

Положим, что система (61) имеет интеграл

$$\varphi(x, y, z) = C, \tag{65}$$

не содержащий $t$ и такой, что *функция* $\varphi(x, y, z)$ *имеет при* $x = y = z = 0$ ***максимум или минимум.*** Докажем, что при этом положение равновесия будет устойчивым. Изменяя, если надо, знак у $\varphi$, мы можем считать, что $\varphi$ имеет минимум; прибавляя к $\varphi$ постоянную, можем считать, что этот минимум равен нулю.

Итак, функция $\varphi$ обращается в нуль в точке $x = y = z = 0$ и положительна во всех точках $(x, y, z)$, близких к $(0, 0, 0)$, но отличных от нее. Построим около начала координат куб $\delta_\varepsilon$ с центром в начале и длиной сторон $2\varepsilon$. На поверхности этого куба непрерывная функция $\varphi$ положительна и, следовательно, достигает своего наименьшего положительного значения $m$, так что на всей этой поверхности

$$\varphi \geqslant m > 0. \tag{66}$$

Построим теперь около начала координат концентрический куб $\delta_\eta$ с длиной сторон $2\eta$ так, чтобы внутри этого куба имело место неравенство

$$\varphi < m, \tag{67}$$

что возможно, ибо $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Положим, что в начальный момент точка $(x, y, z)$ находится внутри куба $\delta_\eta$, т. е. выполнено условие (64). Неравенство (67) будет выполняться не только в начальный момент, но и во всё время движения. Действительно, $\varphi$, в силу (65), сохраняет постоянное значение $C$ при движении. Но раз это так, то во все время движения точка $(x, y, z)$ не сможет пройти через поверхность куба $\delta_\varepsilon$, ибо на этой поверхности должно иметь место неравенство (66), которое противоречит (67); итак, условие (63) выполняется при всех $t > 0$, что и требовалось доказать.

Функции $x$, $y$, $z$ могут иметь любое геометрическое или механическое значение, и лишь для наглядности доказательства мы рассматривали их как

---

[1]) В случае движения одной материальной точки имеется шесть неизвестных функций.

координаты точки. Положим, например, что в уравнениях (59) $T$ и $U$ не содержат времени $t$, так что имеет место интеграл живых сил. Пусть при значениях $q_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0.$$

Уравнения (59) имеют при этом очевидное решение:

$$q_s = q'_s = 0, \tag{68}$$

которому соответствует положение равновесия системы. Если, кроме того, окажется, что при значениях $q_s = 0$ потенциальная энергия $(-U)$ имеет минимум, то можно утверждать, что разность $(T - U)$ при значениях (68) также имеет минимум, ибо при этом $T$, которое не может быть отрицательным, обратится в нуль, т. е. тоже имеет минимум. Таким образом мы видим, что в случае минимума потенциальной энергии соответствующее положение равновесия будет устойчивым в отношении величин $q_s$ и $q'_s$ (теорема Лагранжа — Дирихле).

**20. Системы уравнений и уравнения высших порядков.** Выясним связь между системой дифференциальных уравнений первого порядка и одним уравнением высшего порядка. Если мы имеем, например, одно дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$y''' = f(x, y, y', y''),$$

то, полагая $y = y_1$; $y' = y_2$; $y'' = y_3$, мы можем заменить это уравнение третьего порядка системой трех уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3; \quad \frac{dy_3}{dx} = f(x, y_1, y_2, y_3).$$

Мы производили уже подобную замену в [**14**]. Совершенно так же, имея, например, систему двух уравнений второго порядка:

$$y'' = f_1(x, y, y', z, z'); \quad z'' = f_2(x, y, y', z, z'),$$

где $y$ и $z$ — искомые функции от $x$, мы можем заменить ее системой четырех уравнений первого порядка. Для этого введем четыре искомые функции: $y = y_1$; $y' = y_2$; $z = y_3$; $z' = y_4$.

Прежняя система перепишется в виде:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4);$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_4; \quad \frac{dy_4}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Покажем, что, наоборот, интегрирование системы, вообще говоря, можно привести к интегрированию одного уравнения высшего порядка. Рассмотрим только случай системы трех уравнений первого порядка, решенной относительно производных

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, y_3); \quad y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, y_3); \quad y'_3 = f_3(x, y_1, y_2, y_3). \tag{69}$$

Положим, что первое из уравнений содержит $y_2$. Решая относительно него, получим:

$$y_2 = \omega_1(x,\ y_1,\ y_1',\ y_3). \tag{70}$$

Подставляя в остальные два уравнения системы, будем иметь уравнения вида:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial\omega_1}{\partial y_3}y_3' + \frac{\partial\omega_1}{\partial y_1'}y_1'' = \psi_2(x,\ y_1,\ y_1',\ y_3);$$

$$y_3' = \psi_3(x,\ y_1,\ y_1',\ y_3).$$

Подставляя в первое уравнение выражение $y_3'$ из второго и решая первое уравнение относительно $y_1''$, получим систему двух уравнений с двумя искомыми функциями $y_1$ и $y_3$ вида:

$$y_1'' = \varphi(x,\ y_1,\ y_1',\ y_3); \quad y_3' = \psi(x,\ y_1,\ y_1',\ y_3). \tag{71}$$

Положим, что первое из уравнений содержит $y_3$. Решая относительно него

$$y_3 = \omega_3(x,\ y_1,\ y_1',\ y_1'') \tag{72}$$

и подставляя во второе из уравнений (71), получим уравнение третьего порядка относительно $y_1$, которое можем написать в виде:

$$y_1''' = F(x,\ y_1, y_1',\ y_1''). \tag{73}$$

Положим, что мы сумели проинтегрировать это уравнение:

$$y_1 = \Phi(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3).$$

Подставляя в уравнение (72), получим $y_3$ и, подставляя затем в (70), получим $y_2$ уже без всяких интегрирований. Если первое из уравнений (71) не содержит $y_3$, то мы имеем уже одно уравнение второго порядка для $y_1$. Его общий интеграл будет содержать две произвольные постоянные. Подставляя этот общий интеграл во второе из уравнений (71), получим уравнение первого порядка для $y_3$. Его интегрирование введет третью произвольную постоянную. Наконец, формула (70) определит $y_2$ уже без всяких интегрирований.

**21. Линейные уравнения с частными производными.** До сих пор мы рассматривали дифференциальные уравнения, содержащие производные от функций по одной независимой переменной. Такие уравнения, как мы уже упоминали, называются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Теперь мы рассмотрим некоторый класс уравнений с частными производными, поскольку эти уравнения непосредственно связаны с теорией систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вернемся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений (47)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}}. \tag{74}$$

Равенство

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$$

или функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, не сводящаяся тождественно к постоянной, называется интегралом системы (74), если при подстановке в нее какого-либо решения системы, которое имеется согласно теореме существования и единственности, получается постоянная.

Пусть, например, $x_1$ — независимая переменная, а $x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ — функции от $x_1$, являющиеся решением системы (74). Подставляя эти функции в выражение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, мы должны получить постоянную, т. е. в результате подстановки независимая переменная $x_1$ должна исчезнуть и, следовательно, полная производная по $x_1$ должна равняться нулю [I, 69]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\frac{dx_{n+1}}{dx_1} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} = 0. \tag{75}$$

Но раз мы подставляли решение системы (74), то дифференциалы $dx_s$ должны быть пропорциональны величинам $X_s$ и, заменяя в формуле (75) $dx_s$ пропорциональными величинами $X_s$, получим для $\varphi$ следующее уравнение:

$$X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}} = 0. \tag{76}$$

Функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ должна удовлетворять этому уравнению независимо от того, какое именно решение системы (74) мы подставляли в эту функцию. Но в силу произвольности начальных условий в теореме существования и единственности значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, могут быть какие угодно, если мы берем все решения системы (74), т. е. функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ должна удовлетворять уравнению (76) тождественно относительно $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Мы получаем таким образом следующую теорему.

Теорема. *Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ есть интеграл системы* (74), *то функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ должна удовлетворять уравнению с частными производными* (76).

Нетрудно доказать обратное предложение.

Теорема. *Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ есть какое-нибудь решение уравнения* (76), *то $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ есть интеграл системы* (74).

Действительно, подставим в функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ какое-нибудь решение системы (74) и возьмем полный дифференциал

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1}.$$

Поскольку мы подставили решение системы, мы можем, в силу (74), заменить $dx_s$ пропорциональными величинами $X_s$, т. е. $dx_s = \lambda X_s$, где $\lambda$ — некоторый коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \lambda\left(X_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + X_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\right).$$

Но поскольку $\varphi$, по условию теоремы, удовлетворяет уравнению (76) тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, мы имеем $d\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$. Выражение дифференциала первого порядка не зависит от того, являются ли переменные независимыми или нет [I, **153**]. В нашем случае, при подстановке решения системы, $\varphi$ будет функцией одной независимой переменной, например $x_1$, и оказалось, что дифференциал этой функции $\varphi$ равен нулю, т. е. производная по $x_1$ (после подстановки) тождественно равна нулю, иначе говоря, после подстановки $\varphi$ не зависит от $x_1$, т. е. является постоянной. Это и показывает, что $\varphi\ (x_1, x_2 \ldots, x_{n+1})$ есть интеграл системы, что и требовалось доказать.

Доказанные две теоремы устанавливают эквивалентность понятия интеграла системы (74) и решения уравнения в частных производных (76). Если

$$\varphi_1 = C_1; \quad \varphi_2 = C_2; \ldots; \varphi_k = C_k$$

суть $k$ интегралов системы, то, как мы видели, произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ дает также интеграл системы, и мы можем, следовательно, сказать, *что произвольная функция каких-либо решений уравнения* (76) *есть также решение этого уравнения.* Если

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_1; \ldots; \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C_n \qquad (77)$$

есть $n$ независимых интегралов системы (74), то произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ есть решение уравнения (76).

Это можно непосредственно проверить, если подставить $\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ в уравнение (76) и принять во внимание, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ удовлетворяют этому уравнению. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что это будет обшим решением уравнения (76). Огсюда получается следующее правило интегрирования уравнения (76): *чтобы найти общее решение линейного уравнения с частными производными* (76), *надо составить соответствующую этому уравнению систему обыкновенных дифференциальных уравнений* (74) *и найти $n$ независимых интегра-*

*лов этой системы* (77), *и общее решение уравнения* (76) *будет*:

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

*где $F$ — произвольная функция своих $n$ аргументов.*

Линейное относительно частных производных уравнение (76) обладает двумя особенностями: его коэффициенты $X_i$ не содержат искомой функции $\varphi$ и его свободный член равен нулю. В общем случае линейного уравнения будем иметь уравнение вида

$$Y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + Y_{n+1} = 0, \qquad (78)$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ содержат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\varphi$. Будем искать семейство решений уравнения (78) в виде неявной функции

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi) = C, \qquad (79_1)$$

где $C$ — произвольная постоянная. Согласно правилу дифференцирования неявной функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_i}}{\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}};$$

подставляя в (78), получим для $\omega$ уравнение:

$$Y_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + Y_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = 0, \qquad (79_2)$$

обладающее указанными выше двумя особенностями. Заметим, что ввиду произвольности $C$ в $(79_1)$ переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi$ могут иметь любые значения, и, как и выше, отсюда вытекает, что уравнение $(79_2)$ должно выполняться тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi$. Его решение приводится к интегрированию соответствующей ему системы обыкновенных уравнений. Если $\omega$ найдено, то $(79_1)$ определит нам $\varphi$. Можно показать, что при некоторых общих предположениях относительно $Y_k$ таким путем можно получать все решения уравнения (78).

Обратим внимание на то, что общее решение уравнения с частными производными содержит произвольную функцию, тогда как в общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений входят лишь произвольные постоянные.

В томе IV мы более подробно изучим линейные уравнения с частными производными и установим соответствующую теорему существования и единственности.

**22. Геометрическая интерпретация.** Дадим геометрическую интерпретацию изложенной в предыдущем теории для случая трех переменных. Положим, что мы имеем в трехмерном пространстве

поле направлений, т. е. в каждой точке пространства задано определенное направление. Введем какие-нибудь прямолинейные прямоугольные координатные оси. При этом всякое направление будет определяться тремя числами, пропорциональными направляющим косинусам этого направления, т. е. косинусам углов, образованных этим направлением с осями координат. Мы имеем в разных точках, вообще говоря, различные направления, и все поле направлений будет определяться тремя функциями:

$$u(x,\ y,\ z), \quad v(x,\ y,\ z), \quad w(x,\ y,\ z), \tag{80}$$

так что направляющие косинусы направления, заданного в точке $(x,\ y,\ z)$, пропорциональны величинам (80).

Как и для уравнения первого порядка, поставим себе задачу найти в пространстве такие кривые, в каждой точке которых касательная имеет то самое направление, которое в этой точке задано данным полем направлений. Но, как известно [**I, 160**], направляющие косинусы касательной пропорциональны дифференциалам $dx$, $dy$, $dz$, а при совпадении двух направлений величины, пропорциональные их направляющим косинусам, должны быть пропорциональны между собою, т. е. для определения искомых линий в пространстве мы имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{u(x,\ y,\ z)} = \frac{dy}{v(x,\ y,\ z)} = \frac{dz}{w(x,\ y,\ z)}. \tag{81}$$

Интегрирование этой системы сводится к нахождению ее двух независимых интегралов

$$\varphi_1(x,\ y,\ z) = C_1; \quad \varphi_2(x,\ y,\ z) = C_2, \tag{82}$$

т. е. таких, что уравнения (82) разрешимы относительно каких-либо двух переменных. Эти два уравнения определяют некоторую линию пространства [**I, 160**]; придавая $C_1$ и $C_2$ различные численные значения, получим семейство интегральных линий системы (81). Начальные условия сводятся к требованию, чтобы искомая линия проходила через заданную точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. По этим начальным условиям определяются произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$.

Перейдем теперь к геометрической интерпретации уравнения с частными производными. Считаем опять, что функции (80), как и выше, определяют некоторое поле направлений. Требуется найти такие поверхности, чтобы в каждой точке поверхности направление, определяемое в этой точке полем направлений, лежало в касательной плоскости к поверхности в этой точке. Пусть уравнение некоторого семейства искомых поверхностей будет:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = C.$$

Направляющие косинусы нормали к этой поверхности, как известно [I, 160], пропорциональны $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, и направление нормали должно быть перпендикулярно к направлению, определяемому величинами (80), так как последнее должно находиться в касательной плоскости. Используя обычное условие перпендикулярности двух направлений [I, 160], получаем для определения $\varphi$ линейное уравнение с частными производными:

$$u(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w(x, y, z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{83}$$

Соответствующая этому уравнению система обыкновенных дифференциальных уравнений есть система (81), так что общее решение уравнения (83) имеет вид:

$$\varphi=F(\varphi_1, \varphi_2),$$

а общее уравнение искомых поверхностей будет

$$F(\varphi_1, \varphi_2)=0, \tag{84}$$

где $F$ — произвольная функция своих двух аргументов. Произвольную постоянную $C$ можно не писать ввиду произвольности $F$, а $\varphi_1$ и $\varphi_2$ дают два независимых интеграла (82) системы (81). Если выберем определенным образом функцию $F$, то поверхность (84) будет, очевидно, геометрическим местом тех интегральных линий системы (81), у которых значения постоянных в равенствах (82) связаны соотношением:

$$F(C_1, C_2)=0. \tag{85}$$

Решение уравнения (83) становится, вообще говоря, определенным, если потребовать, чтобы искомая поверхность проходила через заданную в пространстве кривую $(L)$. Это требование является начальным условием для уравнения с частными производными (83). Искомая поверхность будет, очевидно, образована теми интегральными линиями системы (81), которые выходят из точек кривой $(L)$, т. е. для которых координаты точек кривой $(L)$ определяют начальные условия. В силу теоремы существования и единственности для системы (81) мы получаем таким образом определенную поверхность. Исключительным представляется тот случай, когда сама данная кривая $(L)$ является интегральной кривой системы (81). В этом случае предыдущее построение даст нам не поверхность, а саму кривую $(L)$.

Можно показать, что в этом случае через линию $(L)$ проходит, вообще говоря, бесчисленное множество поверхностей $\varphi=0$, где $\varphi$ удовлетворяет уравнению (83). Подробно мы будем это излагать в четвертом томе.

Положим, что уравнение линии $(L)$ задано в виде совокупности двух уравнений

$$\psi_1(x, y, z)=0; \quad \psi_2(x, y, z)=0. \tag{86}$$

Исключая из четырех уравнений (82) и (86) переменные $x$, $y$, $z$, получим соотношение между $C_1$ и $C_2$, которое, в силу (85), и определит вид функции $F$, которую надо взять, чтобы уравнение (84) давало искомую поверхность, проходящую через линию (86).

**23. Примеры. 1.** Рассмотрим уравнение с частными производными

$$xz\frac{\partial\varphi}{\partial x}+yz\frac{\partial\varphi}{\partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{87}$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-(x^2+y^2)}. \tag{88}$$

Выше [19] мы нашли ее два независимых интеграла:

$$\frac{y}{x}=C_1;\quad x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{89}$$

Первое из уравнений дает семейство плоскостей, проходящих через ось $OZ$, а второе — сферы с центром в начале координат. Интегральными линиями системы (88) будет семейство окружностей, лежащих в указанных плоскостях и имеющих центр в начале координат. Общее решение уравнения (87) будет

$$\varphi=F\left(\frac{y}{x},\ x^2+y^2+z^2\right), \tag{90}$$

где $F$ — произвольная функция своих двух аргументов. Найдем вид функции $F$ так, чтобы поверхность

$$F\left(\frac{y}{x},\ x^2+y^2+z^2\right)=0 \tag{91}$$

проходила через прямую

$$x=1;\quad y=z. \tag{92}$$

Исключаем $x$, $y$ и $z$ из уравнений (89) и (92). Первое из уравнений (89) и уравнения (92) дают:

$$x=1;\quad y=C_1;\quad z=C_1;$$

подставляя во второе из уравнений (89), получаем соотношение между $C_1$ и $C_2$:

$$1+2C_1^2-C_2=0,\quad \text{т. е.}\quad F(C_1,\ C_2)=1+2C_1^2-C_2.$$

При таком виде функции $F$ уравнение (91) дает уравнение искомой поверхности:

$$1+2\frac{y^2}{x^2}-(x^2+y^2+z^2)=0\quad \text{или}\quad x^2+2y^2-x^2(x^2+y^2+z^2)=0.$$

**2.** Положим, что поле направлений, определяемое системой дифференциальных уравнений, таково, что во всех точках пространства направление одно и то же. Пусть $(a,\ b,\ c)$ — числа, пропорциональные направляющим косинусам этого фиксированного направления. Система дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c}\qquad \text{или}\qquad c\,dx-a\,dz=0;\quad c\,dy-b\,dz=0,$$

что дает сразу два интеграла:

$$cx-az=C_1;\quad cy-bz=C_2.$$

Интегральные линии суть очевидно параллельные прямые линии, имеющие указанное выше фиксированное направление. Соответствующее уравнение с частными производными

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \tag{93}$$

определяет поверхности $\varphi(x, y, z)=0$, являющиеся геометрическим местом некоторых из указанных выше прямых линий, т. е. уравнение (93) есть уравнение цилиндрических поверхностей. Его общее решение имеет вид:

$$\varphi = F(cx - az, cy - bz),$$

где $F$ — произвольная функция, и общее уравнение цилиндрических поверхностей, образующие которых имеют указанное выше направление, будет:

$$F(cx - az, cy - bz) = 0.$$

**3.** Положим, что поле направлений таково, что в каждой точке $M(x, y, z)$ направление, даваемое полем, совпадает с направлением вектора, идущего из фиксированной точки $A(a, b, c)$ в точку $M(x, y, z)$. Проекции этого вектора на координатные оси будут

$$x - a, \quad y - b, \quad z - c$$

и, следовательно, эти же три величины пропорциональны направляющим косинусам заданного направления в точке $M$. Соответствующая система дифференциальных уравнений будет:

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c},$$

и мы имеем два очевидных интеграла:

$$\frac{x-a}{z-c} = C_1; \quad \frac{y-b}{z-c} = C_2.$$

Геометрически ясно, что семейством интегральных линий будет семейство прямых, проходящих через точку $A(a, b, c)$. Соответствующее уравнение с частными производными

$$(x-a)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

будет определять конические поверхности, имеющие вершину в точке $A$, и общее уравнение таких поверхностей будет:

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0,$$

где $F$ — произвольная функция своих двух аргументов.

Отметим, что через заданную в пространстве линию $(L)$ мы можем провести, вообще говоря, только одну коническую поверхность, которая будет образована прямыми, идущими из точки $A$ в точки линии $(L)$. Но если линия $(L)$ есть линия, принадлежащая семейству интегральных линий системы, т. е. прямая, проходящая через точку $A$, то можно провести бесчисленное множество конических поверхностей, содержащих такую прямую $(L)$.

**4.** Рассмотрим еще систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{cy - bz} = \frac{dy}{az - cx} = \frac{dz}{bx - ay}. \tag{94}$$

Приравнивая все три отношения дифференциалу $dt$ некоторой новой переменной $t$, можем написать:

$$dx = (cy - bz)\,dt; \quad dy = (az - cx)\,dt; \quad dz = (bx - ay)\,dt. \tag{95}$$

Отсюда нетрудно составить два уравнения, которые непосредственно проинтегрируются. Для составления первого умножим уравнения (95) почленно на $a$, $b$, $c$ и сложим, а для составления второго уравнения умножим уравнения (95) на $x$, $y$, $z$ и сложим. Таким образом получаются два уравнения:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0; \quad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

интегрирование которых и дает два интеграла системы:

$$ax + by + cz = C_1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{96}$$

Первый из интегралов дает семейство параллельных плоскостей, направляющие косинусы нормали к которым пропорциональны числам $(a, b, c)$. Второй из интегралов дает семейство сфер с центром в начале. В пересечении этих плоскостей и сфер получится семейство интегральных линий системы (94). Это будет, очевидно, семейство окружностей, расположенных на упомянутых выше плоскостях и имеющих центр на прямой

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \tag{97}$$

проходящей через начало координат и перпендикулярной ко всем упомянутым плоскостям.

Нетрудно видеть, что соответствующее уравнение с частными производными

$$(cy - bz)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (bx - ay)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

определяет поверхности вращения, для которых прямая (97) есть ось вращения, и общее уравнение таких поверхностей будет:

$$F(ax + by + cz,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

где $F$ — произвольная функция своих двух аргументов. Заметим, что вид знаменателей в системе (97) можно было бы определить из геометрических соображений, задавая соответственным образом поле направлений, как это мы делали в предыдущих примерах.

**5.** К линейному уравнению с частными производными приводит задача об ортогональных траекториях в пространстве. Положим, что задано семейство поверхностей:

$$\omega(x, y, z) = C, \tag{98}$$

зависящее от параметра $C$, так что через всякую точку пространства проходит, вообще говоря, одна и только одна поверхность семейства. Требуется найти поверхность

$$\varphi(x, y, z) = C_1, \tag{99}$$

которая пересекала бы все поверхности (98) под прямым углом. Условие перпендикулярности нормалей поверхностей (98) и (99) даст нам линейное уравнение с частными производными для искомой функции $\varphi$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система обыкновенных уравнений:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\omega}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\omega}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\omega}{\partial z}} \tag{100}$$

определяет кривые, у которых в каждой их точке касательная есть нормаль к поверхности (98), проходящей через эту точку. Если

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1; \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2$$

— два независимых интеграла системы (100), то уравнение искомых поверхностей будет иметь вид

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

---

ГЛАВА II

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**§ 24. Линейные однородные уравнения второго порядка.** Теория линейных дифференциальных уравнений является наиболее простой и разработанной частью теории дифференциальных уравнений, и именно линейные уравнения наиболее часто встречаются в приложениях. В [4] мы решали линейные уравнения первого порядка. В настоящей главе мы будем рассматривать линейные уравнения любого порядка и начнем с уравнений второго порядка.

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$P(y) = y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где через $P(y)$ мы для краткости обозначили левую часть.

Из линейности выражения $P(y)$ относительно функции $y$ и ее производных вытекает, что при произвольных постоянных $C$, $C_1$ и $C_2$:

$$P(Cy) = CP(y); \quad P(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 P(y_1) + C_2 P(y_2).$$

Если $y = y_1$ есть решение уравнения, т. е. $P(y_1) = 0$, то очевидно $P(Cy_1) = 0$, т. е. и $y = Cy_1$ есть также решение уравнения. Точно так же, если $y_1$ и $y_2$ суть решения, то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{2}$$

есть также решение при произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, т. е. *решения линейного однородного уравнения* (1) *можно умножать на произвольные постоянные и складывать, после чего опять получается решение*. Очевидно, это же свойство имеет место и для линейного однородного уравнения любого порядка. В дальнейшем под решением уравнения (1) подразумевается решение, отличное от очевидного $y = 0$.

Теорема существования и единственности для уравнения (1) формулируется особенно просто, как это мы покажем в одном из следующих параграфов: *если* $p(x)$ *и* $q(x)$ — *непрерывные функции в некотором промежутке* $a < x < b$ *и* $x_0$ — *любое значение из этого промежутка, то существует одно и только одно решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y|_{x=x_0} = y_0; \quad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

*где* $y_0$ *и* $y'_0$ — *любые заданные числа. Это решение существует во всем промежутке* $a < x < b$.

В дальнейшем мы будем рассматривать решения уравнения (1) при изменении $x$ в промежутке непрерывности $p(x)$ и $q(x)$. Ввиду произвольности $x_0$, $y_0$, $y'_0$ в теореме существования и единственности уравнение (1) не имеет особых решений.

Два решения $y_1$ и $y_2$ уравнения (1) называются *линейно-независимыми*, если между ними не существует тождественного относительно $x$ соотношения

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1$ и $\alpha_2$, отличными от нуля. Иначе говоря, линейная независимость $y_1$ и $y_2$ сводится к тому, что отношение $\frac{y_2}{y_1}$ не является постоянной величиной или, что то же, к тому, что производная этого отношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}{y_1^2} \tag{4}$$

не равна тождественно нулю.

Введем в рассмотрение выражение

$$\Delta(y_1 y_2) = y_1 y'_2 - y_2 y'_1, \tag{5}$$

которое называется *определителем Вронского решений* $y_1$ и $y_2$. Определитель этот обладает замечательным свойством:

$$\Delta(y_1, y_2) = \Delta_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \tag{6}$$

где $\Delta_0$ — постоянная, равная значению $\Delta(y_1, y_2)$ при $x = x_0$.

Для доказательства вычисляем производную

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx} = y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y'_2 y'_1 - y_2 y''_1 = y_1 y''_2 - y_2 y''_1.$$

Принимая во внимание, что $y_1$ и $y_2$ суть решения уравнения (1), можем написать:

$$y''_1 + p(x) y'_1 + q(x) y_1 = 0; \quad y''_2 + p(x) y'_2 + q(x) y_2 = 0.$$

Умножая первое уравнение на $(-y_2)$, второе на $y_1$ и складывая почленно, получим:

$$y_1y_2''-y_2y_1''+p(x)(y_1y_2'-y_2y_1')=0,$$

и, следовательно:

$$\frac{d\Delta(y_1, y_2)}{dx}+p(x)\Delta(y_1, y_2)=0.$$

Это есть линейное однородное уравнение относительно $\Delta$. Применяя формулу $(31_1)$ из [4], мы и получаем непосредственно формулу (6).

Из этой формулы следует, что $\Delta(y_1, y_2)$ *или тождественно равен нулю, если постоянная* $\Delta_0$ *равна нулю, или не равен нулю ни при каком значении* $x$, так как показательная функция в нуль не обращается. При этом мы считаем $p(x)$ функцией непрерывной.

Вместо формулы (4), в силу (6), можем написать:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{\Delta(y_1, y_2)}{y_1^2}=\Delta_0\frac{e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(x)\,dx}}{y_1^2}, \tag{7}$$

и отсюда вытекает, что *два решения* $y_1$ *и* $y_2$ *уравнения* (1) *будут линейно независимыми тогда и только тогда, когда* $\Delta(y_1, y_2)$ *отличен от нуля*, т. е. когда $\Delta_0\neq 0$.

Покажем теперь, что если $y_1$ и $y_2$ — линейно-независимые решения уравнения (1), то при надлежащем выборе постоянных $C_1$ и $C_2$ формула (2) дает нам решение уравнения (1), удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям:

$$y\,|_{x=x_0}=y_0;\qquad y'\,|_{x=x_0}=y_0'. \tag{8}$$

Через $y_{10}$, $y_{20}$, $y_{10}'$, $y_{20}'$ обозначим значения $y_1$, $y_2$ и их первых производных при $x=x_0$. Чтобы удовлетворить начальным условиям (8), надо определить $C_1$ и $C_2$ в формуле (2) из системы уравнений

$$C_1y_{10}+C_2y_{20}=y_0;\quad C_1y_{10}'+C_2y_{20}'=y_0'.$$

Из линейной независимости $y_1$ и $y_2$ вытекает, что

$$\Delta_0=y_{10}y_{20}'-y_{20}y_{10}'\neq 0,$$

и, следовательно, из написанной системы мы получим вполне определенные значения для $C_1$ и $C_2$, что доказывает наше утверждение.

Но в силу теоремы существования и единственности [3] всякое решение уравнения (1) вполне определяется своими начальными условиями, и мы можем поэтому высказать следующее предложение: *если* $y_1$ *и* $y_2$ — *два линейно-независимых решения уравнения* (1), *то формула* (2) *дает все решения этого уравнения.*

Таким образом задача интегрирования (1) приводится к нахождению его двух линейно-независимых решений. Пусть $y_1$ — одно из решений этого уравнения и $y_2$ — какое-либо его решение. Интегрируя соотношение (7), получим:

$$\frac{y_2}{y_1} = \Delta_0 \int e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2} \quad \text{или} \quad y_2 = \Delta_0 y_1 \int e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2}, \tag{9}$$

т. е. если известно одно частное решение уравнения (1), то второе его решение может быть получено по формуле (9), где $\Delta_0$ — постоянная, которую можно положить и равной единице.

Надо сказать, что найти это одно решение в конечном виде или даже при помощи квадратур в общем случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ — функции от $x$, оказывается невозможным. Для некоторых частных случаев и, между прочим, в том случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ суть постоянные, а не функции от $x$, — решения, как мы увидим, получаются в конечном виде.

В дальнейшем мы укажем также один способ построения решений, часто применяемый в приложениях, а именно построение решения в виде бесконечного ряда.

**25. Линейные неоднородные уравнения второго порядка.** Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x). \tag{10}$$

Если $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны в некотором промежутке $a < x < b$, то мы имеем, как будет дальше доказано, совершенно такую же теорему существования и единственности, что и для однородного уравнения (1). В дальнейшем мы будем рассматривать решения уравнения (10) в промежутке непрерывности $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$.

Пусть $u = u_1$ есть частное решение этого уравнения, так что

$$u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = f(x). \tag{11}$$

Введем вместо $u$ новую функцию $y$:

$$u = y + u_1. \tag{12}$$

Подстановка в уравнение (10) дает

$$[y'' + p(x)y' + q(x)y] + [u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1] = f(x),$$

или, в силу (11),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{13}$$

Это последнее уравнение называется *однородным уравнением, соответствующим уравнению* (10). Если $y_1$ и $y_2$ — его два линейно-

независимых решения, то, согласно формуле (12) и предложению предыдущего номера, формула

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1,$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, будет давать все решения уравнения (10). Свойство это можно формулировать так: *общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.*

Приведенное выше доказательство годится, очевидно, и для линейных неоднородных уравнений любого порядка, так что и для них имеет место высказанное свойство.

Зная два линейно-независимых решения однородного уравнения (13), можно, как мы сейчас увидим, найти и частное решение уравнения (10), а следовательно, и его общее решение. Мы применим при этом способ, который называется способом изменения произвольных постоянных Лагранжа [**4**].

Пусть $y_1$ и $y_2$ — два линейно-независимых решения уравнения (13). Его общее решение выражается, как известно, по формуле (2).

Будем искать решение уравнения (10) в том же виде, считая только $C_1$ и $C_2$ не постоянными, а искомыми функциями от $x$:

$$u = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2. \tag{14}$$

Имея не одну, а две искомые функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, мы можем подчинить их, кроме уравнения (10), еще одному условию. Поставим следующее условие:

$$v_1'(x) y_1 + v_2'(x) y_2 = 0. \tag{15}$$

Дифференцируя выражение (14) и пользуясь условием (15), будем иметь:

$$\begin{array}{r|l} q(x)\cdot & u = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 \\ p(x)\cdot & u' = v_1(x) y_1' + v_2(x) y_2' \\ 1\cdot & u'' = v_1(x) y_1'' + v_2(x) y_2'' + v_1'(x) y_1' + v_2'(x) y_2'. \end{array}$$

Подставив в левую часть уравнения (10), получим:

$$v_1(x)[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1] + v_2(x)[y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2] + \\ + v_1'(x) y_1' + v_2'(x) y_2' = f(x).$$

Принимая во внимание, что $y_1$ и $y_2$ суть решения однородного уравнения (13), и вспоминая условие (15), будем иметь систему уравнений:

$$v_1'(x) y_1 + v_2'(x) y_2 = 0; \quad v_1'(x) y_1' + v_2'(x) y_2' = f(x) \tag{16}$$

для определения $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$.

Ввиду линейной независимости решений $y_1$ и $y_2$:

$$\Delta(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0,$$

а потому система (16) дает вполне определенные выражения для $v_1'(x)$ и $v_2'(x)$. Выполняя квадратуры, найдем $v_1(x)$ и $v_2(x)$ и, подставляя в (14), получим решение уравнения (10).

**26. Линейные уравнения высших порядков.** Линейные уравнения высших порядков обладают многими свойствами уравнения второго порядка. Мы их формулируем, не останавливаясь на доказательствах.

*Линейным однородным уравнением n-го порядка называется уравнение вида*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + \\ + p_n(x) y = 0. \qquad (17)$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — его решения, то и сумма

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k$$

также будет решением при произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots C_k$. Это доказывается совершенно так же, как и для уравнения второго порядка [**24**].

Теорема существования и единственности формулируется так же, как и для уравнения второго порядка, причем начальные условия имеют вид

$$y|_{x=x_0} = y_0; \quad y'|_{x=x_0} = y_0'; \quad \ldots; \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Решения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *называются линейно-независимыми*, если между ними не существует тождественного относительно $x$ соотношения

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k = 0$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых есть отличные от нуля.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — $n$ линейно-независимых решений уравнения, то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (18)$$

где $C_i$ — произвольные постоянные, дает все решения этого уравнения. Располагая постоянными $C_i$, можно получить решение, удовлетворяющее указанным выше начальным условиям.

*Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка* имеет вид

$$u^{(n)} + p_1(x) u^{(n-1)} + p_2(x) u^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x) u' + p_n(x) u = f(x). \qquad (19)$$

Если $u_1$ — какое-либо решение этого уравнения и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно-независимые решения соответствующего однородного уравнения (17), то формула

$$u = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + u_1,$$

где $C_i$ — произвольные постоянные, дает общее решение уравнения (19).

При этом, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ известны, то решение уравнения (19) может быть получено по формуле

$$u = v_1(x) y_1 + v_2(x) y_2 + \ldots + v_n(x) y_n,$$

где $v'_i(x)$ определяется из системы уравнений первой степени:

$$\begin{aligned}
&v'_1(x) y_1 + v'_2(x) y_2 + \ldots + v'_n(x) y_n = 0\\
&v'_1(x) y'_1 + v'_2(x) y'_2 + \ldots + v'_n(x) y'_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v'_1(x) y_1^{(n-2)} + v'_2(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + v'_n(x) y_n^{(n-2)} = 0\\
&v'_1(x) y_1^{(n-1)} + v'_2(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + v'_n(x) y_n^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}$$

Для читателя, знакомого с теорией определителей, можно указать необходимое и достаточное условие линейной независимости, совершенно аналогичное тому, которое мы дали выше для уравнений второго порядка. Пусть, как и выше, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения уравнения (17). *Определителем Вронского этих решений* называется следующий определитель $n$-го порядка:

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots, & y_n \\ y'_1, & y'_2, \ldots, & y'_n \\ y''_1, & y''_2, \ldots, & y''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

и для него можно доказать формулу, аналогичную формуле (6):

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Delta_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx},$$

где $\Delta_0$ — значение $\Delta$ при $x = x_0$. Из этой формулы, как и выше, вытекает, что $\Delta$ или тождественно равно нулю, или не обращается в нуль ни при каком значении $x$. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и состоит в том, что их определитель Вронского не равен тождественно нулю. При этом по любым начальным условиям вполне определяются произвольные постоянные формулы (18). Как и для уравнений второго порядка, теорема существования и единственности дает решение во всем том промежутке, где коэффициенты уравнения $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ суть непрерывные функции.

**27. Однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.** Прежде чем переходить к уравнению с постоянными коэффициентами, мы докажем одну формулу дифференциального исчисления, необходимую нам в дальнейшем. Если $r$ — некоторое вещественное число, то известна следующая формула для производной функции $e^{rx}$:

$$(e^{rx})' = re^{rx}.$$

Покажем, что эта же формула справедлива и в том случае, когда $r$ — комплексное число и $x$ — обычная вещественная переменная, т. е.

$$(e^{(a+bi)x})' = (a+bi)\,e^{(a+bi)x}.$$

Действительно, из определения показательной функции при комплексном показателе [I, 176] следует:

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx).$$

Дифференцируя эту функцию по обычным правилам, получаем:

$$(e^{(a+bi)x})' = ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + be^{ax}(-\sin bx + i\cos bx),$$

или, вынося из второй скобки $i$ и принимая во внимание, что $\frac{1}{i} = -i$:

$$(e^{(a+bi)x})' = ae^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + bie^{ax}(\cos bx + i\sin bx) =$$
$$= (a+bi)\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = (a+bi)\,e^{(a+bi)x},$$

что мы и хотели доказать.

Займемся теперь решением линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (20)$$

где $p$ и $q$ — заданные числа. Подставим в уравнение вместо $y$ функцию вида $e^{rx}$, где $r$ — некоторое искомое вещественное или комплексное число, т. е.

$$y = e^{rx}. \qquad (21)$$

Дифференцируя и вынося $e^{rx}$ за скобки, получим:

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0,$$

и уравнение (20) будет действительно удовлетворено, если число $r$ есть корень следующего квадратного уравнения:

$$r^2 + pr + q = 0, \qquad (22)$$

которое называется *характеристическим уравнением для уравнения* (20). Если это квадратное уравнение имеет два различных корня $r = r_1$ и $r = r_2$, то формула (21) даст нам два линейно-независимых решения уравнения

$$y_1 = e^{r_1x}, \quad y_2 = e^{r_2x}. \qquad (23)$$

Действительно, нетрудно видеть, что их отношение $e^{r_2x} : e^{r_1x} = e^{(r_2-r_1)x}$ не есть постоянная. Рассмотрим теперь тот случай, когда квадратное уравнение (22) имеет равные корни. Из формулы для решения квадратного уравнения видно, что это будет в том случае, когда $p^2 - 4q = 0$, и при этом единственный корень уравнения определяется формулой:

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}. \tag{24}$$

В данном случае нам удается построить указанным путем только одно решение $y_1 = e^{r_1x}$ и остается найти второе решение. Для его нахождения применим следующие соображения.

Изменим немного коэффициенты $p$ и $q$ так, чтобы корни сделались различными, например, сделаем так, чтобы корень $r_1$ попрежнему имел значение (24), а корень $r_2$ немного отличался от него. При этом получаются два решения (23). Вычтем эти решения и разделим на постоянную $(r_2 - r_1)$. Таким образом мы опять получим решение [**24**]:

$$y = \frac{e^{r_2x} - e^{r_1x}}{r_2 - r_1}. \tag{25}$$

Будем теперь измененные значения коэффициентов $p$ и $q$ стремить к их исходным значениям, при которых уравнение (22) имело двойной корень. При этом $r_2$ будет стремиться к $r_1$, в формуле (25) числитель и знаменатель будут стремиться к нулю, а вся дробь будет иметь своим пределом производную от функции $e^{rx}$ по $r$ при $r = r_1$, т. е. второе решение уравнения будет $y_2 = xe^{r_1x}$. Итак, в случае равных корней уравнения (22) мы имеем следующие два линейно-независимых решения:

$$y_1 = e^{r_1x}; \quad y_2 = xe^{r_1x}. \tag{26}$$

Убедимся еще непосредственной подстановкой, что $y_2$ будет действительно решением уравнения. Подставляя $y_2$ в левую часть уравнения (20), получим:

$$(r_1^2xe^{r_1x} + 2r_1e^{r_1x}) + p(r_1xe^{r_1x} + e^{r_1x}) + qxe^{r_1x} =$$
$$= xe^{r_1x}(r_1^2 + pr_1 + q) + e^{r_1x}(2r_1 + p).$$

Первое из слагаемых правой части будет равно нулю, так как $r = r_1$ есть корень уравнения (22), а второе слагаемое равно нулю в силу (24) и таким образом действительно $y_2$ есть решение уравнения (20).

Мы считаем коэффициенты $p$ и $q$ вещественными числами. Но при решении квадратного уравнения (22) корни могут оказаться как вещественными, так и комплексными. Если уравнение (22) имеет вещественные различные корни, то формулы (23) дают два линейно-независимых вещественных решения, и общий интеграл уравнения

будет

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \tag{27}$$

Положим, что уравнение (22) имеет комплексные корни. Они должны быть мнимыми сопряженными [I, 189], т. е. $r_1 = \alpha + \beta i$ и $r_2 = \alpha - \beta i$, и формула (23) дает решения:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x);$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

Составим другие решения, взяв две линейные комбинации этих решений:

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Эти два решения также линейно-независимы, и, следовательно, в том случае, когда уравнение (22) имеет комплексные корни $r = \alpha \pm \beta i$, общий интеграл уравнения будет:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{28}$$

Наконец, если уравнение (22) имеет одинаковые корни, то, в силу (26), общий интеграл уравнения будет

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}. \tag{29}$$

Отметим еще тот частный случай формулы (28), когда уравнение (22) имеет чисто мнимые корни, т. е. $\alpha = 0$. При этом должно быть $p = 0$, а $q$ должно быть положительным числом. Обозначая $q = k^2$, мы будем для уравнения (22) иметь корни $\pm ki$, и, следовательно, уравнение

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{30}$$

имеет общий интеграл:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \tag{31}$$

**28. Линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{32}$$

где $p$ и $q$ — попрежнему заданные вещественные числа и $f(x)$ — заданная функция от $x$. Для нахождения общего интеграла этого уравнения достаточно найти его частное решение и сложить его с общим интегралом соответствующего однородного уравнения (20). Поскольку общий интеграл однородного уравнения известен, можно при помощи квадратур найти это частное решение, пользуясь методом вариации произвольных постоянных [25]. Проделаем это, например, для уравнения вида:

$$y'' + k^2 y = f(x). \tag{33}$$

Общий интеграл соответствующего однородного уравнения определяется формулой (31), и нам надо искать частное решение уравнения (33) в виде:

$$u = v_1(x)\cos kx + v_2(x)\sin kx, \tag{34}$$

где $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — искомые функции от $x$. Уравнения (16) дают в данном случае для производных этих функций систему двух уравнений первой степени:

$$v_1'(x)\cos kx + v_2'(x)\sin kx = 0$$

$$-v_1'(x)\sin kx + v_2'(x)\cos kx = \frac{1}{k}f(x).$$

Решая ее, получим:

$$v_1'(x) = -\frac{1}{k}f(x)\sin kx; \quad v_2'(x) = \frac{1}{k}f(x)\cos kx.$$

Напишем первообразные функции в виде интеграла с переменным верхним пределом и обозначим через $\xi$ переменную интегрирования:

$$v_1(x) = -\frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi; \quad v_2(x) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\, d\xi,$$

где $x_0$ — некоторое фиксированное число. Подставляя в формулу (34), получим частное решение:

$$u = -\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k\xi\, d\xi + \frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\cos k\xi\, d\xi \tag{$34_1$}$$

или, внося множители, не зависящие от переменной интегрирования, под знак интеграла:

$$u = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k(x-\xi)\, d\xi, \tag{$34_2$}$$

и общий интеграл уравнения (33) будет:

$$y = C_1\cos kx + C_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\sin k(x-\xi)\, d\xi.$$

Сделаем по поводу формулы ($34_2$) одно замечание. Переменная $x$ входит в правую часть этой формулы двояким образом. Во-первых, $x$ является верхним пределом интеграла и, во-вторых, она входит под знак интеграла не как переменная интегрирования, но как добавочный параметр, который считается постоянным при интегрировании.

Далее, нетрудно показать, что частное решение ($34_2$) удовлетворяет нулевым начальным условиям при $x = x_0$, т. е.

$$u\Big|_{x=x_0} = 0, \qquad u'\Big|_{x=x_0} = 0. \tag{$34_3$}$$

Первое из этих равенств непосредственно вытекает из ($34_2$), так как при $x = x_0$ верхний предел интеграла совпадает с нижним, и интеграл равен нулю. Чтобы проверить второе равенство, определим $u'$ из формулы ($34_1$), помня, что производная от интеграла по верхнему пределу равна подинтегральной функции при верхнем пределе. После очевидного сокращения, получим:

$$u' = \sin kx \int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin k\xi \, d\xi + \cos kx \int_{x_0}^{x} f(\xi) \cos k\xi \, d\xi,$$

откуда и вытекает непосредственно вторая из формул ($34_3$).

**29. Частные случаи.** Если правая часть уравнения (32) имеет специальный вид, то можно гораздо проще отыскивать частные решения, не прибегая к методу вариации произвольных постоянных. Сделаем сначала одно замечание. Положим, что правая часть уравнения (32) есть сумма двух слагаемых:

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x), \tag{35}$$

и положим, что $u_1(x)$ и $u_2(x)$ суть частные решения неоднородного уравнения, когда правая часть равна $f_1(x)$ и $f_2(x)$, т. е.

$$u_1'' + pu_1' + qu_1 = f_1(x); \quad u_2'' + pu_2' + qu_2 = f_2(x).$$

Складывая, получим

$$(u_1 + u_2)'' + p(u_1 + u_2)' + q(u_1 + u_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

т. е. $(u_1 + u_2)$ есть частное решение уравнения (35).

Рассмотрим теперь неднородное уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = ae^{kx}, \tag{36}$$

где в правой части $a$ и $k$ — заданные числа. В дальнейшем, для сокращения письма, введем специальное обозначение для левой части уравнения (22)

$$\varphi(r) = r^2 + pr + q. \tag{37}$$

Будем искать решение уравнения (36) в том же виде, что свободный член, т. е. в виде

$$y = a_1 e^{kx},$$

где $a_1$ — искомый численный коэффициент. Подставляя это в (36) и сокращая на $e^{kx}$, получим для определения $a_1$ уравнение, которое, в силу (37), можно записать в виде:

$$\varphi(k)\, a_1 = a.$$

Если $k$ не есть корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) \neq 0$, то из этого уравнения определится $a_1$. Положим, что $k$ есть простой корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) = 0$, но $\varphi'(k) \neq 0$ [I, 186]. В данном случае будем искать решение уравнения (33) в виде

$$y = a_1 x e^{kx}.$$

Подставляя в уравнение и сокращая на $e^{kx}$, получим:

$$\varphi(k)\,a_1x + \varphi'(k)\,a_1 = a,$$

или, в силу $\varphi(k) = 0$,

$$\varphi'(k)\,a_1 = a,$$

откуда определяется $a_1$, так как $\varphi'(k) \neq 0$. Если, наконец, число $k_1$ есть двукратный корень уравнения (22), т. е. $\varphi(k) = \varphi'(k) = 0$, то, как и выше, нетрудно показать, что решение уравнения надо искать в виде:

$$y = a_1x^2e^{kx}.$$

Таким же методом можно находить решение и в более общем случае, когда свободный член имеет вид произведения $P(x)\,e^{kx}$, где $P(x)$ — полином от $x$. Если $k$ не есть корень уравнения (22), то и решение надо искать в виде

$$y = P_1(x)\,e^{kx}, \tag{38}$$

где $P_1(x)$ — полином той же степени, что и $P(x)$, причем искомыми являются коэффициенты $P_1(x)$. Подставляя (38) в уравнение, сокращая на $e^{kx}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим уравнения для определения коэффициентов $P_1(x)$.

Если же $k$ есть корень уравнения (22), то к правой части (38) надо добавить множитель $x$ или $x^2$, смотря по тому, будет ли $k$ простым или двукратным корнем уравнения (22).

Перейдем теперь к тем случаям, когда свободный член содержит тригонометрические функции. Рассмотрим сначала уравнение

$$y'' + py' + qy = e^{kx}(a\cos lx + b\sin lx). \tag{39}$$

Пользуясь формулами [I, 177]

$$\cos lx = \frac{e^{lxi} + e^{-lxi}}{2}, \qquad \sin lx = \frac{e^{lxi} - e^{-lxi}}{2i},$$

можем представить правую часть уравнения (39) в виде

$$Ae^{(k+li)\,x} + Be^{(k-li)\,x},$$

где $A$ и $B$ — некоторые постоянные. Если сопряженные числа $(k \pm li)$ не суть корни уравнения (22), то, согласно предыдущему, надо искать решение уравнения в виде:

$$y = A_1e^{(k+li)\,x} + B_1e^{(k-li)\,x},$$

или, возвращаясь от показательных функций к тригонометрическим

$$e^{\pm\,lxi} = \cos lx \pm i\sin lx,$$

видим, что если $(k \pm li)$ не суть корни уравнения (22), то решение уравнения (39) надо искать в виде:

$$y = e^{kx}(a_1\cos lx + b_1\sin lx), \tag{40}$$

где $a_1$ и $b_1$ — искомые постоянные. Совершенно так же можно показать что к правой части формулы (40) надо добавить множитель $x$, если $(k \pm li)$ суть корни уравнения (22). Постоянные $a_1$ и $b_1$ определяются подстановкой выражения (40) в уравнение (39). Заметим, что если в правой части (39) участвуют, например, только $\cos lx$, то в решении (40) надо брать все же оба члена, содержащих как $\cos lx$, так и $\sin lx$.

Приведем, не останавливаясь на доказательстве, более общий результат. Если правая часть имеет вид:

$$e^{kx}[P(x)\cos lx + Q(x)\sin lx],$$

где $P(x)$ или $Q(x)$ — полиномы от $x$, то решение надо искать в том же виде

$$e^{kx}[P_1(x)\cos lx + Q_1(x)\sin lx],$$

где $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ — полиномы от $x$, степени которых равны наибольшей из степеней полиномов $P(x)$ и $Q(x)$. Если $(k \pm li)$ суть простые корни уравнения (22), то надо приписать еще множитель $x$.

**30. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.** В настоящем номере мы приведем без доказательства результаты, аналогичные предыдущим, для уравнений высших порядков. В дальнейшем мы изложим общую теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи особого метода — *метода символического множителя*, при этом будут доказаны и упомянутые результаты.

Однородное уравнение $n$-го порядка имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0, \tag{41}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — заданные вещественные числа. Составим характеристическое уравнение, аналогичное уравнению (22):

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1}r + p_n = 0. \tag{42}$$

Всякому простому вещественному корню $r = r_1$ этого уравнения соответствует решение $y = e^{r_1 x}$. Если этот корень имеет кратность $s$, то ему будут соответствовать следующие $s$ решений:

$$e^{r_1 x},\quad xe^{r_1 x},\quad \ldots,\quad x^{s-1}e^{r_1 x}.$$

Паре мнимых сопряженных корней $r = \alpha \pm \beta i$ первой кратности соответствуют решения

$$e^{\alpha x}\cos \beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}\sin \beta x.$$

Если эти корни не простые, а имеют кратность $s$, то им соответствуют следующие $2s$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos \beta x,\ xe^{\alpha x}\cos \beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos \beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin \beta x,\ xe^{\alpha x}\sin \beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin \beta x.$$

Таким образом, используя все корни уравнения (42), мы получим $n$ решений уравнения (41). Умножая эти решения на произвольные постоянные и складывая, будем иметь общий интеграл уравнения.

Для разыскания частного решения неоднородного уравнения:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$$

применим метод вариации произвольных постоянных [**26**].

Если правая часть имеет вид $P(x)e^{kx}$, где $P(x)$ — полином и $k$ не есть корень уравнения (42), то и решение уравнения можно искать в виде $y = P_1(x)e^{kx}$, где $P_1(x)$ — полином той же степени, что и $P(x)$. Если $k$ есть корень уравнения (42) кратности $s$, то надо положить $y = x^s P_1(x)e^{kx}$. Если

правая часть имеет вид

$$f(x)=e^{kx}\left[P(x)\cos lx+Q(x)\sin lx\right], \tag{43}$$

и $(k\pm li)$ не суть корни уравнения (42), то и решение надо искать в том же виде:

$$y=e^{kx}\left[P_1(x)\cos lx+Q_1(x)\sin lx\right],$$

где степени полиномов $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ надо брать равными наибольшей из степеней $p$ полиномов $P(x)$ и $Q(x)$.

Если же $(k\pm li)$ суть корни (42) кратности $s$, то к правой части последней формулы надо приписать множитель $x^s$.

Примеры. **1.** Рассмотрим уравнение

$$y''-5y'+6y=4\sin 2x.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2-5r+6=0$$

имеет корни $r_1=2$ и $r_2=3$. Общий интеграл однородного уравнения будет

$$C_1e^{2x}+C_2e^{3x}. \tag{44}$$

Частное решение уравнения надо искать в виде:

$$y=a_1\cos 2x+b_1\sin 2x.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$(2a_1-10b_1)\cos 2x+(16a_1-4b_1)\sin 2x=4\sin 2x,$$

что дает

$$2a_1-10b_1=0;\quad 16a_1-4b_1=4,$$

откуда $a_1=\frac{5}{19}$ и $b_1=\frac{1}{19}$, т. е. частное решение будет:

$$y=\frac{5}{19}\cos 2x+\frac{1}{19}\sin 2x.$$

Складывая его с (44), получим общий интеграл уравнения.

**2.** Возьмем уравнение четвертого порядка:

$$y^{(IV)}-2y'''+2y''-2y'+y=x\sin x.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0$$

может быть представлено в виде:

$$(r^2+1)(r-1)^2=0$$

и имеет двойной корень $r_1=r_2=1$ и пару мнимых сопряженных $r_{3,4}=\pm i$. Общий интеграл однородного уравнения будет:

$$(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos x+C_4\sin x. \tag{45}$$

Сравнивая свободный член с формулой (43), видим, что в данном случае $k=0$, $l=1$, $p=1$, и $k\pm li=\pm i$ суть простые корни характеристического уравнения, так что частное решение надо искать в виде

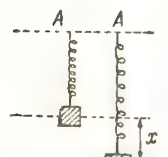
$$y=x\left[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x\right]=(ax^2+bx)\cos x+(cx^2+dx)\sin x,$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — искомые коэффициенты.

7 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

**31. Линейные уравнения и колебательные явления.** Выясним значение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами при рассмотрении колебательных явлений. В дальнейшем мы изменим обозначения и будем часто обозначать независимую переменную через $t$ (время), а функцию — через $x$.

Рассмотрим вертикальные колебания подвешенного на пружине тела массы $m$, около положения равновесия, в котором вес тела в точности уравновешивается упругой силой пружины.



Черт. 22.

Пусть $x$ — расстояние тела по вертикальному направлению от положения равновесия (черт. 22). Положим, что движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально скорости $\frac{dx}{dt}$.

На тело будут действовать следующие силы: 1) восстанавливающая сила пружины, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, которую мы будем считать пропорциональной удалению $x$ тела от положения равновесия, и 2) сила сопротивления, пропорциональная скорости и имеющая направление, обратное скорости. Дифференциальное уравнение движения будет:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - cx, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

В качестве второго примера рассмотрим движение простого маятника длины $l$ в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. Дифференциальное уравнение движения будет, как известно из механики,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - b\frac{d\theta}{dt}, \tag{46}$$

где $\theta$ — угол отклонения маятника от положения равновесия. Рассматривая случай малых колебаний маятника около положения равновесия, мы можем заменить $\sin\theta$ самим углом $\theta$, и уравнение (46) приведется к виду:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\theta = 0. \tag{47}$$

Если на маятник действует, кроме того, внешняя сила, зависящая от времени, то вместо уравнения (47) будем иметь уравнение со свободным членом:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\theta = f(t). \tag{48}$$

В обоих рассмотренных случаях движение определяется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

При дальнейшем рассмотрении этого уравнения мы будем писать его в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \tag{49}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=f(t). \tag{50}$$

К такому уравнению мы приходим вообще при рассмотрении малых колебаний системы с одной степенью свободы около ее положения равновесия. Член $2h\frac{dx}{dt}$ происходит от сопротивления среды или трения, и $h$ называется коэффициентом сопротивления; член $k^2x$ происходит от внутренней силы системы, которая стремится вернуть систему в положение равновесия, и $k^2$ называется коэффициентом восстановления; свободный член $f(t)$ в уравнении (50) происходит от внешней возмущающей силы, действующей на систему. Уравнение написанного вида встречается не только при рассмотрении колебаний механических систем, но и в разнообразных физических вопросах, связанных с колебательными явлениями. В качестве примера рассмотрим разряд конденсатора емкости $C$ через цепь с сопротивлением $R$ и коэффициентом самоиндукции $L$. Обозначая через $v$ напряжение на обкладках конденсатора, будем иметь для цепи

$$v=Ri+L\frac{di}{dt}, \tag{51}$$

где $i$ — сила тока в цепи. Кроме того, известна еще следующая зависимость:

$$i=-C\frac{dv}{dt}. \tag{52}$$

Положим, что в цепи имеется еще источник тока с электродвижущей силой $E$, которую мы будем считать положительной, если она действует в направлении, противоположном $i$. В этом случае вместо равенства (51) будем иметь

$$v-E=Ri+L\frac{di}{dt}.$$

Подставляя выражение (52) в написанное уравнение, получим дифференциальное уравнение:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+RC\frac{dv}{dt}+v=E$$

или

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=\frac{E}{LC}. \tag{53}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (50), видим, что член $\frac{R}{L}\frac{dv}{dt}$ аналогичен члену, происходящему от сопротивления; член $\frac{1}{LC}v$ —

члену, происходящему от восстанавливающей силы; свободный член $\frac{E}{LC}$ — члену от возмущающей силы.

Если найдем $v$ из уравнения (53) и подставим в формулу (52), то сможем определить и $i$.

**32. Собственные и вынужденные колебания.** Рассмотрим однородное уравнение

$$x'' + 2hx' + k^2x = 0, \tag{54}$$

соответствующее тому случаю, когда отсутствует внешняя сила. Решение этого уравнения определяет *свободные*, или, как говорят, *собственные колебания*. Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0. \tag{55}$$

Дальнейшее исследование разобьем на отдельные случаи.

1. Затухающее колебание. В большинстве случаев коэффициент сопротивления $h$ невелик по сравнению с коэффициентом восстановления $k^2$, так что разность $(h^2 - k^2)$ есть число отрицательное: $h^2 - k^2 = -p^2$. В этом случае уравнение (55) имеет мнимые сопряженные корни: $r_{1,2} = -h \pm pi$, и мы имеем общий интеграл уравнения (54)

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt). \tag{56}$$

Полагая

$$C_1 = A \sin\varphi; \quad C_2 = A\cos\varphi, \tag{57}$$

преобразуем решение (56) к виду

$$x = Ae^{-ht}\sin(pt + \varphi), \tag{58}$$

или, полагая $p = \frac{2\pi}{\tau}$,

$$x = Ae^{-ht}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \varphi\right). \tag{59}$$

*Здесь $\tau$ есть период свободных колебаний, $A$ — начальная их амплитуда и $\varphi$ — начальная фаза.* Если не принимать в расчет сопротивление среды, т. е. положить $h = 0$, то уравнение (55) будет иметь корни $r = \pm ki$, и вместо (58) получим

$$x = A\sin(kt + \varphi). \tag{60}$$

Это будет *чисто гармоническое колебание* с периодом $\tau = \frac{2\pi}{k}$. Формула (59) дает затухающее колебание [**I, 59**], причем множитель $e^{-ht}$ характеризует быстроту затухания. В промежуток времени, равный периоду, амплитуда уменьшается в отношении $e^{-h\tau}$. Значения постоянных $C_1$ и $C_2$ в формуле (56) или, что то же, постоянных $A$ и $\varphi$ в формуле (58) зависят от начальных условий. Положим, что

начальные условия будут:

$$x|_{t=0} = x_0; \quad x'|_{t=0} = x'_0. \tag{61}$$

Подставляя в формулу (56) $t = 0$, получим $C_1 = x_0$. Дифференцируем формулу (56) по $t$:

$$x' = -he^{-ht}(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt) + pe^{-ht}(-C_1 \sin pt + C_2 \cos pt),$$

откуда, подставляя $t = 0$, получим

$$C_2 = \frac{x'_0 + hx_0}{p}, \tag{62}$$

и окончательно решение, удовлетворяющее начальным условиям (61), будет:

$$x = e^{-ht}\left(x_0 \cos pt + \frac{x'_0 + hx_0}{p} \sin pt\right). \tag{63}$$

Заметим, что в решении (63) коэффициент затухания $h$ и частота колебания $p = \sqrt{k^2 - h^2}$ определяются вполне по коэффициентам уравнения (54). Что же касается амплитуды $A$ и начальной фазы $\varphi$, то они зависят от начальных условий, и, в силу (57), мы можем написать равенства:

$$A \sin \varphi = x_0; \quad A \cos \varphi = \frac{x'_0 + hx_0}{p},$$

из которых $A$ и $\varphi$ и определяются. Если $h = 0$, то везде надо заменить $p$ на $k$.

2. Апериодическое движение. Если разность $(h^2 - k^2)$ будет положительной:

$$h^2 - k^2 = q^2,$$

то корни уравнения (55) будут:

$$r_1 = -h + q; \quad r_2 = -h - q, \tag{64}$$

и мы имеем [**27**]:

$$x = C_1 e^{(q-h)t} + C_2 e^{-(q+h)t}. \tag{65}$$

При этом очевидно, что $q < h$, и оба корня (64) отрицательны, а потому $x$ стремится к нулю при беспредельном возрастании $t$.

Дифференцируем равенство (65) по $t$:

$$x' = C_1(q - h)e^{(q-h)t} - C_2(q + h)e^{-(q+h)t}. \tag{66}$$

Полагая в равенствах (65) и (66) $t = 0$, получим два уравнения для определения постоянных $C_1$ и $C_2$ через начальные данные (61):

$$C_1 + C_2 = x_0; \quad (q - h)C_1 - (q + h)C_2 = x'_0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{(q + h)x_0 + x'_0}{2q}; \quad C_2 = \frac{(q - h)x_0 - x'_0}{2q}.$$

3. Специальный случай апериодического движения. Если, наконец, $h^2 - k^2 = 0$, то уравнение (55) имеет кратный корень $r_1 = r_2 = -h$, и окажется [27]

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \tag{67}$$

Ввиду того, что при беспредельном возрастании $t$ функция $te^{-ht}$ стремится к нулю [I, 66], выражение (67) также стремится к нулю.

Неоднородное уравнение

$$x'' + 2hx' + k^2 x = f(t), \tag{68}$$

в котором свободный член $f(t)$ происходит от внешней силы, определяет *вынужденные колебания*. В случае чисто гармонического собственного колебания:

$$x'' + k^2 x = f(t) \tag{69}$$

мы имеем общий интеграл этого уравнения [28]:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du,$$

причем последнее слагаемое справа дает чисто вынужденное колебание, т. е. решение уравнения (69), удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x|_{t=0} = x'|_{t=0} = 0. \tag{70}$$

Пользуясь тем же методом вариации произвольных постоянных, можно показать, что в том случае, когда собственное колебание есть затухающее колебание, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (70), будет:

$$x_0(t) = \frac{1}{p} e^{-ht} \int_0^t e^{hu} f(u) \sin p(t-u)\, du, \tag{71}$$

и в апериодическом случае это частное решение будет:

$$x_0(t) = \frac{1}{2q} e^{(q-h)t} \int_0^t e^{(h-q)u} f(u)\, du - \frac{1}{2q} e^{-(q+h)t} \int_0^t e^{(q+h)u} f(u)\, du. \tag{72}$$

Предоставляем сделать это читателю.

**33. Синусоидальная внешняя сила и резонанс.** В приложениях свободный член часто бывает синусоидальной величиной:

$$x'' + 2hx' + k^2 x = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{73}$$

В настоящем случае будем искать решение уравнения в виде синусоидальной величины той же частоты $\omega$, что и в свободном члене [29]:

$$x = N \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta). \tag{74}$$

Надо определить амплитуду $N$ и сдвиг фазы $\delta$ этого колебания. Подставляем выражение (74) в уравнение (73):

$$-\omega^2 N \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta) + 2h\omega N \cos(\omega t + \varphi_0 + \delta) + k^2 N \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta) = \\ = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Аргумент тригонометрических функций, стоящих в левой части равенства, представим в виде суммы двух слагаемых $(\omega t + \varphi_0)$ и $\delta$. Пользуясь формулами для синуса и косинуса суммы, получим:

$$[(k^2 - \omega^2) N \cos\delta - 2h\omega N \sin\delta] \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ + [2h\omega N \cos\delta + (k^2 - \omega^2) N \sin\delta] \cos(\omega t + \varphi_0) = H_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Приравнивая коэффициент при $\sin(\omega t + \varphi_0)$ постоянной $H_0$ и при $\cos(\omega t + \varphi_0)$ нулю, получим два уравнения для определения $N$ и $\delta$:

$$(k^2 - \omega^2) N \cos\delta - 2h\omega N \sin\delta = H_0; \quad 2h\omega N \cos\delta + (k^2 - \omega^2) N \sin\delta = 0.$$

Решаем их относительно $\cos\delta$ и $\sin\delta$:

$$\cos\delta = \frac{(k^2 - \omega^2) H_0}{N[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]}; \quad \sin\delta = -\frac{2h\omega H_0}{N[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]}.$$

Возводя почленно в квадрат и складывая, получим:

$$1 = \frac{H_0^2}{N^2[(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2]},$$

откуда находим

$$N = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}. \tag{75}$$

Подставляя это значение $N$ в предыдущие выражения $\cos\delta$ и $\sin\delta$, получим формулы для определения $\delta$:

$$\cos\delta = \frac{k^2 - \omega^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}; \quad \sin\delta = -\frac{2h\omega}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}. \tag{76}$$

Имея значения $N$ и $\delta$, согласно формуле (74) будем иметь синусоидальное частное решение уравнения (73). Общее решение этого уравнения будет

$$x = Ae^{-ht} \sin(pt + \varphi) + N \sin(\omega t + \varphi_0 + \delta), \tag{77}$$

где $A$ и $\varphi$ — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. При этом мы считаем, что $h^2 - k^2 = -p^2 < 0$, т. е. что собственные колебания суть затухающие колебания. Ввиду наличия множителя $e^{-ht}$ $(h > 0)$ первое слагаемое в выражении (77) быстро убывает при увеличении $t$, так что это слагаемое заметно влияет на величину $x$ лишь при $t$, близких к нулю (устанавливающийся процесс), а в дальнейшем величина $x$ определяется почти исключительно вторым чисто синусоидальным слагаемым, не зависящим от начальных условий (установившийся процесс).

Исследуем теперь формулы (75) и (76), служащие для определения амплитуды $N$ и разности фаз $\delta$ решения (74) и свободного члена в уравнении (73).

Если бы в правой части уравнения (73) стояла только постоянная $H_0$, то уравнение

$$x'' + 2hx' + k^2 x = H_0$$

имело бы очевидное частное решение в виде постоянной

$$\xi_0 = \frac{H_0}{k^2}.$$

Эта постоянная есть величина того *статического отклонения,* которое произвела бы постоянная сила.

Введем в рассмотрение отношение

$$\lambda = \frac{N}{\xi_0},$$

которое служит мерою *динамической восприимчивости* системы по отношению к действующей внешней силе. Принимая во внимание формулу (75) и выражение $\xi_0$, получим:

$$\lambda = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{k^2} \cdot \frac{\omega^2}{k^2}}}.$$

Из последнего выражения видно, что $\lambda$ зависит только от двух отношений:

$$q = \frac{\omega}{k}; \quad \gamma = \frac{2h}{k}. \tag{78}$$

Выясним механический смысл первого отношения. Если бы сопротивление отсутствовало, то собственные колебания выражались бы по формуле (60)

$$x = A \sin(kt + \varphi)$$

и имели бы период $\tau = \frac{2\pi}{k}$. Период возмущающей силы обозначим через $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для $q$ получим тогда

$$q = \frac{\tau}{T}, \tag{79}$$

т. е. $q$ равно отношению периода свободного колебания системы без сопротивления к периоду возмущающей силы.

Таким образом для величины $\lambda$ получим:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \gamma^2 q^2}}, \tag{80}$$



Черт. 23.

где значение $q$ объяснено выше, а постоянная $\gamma$, как это видно из ее определения, не зависит от действующей внешней силы. Ввиду малости $h$ постоянная $\gamma$ обычно мала, и если $q$ не близко к единице, то $\lambda$ близко к величине $\frac{1}{1 - q^2}$. На черт. 23 представлены графики величины $\lambda$, как функции $q$, при нескольких заданных значениях $\gamma$.

Деля числитель и знаменатель в выражениях (76) на $k^2$, получим формулы:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta &= (1 - q^2)\lambda; \\ \sin\delta &= -\gamma q \lambda, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

которые определяют разность фаз внешней силы и произведенного ею возмущения.

Величина $\lambda$ зависит от периода $T$ внешней силы через посредство величины $q$. Найдем максимум величины $\lambda$ как функции от $q$. Для этого достаточно найти минимум

$$\frac{1}{\lambda^2} = (1 - q^2)^2 + \gamma^2 q^2$$

как функции от $q^2$. Как нетрудно видеть, этот минимум будет достигаться при $q^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$ и будет равен $\left(\gamma^2 - \frac{\gamma^4}{4}\right)$. Отсюда следует, что максимум $\lambda$ будет достигаться при

$$q = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}} \tag{82}$$

и будет равен

$$\lambda_{max} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}.$$

При малом $\gamma$ величина $q$, которой соответствует максимум $\lambda$, близка к единице, т. е. период внешней силы, производящей, при данной ее амплитуде, наибольший эффект, близок к периоду свободного колебания. Разница между этими периодами, зависящими от величины $\gamma$, обуславливается наличием сопротивления.

Если сопротивление отсутствует, то $\gamma = 0$, и максимум $\lambda$ достигается при $q = 1$ и равен бесконечности.

В этом случае, характеризуемом условием $h = 0$ и $\omega = k$, уравнение (73) будет

$$x'' + k^2 x = H_0 \sin(kt + \varphi_0), \tag{83}$$

и его решение уже нельзя искать в виде (74).

Предоставляем читателю проверить, что уравнение (83) будет иметь решение

$$x = -\frac{H_0}{2k} t \cos(kt + \varphi_0),$$

которое содержит $t$ множителем [**29**].

Вернемся вновь к рассмотрению того случая, когда имеется сопротивление, т. е. $h \neq 0$. Как видно из графика, величина $\lambda$, быстро возрастая перед максимумом, быстро убывает после него. В этом нетрудно убедиться и из формулы (80) при малом $\gamma$. Подставляя в формулы (81) $\lambda_{max}$ и выражение $q$ из формулы (82), получим:

$$\cos\delta = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}; \quad \sin\delta = -\frac{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}},$$

откуда видно, что при наибольшем эффекте внешней силы и малом $\gamma$ разность фаз $\delta$ близка к $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Возвратимся теперь к формуле (77). При сравнительно уже небольших значениях $t$ первое слагаемое, дающее собственные затухающие колебания, будет мало по сравнению со вторым. Будем теперь менять величину $\omega$, т. е. период $T$ возмущающей силы. В силу вышесказанного при этом будет иметь

место следующее явление: при приближении $T$ к некоторому определенному значению вынужденные колебания будут быстро возрастать, достигнут максимума и затем при дальнейшем изменении $T$ будут быстро падать. Это явление называется *резонансом*. Оно встречается при самых разнообразных явлениях, где мы имеем дело с колебаниями: при колебании материальных систем, при электрических колебаниях, в явлениях звука и т. д.

Положим теперь, что правая часть уравнения содержит сумму нескольких синусоидальных величин:

$$x'' + 2hx' + k^2x = \sum_{i=1}^{m} H_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \tag{84}$$

Каждому слагаемому правой части уравнения соответствует некоторое свое вынужденное колебание вида

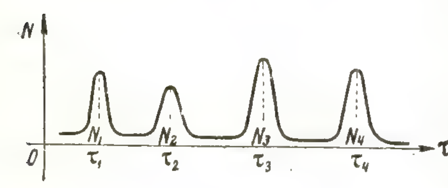
$$N_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \delta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

причем $N_i$ и $\delta_i$ определяются по формулам (75) и (76), если правая часть уравнения известна. Сумме всех внешних сил будет соответствовать сумма указанных выше вынужденных колебаний, т. е. частное решение уравнений (84) будет [29]

$$x = \sum_{i=1}^{m} N_i \sin(\omega_i t + \varphi_i + \delta_i). \tag{85}$$

Покажем теперь, каким образом, наблюдая вынужденное колебание, можно определить амплитуды и периоды слагаемых в правой части уравнения (84), если они неизвестны.

Положим, что мы можем изменять величину $k^2$, т. е. период $\tau$ свободных колебаний. При этом будет иметь место следующее явление: при приближении $\tau$ к некоторой величине $\tau_1$ амплитуда вынужденных колебаний будет быстро возрастать, достигнет максимума и при дальнейшем изменении $\tau$ быстро упадет и будет оставаться малой, пока период $\tau$ не приблизится в величине $\tau_2$, которой будет соответствовать второй максимум амплитуды вышеописанного характера и т. д.




Черт. 24.

Эти максимумы объясняются явлением резонанса с одной из внешних сил, стоящих в правой части уравнения (84), и величины $\tau_1, \tau_2, \ldots$ дают приближенное значение периодов этих внешних сил. Откладывая по оси абсцисс периоды свободных колебаний, а по оси ординат амплитуды вынужденных колебаний, получим кривую с несколькими максимумами (черт. 24).

При $\tau = \tau_j$ $\left(\text{или } k = k_j = \dfrac{2\pi}{\tau_j}\right)$ в сумме (85) будет велик по сравнению с другим один член, а именно тот, у которого $\omega_j$ близко к $k_j$. Наблюдая из опыта максимальную величину амплитуды вынужденного колебания, мы можем считать ее приблизительно равной $N_j$ и из формулы

$$N_j \approx \frac{H_j}{\sqrt{(k_j - \omega_j)^2 + 4h^2\omega_j^2}},$$

принимая во внимание, что $k_j$ близко к $\omega_j$, сможем найти приближенное значение напряжения силы:

$$H_j \approx 2hk_jN_j.$$

**34. Внешняя сила типа импульса.** Рассмотрим вынужденные колебания без трения

$$x'' + k^2 x = f(t) \tag{86}$$

и положим, что внешняя сила $f(t)$ имеет особый характер, а именно действует лишь короткий промежуток времени от $t = 0$ до $t = T$, и что она за этот промежуток времени сначала возрастает от нуля до некоторого положительного максимума, а затем убывает до нуля (черт. 25).

Общее решение уравнения (86) имеет вид [32]

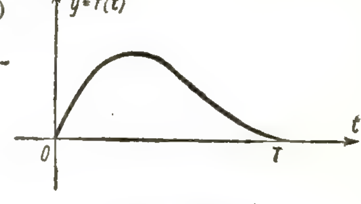
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du.$$

Пусть при $t = 0$ система находилась в положении равновесия без начальной скорости:

$$x|_{t=0} = x'|_{t=0} = 0. \tag{87}$$

Этим начальным условиям, как известно, соответствует частное решение

$$x = \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u)\, du,$$




Черт. 25.

которое мы и будем здесь исследовать.

При $t > T$ весь интеграл приведется к интегралу по промежутку $(0, T)$, так как по условию

$$f(u) = 0 \quad \text{при} \quad u > T.$$

Следовательно

$$x = \frac{1}{k} \int_0^T f(u) \sin k(t-u)\, du \quad \text{при } t > T,$$

или

$$x = \frac{1}{k} \sin kt \int_0^T f(u) \cos ku\, du - \frac{1}{k} \cos kt \int_0^T f(u) \sin ku\, du.$$

Принимая во внимание, что в промежутке $(0, T)$ функция $f(u)$ по условию положительна, можем применить к написанным интегралам теорему о среднем [I, 95]

$$\int_0^T f(u) \cos ku\, du = \cos k\theta_1 T \int_0^T f(u)\, du$$

$$(0 < \theta_1 \text{ и } \theta_2 < 1)$$

$$\int_0^T f(u) \sin ku\, du = \sin k\theta_2 T \int_0^T f(u)\, du.$$

Положим, что продолжительность действия внешней силы $T$ мала по сравнению с периодом собственных колебаний $\tau = \frac{2\pi}{k}$.

Произведение $kT = 2\pi \frac{T}{\tau}$ будет тогда малой величиной, и если мы заменим $\cos k\theta_1 T$ единицей и $\sin k\theta_2 T$ нулем, то получим:

$$x = \frac{1}{k} I \sin kt, \tag{88}$$

где

$$I = \int_0^T f(t)\, dt$$

есть величина импульса внешней силы.

Формула (88) совпадает, как это нетрудно проверить, с формулой для решения уравнения:

$$x'' + k^2 x = 0$$

при начальных условиях [32]:

$$x\,|_{t=0} = 0; \qquad x'\,|_{t=0} = I,$$

т. е. *если продолжительность действия внешней силы мала по сравнению с периодом собственных колебаний, то по истечении действия силы колебания системы будут происходить так же, как свободные колебания системы, вышедшей из положения равновесия с начальной скоростью I.*

**35. Внешняя сила, действующая статически.** Сделаем теперь относительно силы $f(t)$ другое предположение, а именно—пусть весь промежуток действия силы $(0, T)$ разбивается на два промежутка $(0, T_1)$ и $(T_1, T)$ такие, что в первом сила нарастает, а во втором убывает, и предположим, кроме того, что период собственных колебаний $\tau = \frac{2\pi}{k}$ мал по сравнению с общей продолжительностью нарастания (и убывания) силы.

Вернемся к решению уравнения (86) при начальных условиях (87). Интегрируя по частям и принимая во внимание, что $f(0) = 0$, получим:

$$x = \frac{1}{k^2} f(u) \cos k(t-u) \Big|_{u=0}^{u=t} - \frac{1}{k^2} \int_0^t f'(u) \cos k(t-u)\, du =$$

$$= \frac{1}{k^2} f(t) - \frac{1}{k^2} \int_0^t f'(u) \cos k(t-u)\, du. \tag{89}$$

Первое слагаемое $\frac{1}{k^2} f(t)$ называется *статическим отклонением*, производимым силою $f(t)$. Мы получим это выражение из уравнения (86), если отбросим член $x''$, т. е. если пренебрежем динамическим характером действия силы.

Второе слагаемое дает поправку, которую нужно придать к статическому действию, чтобы получить действительное динамическое действие силы. Это второе слагаемое можно представить в виде

$$-\frac{1}{k^2} \int_0^t f'(u) \cos k(t-u)\, du =$$

$$= -\frac{1}{k^2} \cos kt \int_0^t f'(u) \cos ku\, du - \frac{1}{k^2} \sin kt \int_0^t f'(u) \sin ku\, du. \tag{90}$$

Рассмотрим промежуток нарастания силы, т. е. случай $t < T_1$. Относительно первой производной $f'(t)$, положительной в промежутке $(0, T_1)$, мы сделаем для простоты рассуждений предположение, что она убывает в этом промежутке, т. е. что нарастание силы замедляется с течением времени. Покажем, что при сделанных предположениях два интеграла, стоящие в правой части равенства (90), будут малы по абсолютному значению. Мы рассмотрим лишь интеграл, содержащий $\sin ku$. Рассмотрение другого интеграла может быть произведено аналогичным образом.

Разобьем весь промежуток интегрирования $(0, t)$ на части, равные полупериоду собственных колебаний $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{k}$, и пусть число полных полупериодов, заключающихся в $t$, есть $m$, так что

$$m\frac{\tau}{2} < t \leq (m+1)\frac{\tau}{2}.$$

Тогда окажется:

$$\int_0^t f'(u)\sin ku\,du = \int_0^{\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} f'(u)\sin ku\,du + \ldots +$$

$$+ \int_{(m-1)\frac{\tau}{2}}^{m\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du + \int_{m\frac{\tau}{2}}^{t} f'(u)\sin ku\,du,$$

и последний промежуток $\left(m\frac{\tau}{2}, t\right)$ будет, вообще говоря, меньше $\frac{\tau}{2}$.

В каждом из промежутков, на которые мы разбили весь промежуток интегрирования, $\sin ku$ не меняет знака, а потому, применяя теорему о среднем [I, 95] и замечая, что $k\tau = 2\pi$, можем написать

$$\int_{s\frac{\tau}{2}}^{(s+1)\frac{\tau}{2}} f'(u)\sin ku\,du = f'(u_s)\int_{s\frac{\tau}{2}}^{(s+1)\frac{\tau}{2}} \sin ku\,du = -\frac{1}{k}f'(u_s)\left[\cos ku\right]_{u=s\frac{\tau}{2}}^{u=(s+1)\frac{\tau}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{k}f'(u_s)\left[\cos(s+1)\pi - \cos s\pi\right] = (-1)^s\frac{2}{k}f'(u_s) = (-1)^s\frac{\tau}{\pi}f'(u_s),$$

где

$$s\frac{\tau}{2} < u_s < (s+1)\frac{\tau}{2} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Точно так же для последнего промежутка получим:

$$\int_{m\frac{\tau}{2}}^{t} f'(u)\sin ku\,du = (-1)^m\frac{\tau}{\pi}\theta f'(u_m), \quad \text{где } 0 < \theta \leq 1 \text{ и } m\frac{\tau}{2} < u_m < t.$$

Итак, мы имеем:

$$\int_0^t f'(u)\sin ku\,du = \frac{\tau}{\pi}[f'(u_0) - f'(u_1) + f'(u_2) - \ldots + \\ + (-1)^{m-1}f'(u_{m-1}) + (-1)^m\theta f'(u_m)].$$

В силу сделанного относительно $f'(t)$ предположения слагаемые знакопеременной суммы по мере удаления от начала убывают по абсолютному значению, а потому вся сумма имеет знак $(+)$, но меньше своего первого слагаемого [I, 123]:

$$0 < \int_0^t f'(u)\sin ku\,du < \frac{1}{\pi}\tau f'(u_1).$$

Произведение $\tau f'(u_1)$ при малом $\tau$ приближенно равно приращению функции $f(u)$ в промежутке $(u_1, u_1+\tau)$ [I, 50], т. е. произведение $\tau f'(u_1)$ приближенно равно изменению силы за промежуток времени, равный периоду собственных колебаний.

Если этот промежуток времени настолько мал по сравнению с полным промежутком нарастания силы, что упомянутое изменение силы можно считать ничтожным, то интегралы

$$\int_0^t f'(u)\sin ku\,du \quad \text{и} \quad \int_0^t f'(u)\cos ku\,du$$

будут малы по абсолютной величине, и второе слагаемое в правой части равенства (89) будет, в силу (90), величиной малой по сравнению с первым слагаемым. Рассмотрение промежутка убывания силы ничем не отличается от приведенного выше рассмотрения. Итак, *если период собственных колебаний мал по сравнению с общей продолжительностью действия силы, то отклонение, производимое этой силой, можно определить статически.*

Из предыдущих рассуждений вытекает, что малость $\tau$ по сравнению с $T$ должна быть такова, чтобы можно было пренебрегать изменением силы за промежуток времени $\tau$.

Если в промежутке нарастания силы производная $f'(t)$ не убывает все время, но имеет один максимум, что встречается часто на практике, то вышеприведенные рассуждения в существенных чертах остаются в силе. Различие будет лишь в том, что при оценке знакопеременной суммы нам придется разбить ее на две части, и в ней будет превалировать некоторое среднее слагаемое, соответствующее тому частному промежутку, в котором находится максимум $f'(t)$.

Возможность определять статически отклонение, производимое внешней силой, важно для приборов, предназначенных для записи этой внешней силы. В качестве примера упомянем об индикаторе паровой машины. Он сводится к цилиндру с находящимся в нем притертым поршнем. Этот последний воспринимает давление пара и сжимает упругую пружину.

Пусть $s$ — площадь поршня, $f_1(t)$ — величина давления пара, $k_1^2$ — жесткость пружины, $m$ — масса поршня и $x$ — его смещение. Уравнение движения поршня будет

$$mx'' = -k_1^2x + sf_1(t), \quad \text{или} \quad x'' + k^2x = f(t),$$

где

$$k^2 = \frac{k_1^2}{m} \quad \text{и} \quad f(t) = \frac{sf_1(t)}{m}.$$

Величина $x$ определяется по формуле (89). Второе слагаемое правой части этой формулы представляет собою погрешность прибора. Для того, чтобы оно было мало, надо чтобы период собственных колебаний поршня на пружине был мал по сравнению с продолжительностью действия силы. При этом запись индикатора будет весьма близкой к графику $f(t)$, т. е. к графику внешней силы (с точностью до постоянного множителя). Если же давление нарастает настолько быстро, что изменение давления за промежуток времени, равный периоду собственных колебаний, значительно, то показания индикатора будут значительно отличаться от графика давления[1]).

**36. Прочность тонкого упругого стержня, сжимаемого продольной силой (задача Эйлера).** Если тонкий прямолинейный упругий стержень $AB$, концы которого могут перемещаться по прямой $AB$ (черт. 26), находится под действием двух сил $P$, приложенных к его концам и сжимающих его вдоль оси, то при известной величине силы может произойти искривление оси стержня, которое и явится причиной его разрушения. Задача о нахождении силы, способной вызвать такое искривление (задача о так называемом „продольном изгибе" стержней), была впервые поставлена и решена Эйлером.

Пусть $l$ — длина стержня $AB$; $E$ — модуль упругости материала стержня; $I$ — момент инерции его поперечного сечения, которое мы будем считать постоянным вдоль всей длины стержня [16].

Направим ось $OX$ от конца $A$ стержня вдоль его оси к концу $B$, а ось $OY$ проведем перпендикулярно к $OX$ через точку $A$. Пусть $y$ означает ординату упругой линии стержня. Дифференциальное уравнение упругой линии в данном случае будет[2]):

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \tag{91}$$

или, полагая $q^2 = \frac{P}{EI}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q^2y = 0. \tag{92}$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$y = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx. \tag{93}$$



Черт. 26.

Так как концы $A$ и $B$ должны оставаться на оси $OX$, то будем иметь условия:

$$y\,|_{x=0} = y\,|_{x=l} = 0. \tag{94}$$

Отметим, что эти условия отличны от начальных условий. В начальных условиях задается значение функции $y$ и ее производной $y'$ при некотором определенном значении $x$. В условиях (94) задается только значение функции $y$, но зато при двух значениях независимой переменной, а именно на границах промежутка $(0, l)$. Эти условия называются поэтому *граничными* или *предельными* условиями.

Подставляем в общий интеграл (93) $x = 0$ и $x = l$:

$$0 = C_1;\quad 0 = C_1 \cos ql + C_2 \sin ql \quad \text{или} \quad C_1 = 0;\quad C_2 \sin ql = 0. \tag{95}$$

---

[1]) Более подробные указания по этому вопросу можно найти в статье академика А. Н. Крылова „Некоторые замечания о крешерах и индикаторах", Известия Академии наук, 1909.

[2]) Изгибающий момент одной из сил $P$ для любого сечения стержня равен, очевидно, $(-Py)$.

Эти уравнения имеют очевидное решение $C_1 = C_2 = 0$, что дает в силу (93) $y = 0$, т. е. прямолинейную форму стержня. Для того чтобы ось могла действительно искривиться, необходимо, чтобы $C_2 \neq 0$, но тогда нужно, чтобы $\sin ql = 0$. Для этого $q$ должно принять одно из значений

$$q = \frac{\pi s}{l} \quad (s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{96}$$

Первое решение $s = 0$ обращает $q$ и $y$ в нуль и дает опять прямолинейную упругую линию. Наименьшее значение $q$, отличное от нуля, получится при $s = 1$:

$$q_1 = \frac{\pi}{l}.$$

Подставляя это значение в равенство $q^2 = \frac{P}{EI}$, получим *наименьшую величину силы, способной вызывать искривление*:

$$P_1 = EIq_1^2 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{97}$$

или так называемую *критическую силу* (формула Эйлера).

Кривая, по которой изогнется стержень при $P = P_1$, будет иметь уравнение:

$$y = C_2 \sin \frac{\pi}{l} x,$$

т. е. представляет собою одну полуволну синусоиды (черт. 26). Состояние равновесия в этом случае не будет устойчивым, и возможны деформации значительной величины.

Положив в формуле (96) $s = 2$, найдем:

$$q_2 = \frac{2\pi}{l}.$$

Уравнение изогнутой оси стержня для этого случая будет

$$y = C_2 \sin \frac{2\pi}{l} x,$$

и кривая изгиба будет состоять из двух полуволн.

Сила $P_2$, необходимая для появления такой деформации, должна иметь величину

$$P_2 = EIq_2^2 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

т. е. в четыре раза более предыдущей.

Придавая $s$ последовательные целые значения, мы будем получать возможные формы равновесия изогнутой оси стержня. Они будут состоять из соответствующего числа синусоидальных полуволн, а силы, необходимые для появления таких искривлений, будут пропорциональны квадратам числа полуволн.

Необходимо только отметить, что дифференциальное уравнение (91) является приближенным в том отношении, что в нем кривизна изогнутой оси принята равной второй производной, и поэтому оно соответствует лишь явлениям, связанным с малыми деформациями оси стержня. Заключения же, выводимые из общего интеграла (93) этого уравнения относительно характера изгиба при силах $P$, вызывающих значительные изгибы стержня, уже неправильны и могут приводить к явно несообразным результатам.

Многочисленными опытами с длинными и тонкими стержнями обнаружено, что при постепенном нарастании силы $P$ стержень сначала сохраняет прямолинейную форму, при достижении же силою $P$ некоторой величины, близкой к силе $P_1$, определяемой формулой (97), появляется заметное искривление оси стержня, которое затем чрезвычайно быстро возрастает при увеличении $P$.

Отметим еще роль предельных условий (94). При наличии начальных условий решение линейного уравнения определяется единственным образом. При предельных условиях дело, как мы видим, обстоит иначе. Существуют такие исключительные значения (96) коэффициента $q$ в уравнении (92), что при предельных условиях (94) уравнение, кроме очевидного решения $y=0$, имеет еще решения, определенные с точностью до произвольного постоянного множителя. Совершенно аналогичное обстоятельство мы будет иметь в приводимом ниже примере [37].

**37. Вращающийся вал.** При быстром вращении тонких и длинных валов имеет место, как показывает опыт, следующее явление: при увеличнении угловой скорости $\omega$ она достигает такого значения $\omega=\omega_1$, при котором вал не сохраняет прямолинейной формы и начинает бить; при дальнейшем увеличении $\omega$ это биение сначала прекращается и затем вновь возникает при $\omega=\omega_2$ и т. д. Приведем объяснение этого явления и прием вычисления *критических скоростей*: $\omega_1, \omega_2, \ldots$

Вообще говоря, форма равновесия вращающегося вала будет прямая линия, но при указанных выше критических скоростях, кроме прямолинейной формы равновесия, вал может иметь и изогнутую форму динамического равновесия, и при этом всякая случайная причина может вызвать искривление вала, чем и объясняются биения.

Положим, что вал подперт на концах $x=0$, $x=l$, и обозначим, как всегда, через $y$ величину прогиба. При вращении на каждый элемент $dx$ изогнутого вала действует центробежная сила $\frac{p}{g}\omega^2 y\,dx$, где $p$ — вес единицы длины вала и $g$ — ускорение силы тяжести. Считая эту силу непрерывно распределенной нагрузкой, получим, в силу уравнений (25) и (32) [16]:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{p\omega^2}{g}y,$$

или, полагая

$$q=\sqrt[4]{\frac{p\omega^2}{gEI}}, \tag{98}$$

будем иметь:

$$y^{(\mathrm{IV})}-q^4y=0. \tag{99}$$

Соответствующее характеристическое уравнение $r^4-q^4=0$ имеет корни: $\pm q$; $\pm qi$, и общий интеграл уравнения (99) будет:

$$y=C_1e^{qx}+C_2e^{-qx}+C_3\cos qx+C_4\sin qx.$$

На подпертых концах прогиб и изгибающий момент должны быть равны нулю, т. е. должны иметь место четыре предельных условия:

$$y\Big|_{x=0}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=y\Big|_{x=l}=\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=l}=0,$$

которые, как нетрудно видеть, приводят к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}C_1+C_2+C_3=0;\quad C_1+C_2-C_3=0;\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}+C_3\cos ql+C_4\sin ql=0;\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}-C_3\cos ql-C_4\sin ql=0.\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Решению

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0 \qquad (101)$$

соответствует очевидно $y = 0$ тождественно, т. е. прямолинейная форма равновесия вала. Определим теперь те значения $q$, при которых система (100) имеет решения, отличные от (101).

Первые два уравнения дают:

$$C_1 = -C_2; \qquad C_3 = 0.$$

Подставляя в последние два уравнения, получим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0; \qquad C_4 \sin ql = 0.$$

Раз $C_4 \neq 0$, то должны быть $\sin ql = 0$, что дает для $q$ значения:

$$q = \frac{s\pi}{l} \quad (s = 1, 2, \ldots). \qquad (102)$$

Пользуясь формулой (98), получим выражение для критических скоростей

$$\omega_s = \frac{s^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{p}} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

**38. Символический метод.** Мы переходим теперь к изложению нового метода интегрирования одного линейного уравнения и систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Способ этот, соответственным образом обобщенный, применяется и к более сложным задачам. Сущность способа состоит в том, что мы будем обозначать символически операцию дифференцирования по независимой переменной $t$ множителем $D$, стоящим слева от той функции, которую надо дифференцировать, так что если $x$ есть некоторая функция $t$, то

$$Dx = \frac{dx}{dt},$$

и вообще при любом целом положительном $s$

$$D^s x = \frac{d^s x}{dt^s}. \qquad (103)$$

Если $a$ — постоянная, то очевидно

$$D^s(ax) = aD^s x, \qquad (104)$$

т. е. имеет место переместительный закон по отношению к произведению символического множителя на любой постоянный множитель. Если $F(D)$ есть полином от $D$ с постоянными коэффициентами:

$$F(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

то операция $F(D)x$ определяется так:

$$F(D)x = a_0 D^n x + a_1 D^{n-1} x + \ldots + a_{n-1} Dx + a_n x =$$
$$= a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x.$$

Если $\varphi_1(D)$ и $\varphi_2(D)$ — два полинома и $\varphi(D)$ — их произведение, то, принимая во внимание формулу (104) и очевидное равенство $D^{n_1}(D^{n_2}x) = D^{n_1+n_2}x$, будем иметь:

$$\varphi_1(D)[\varphi_2(D)x] = \varphi(D)x,$$

причем множители $\varphi_1(D)$ и $\varphi_2(D)$ можно переставлять.

Точно так же имеем, очевидно,

$$[\varphi_1(D) + \varphi_2(D)]x = \varphi_1(D)x + \varphi_2(D)x,$$

и полученный результат не зависит от порядка слагаемых $\varphi_1(D)$ и $\varphi_2(D)$.

Таким образом обычные правила сложения, вычитания и умножения распространяются и на введенные нами символические полиномы.

В силу (104) постоянный множитель можно выносить за знак символического полинома, т. е. наряду с формулой (104) мы имеем

$$F(D)(ax) = aF(D)x,$$

но этого нельзя делать, конечно, с множителем, зависящим от $t$. Докажем теперь следующую формулу:

$$F(D)(e^{mt}x) = e^{mt}F(D+m)x, \tag{105}$$

где $m$ — постоянная. Формула показывает, что *множитель вида $e^{mt}$ можно выносить за знак символического полинома, заменяя в этом последнем букву $D$ суммой $(D+m)$.*

Выражение $F(D)(e^{mt}x)$ состоит из слагаемых вида $a_{n-s}D^s(e^{mt}x)$, и достаточно доказать формулу (105) для каждого такого слагаемого, т. е. достаточно доказать формулу

$$D^s(e^{mt}x) = e^{mt}(D+m)^s x. \tag{106}$$

Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения, можем написать [**I, 53**]:

$$D^s(e^{mt}x) = \frac{d^s(e^{mt}x)}{dt^s} = (e^{mt})^{(s)}x + C_s^1(e^{mt})^{(s-1)}x' + C_s^2(e^{mt})^{(s-2)}x'' + \\ + \ldots + C_s^k(e^{mt})^{(s-k)}x^{(k)} + \ldots + e^{mt}x^{(s)},$$

где значки наверху в скобках указывают порядок производной по $t$, и $C_s^k$ есть число сочетаний из $s$ элементов по $k$. Принимая во внимание, что $(e^{mt})^{(p)} = m^p e^{mt}$ и $x^{(p)} = D^p x$, можем написать, вынося $e^{mt}$ за скобку:

$$D^s(e^{mt}x) = e^{mt}(m^s x + C_s^1 m^{s-1}Dx + C_s^2 m^{s-2}D^2x + \ldots + \\ + C_s^k m^{s-k}D^k x + \ldots + D^s x) = e^{mt}(m^s + C_s^1 m^{s-1}D + C_s^2 m^{s-2}D^2 + \\ + \ldots + C_s^k m^{s-k}D^k + \ldots + D^s)x.$$

Но правая часть совпадает с правой частью формулы (106). Таким образом эта формула и формула (105) доказаны.

Определим теперь отрицательные степени $D$, как операции, обратные дифференцированию, т. е. $D^{-s}f(t)$ определим, как решение уравнения

$$D^s x = f(t), \tag{107}$$

причем, для того чтобы придать символу $D^{-s}f(t)$ определенный смысл, условимся брать то решение написанного уравнения, которое удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$x\big|_{t=t_0} = x'\big|_{t=t_0} = \ldots = x^{(s-1)}\big|_{t=t_0} = 0. \tag{108}$$

Иначе говоря, будем считать [15]

$$D^{-s}f(t) = \frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}f(u)\,du. \tag{109}$$

Общее решение уравнения (107) будет тогда [15]:

$$x = D^{-s}f(t) + P_{s-1}(t) = \frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}f(u)\,du + P_{s-1}(t), \tag{110}$$

где $P_{s-1}(t)$ — полином $(s-1)$-й степени от $t$ с произвольными коэффициентами.

Более общую операцию $(D-\alpha)^{-s}f(t)$ определим, как решение уравнения

$$(D-\alpha)^s x = f(t), \tag{111}$$

удовлетворяющее условиям (108). Чтобы найти это решение, введем вместо $x$ новую неизвестную функцию $z$, полагая

$$x = e^{\alpha t}z. \tag{112}$$

Подставляя в уравнение (111) и пользуясь правилом, выраженным формулой (105), получим для $z$ уравнение

$$e^{\alpha t}(D+\alpha-\alpha)^s z = f(t) \quad \text{или} \quad D^s z = e^{-\alpha t}f(t). \tag{113}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$z\big|_{t=t_0} = z'\big|_{t=t_0} = \ldots = z^{(s-1)}\big|_{t=t_0} = 0, \tag{114}$$

может быть определено по формуле (109), если только в ней заменить $f(t)$ на $e^{-\alpha t}f(t)$:

$$z = \frac{1}{(s-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{s-1}e^{-\alpha u}f(u)\,du.$$

Но из формулы

$$D^j x = D^j e^{\alpha t} z = e^{\alpha t}(D+\alpha)^j z \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$$

вытекает, что если $z$ удовлетворяет условиям (114), то $x$, определяемое по формуле (112), удовлетворяет условиям (108). Подставляя найденное выражение $z$ в формулу (112), получим искомое решение уравнения (111):

$$(D-\alpha)^{-s} f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} e^{-\alpha u} f(u)\, du. \tag{115}$$

Общее решение этого уравнения получим, если умножим общее решение уравнения (113) на $e^{\alpha t}$, т. е. это общее решение будет

$$x = (D-\alpha)^{-s} f(t) + e^{\alpha t} P_{s-1}(t) =$$
$$= \frac{e^{\alpha t}}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} e^{-\alpha u} f(u)\, du + e^{\alpha t} P_{s-1}(t), \tag{116}$$

где $P_{s-1}(t)$ — полином от $t$ степени $(s-1)$ с произвольными коэффициентами.

В частности, полагая $f(t) = 0$, получим общее решение уравнения

$$(D-\alpha)^s x = 0 \tag{117}$$

в виде

$$x = e^{\alpha t} P_{s-1}(t). \tag{118}$$

**39. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.** Линейное однородное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0. \tag{119}$$

Обозначая символическим множителем $D$ операцию дифференцирования по $t$ и вводя полином

$$\varphi(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

можем написать уравнение в виде

$$\varphi(D)\, x = 0. \tag{120}$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (119):

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{121}$$

и пусть это уравнение имеет корни $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m$ кратности $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$:

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n. \tag{122}$$

Разлагая полином $\varphi(D)$ на множители, можем представить уравнение (120) в виде:

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\ldots(D-r_m)^{k_m}x=0. \qquad (123)$$

Уравнение

$$(D-r_m)^{k_m}x=0, \qquad (124)$$

согласно формуле (118) [**38**], имеет общее решение

$$x=e^{r_m t}P_{k_m-1}(t), \qquad (125)$$

где $P_{k_m-1}(t)$ — полином степени $(k_m-1)$ с произвольными коэффициентами.

Функция (125) будет, очевидно, решением и уравнения (123). Действительно, подставляя в это уравнение выражение (125), в результате операции $(D-r_m)^{k_m}$ получим нуль, и операция

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\ldots(D-r_{m-1})^{k_{m-1}},$$

произведенная над нулем, даст очевидно также нуль. Переставляя множители, мы могли бы поставить ближайшим к $x$ не множитель $(D-r_m)^{k_m}$, а какой-либо другой множитель $(D-r_s)^{k_s}$. Таким образом мы убеждаемся в существовании ряда частных решений:

$$x_s=e^{r_s t}P_{k_s-1}(t) \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \qquad (126)$$

где $P_{k_s-1}(t)$ — полином степени $(k_s-1)$ с произвольными коэффициентами.

Придавая в формуле (126) $s$ все значения от 1 до $m$ и складывая все полученные таким образом решения, будем иметь решение уравнения (123) [**26**]:

$$x=e^{r_1 t}P_{k_1-1}(t)+e^{r_2 t}P_{k_2-1}(t)+\ldots+e^{r_m t}P_{k_m-1}(t). \qquad (127)$$

Всякий полином $P_{k_s-1}(t)$ степени $(k_s-1)$ с произвольными коэффициентами содержит всего $k_s$ произвольных постоянных, и, следовательно, в силу соотношения (122), решение (127) содержит всего $n$ произвольных постоянных. Ввиду этого обстоятельства можно думать, что формула (127) дает общее решение уравнения (119), т. е. что всякое решение этого уравнения заключается в формуле (127).

При $m=1$ это было нами доказано выше формулой (118) из [**38**] и таким образом остается показать, что если наше утверждение справедливо для случая $(m-1)$ сомножителей вида $(D-r_s)^{k_s}$, то оно будет справедливо и для $m$ сомножителей. Докажем это. Уравнение (123) можно переписать в виде:

$$(D-r_1)^{k_1}(D-r_2)^{k_2}\ldots(D-r_{m-1})^{k_{m-1}}y=0,$$

где

$$y = (D - r_m)^{k_m} x.$$

Мы считаем доказанным наше утверждение для $(m-1)$ сомножителей, а потому для $y$ имеем общее решение:

$$y = (D - r_m)^{k_m} x = e^{r_1 t} Q_{k_1-1}(t) + e^{r_2 t} Q_{k_2-1}(t) + \ldots + \\ + e^{r_{m-1} t} Q_{k_{m-1}-1}(t),$$

где $Q_{k_s-1}(t)$ — произвольные полиномы степени $(k_s - 1)$. Полагая

$$x = e^{r_m t} z, \tag{128}$$

вынося $e^{r_m t}$ за знак символического полинома и деля обе части равенства на $e^{r_m t}$, получим:

$$D^{k_m} z = e^{(r_1 - r_m) t} Q_{k_1-1}(t) + e^{(r_2 - r_m) t} Q_{k_2-1}(t) + \ldots + \\ + e^{(r_{m-1} - r_m) t} Q_{k_{m-1}-1}(t).$$

Мы получим общее выражение для $z$, если проинтегрируем правую часть $k_m$ раз по $t$ и добавим полином степени $(k_m - 1)$ [**15**]. Но, как известно [**I, 201**], интеграл от произведения показательной функции $e^{\alpha t}$ на полином $k$-й степени от $t$ имеет тот же вид, т. е. $z$ должно иметь вид:

$$z = e^{(r_1 - r_m) t} P_{k_1-1}(t) + e^{(r_2 - r_m) t} P_{k_2-1}(t) + \ldots + \\ + e^{(r_{m-1} - r_m) t} P_{k_{m-1}-1}(t) + P_{k_m-1}(t).$$

В силу (128) получаем, что $x$ должен обязательно иметь вид, даваемый формулой (127), что и требовалось доказать.

В частности, если все корни характеристического уравнения простые, то все полиномы $P_{k_s-1}(t)$ будут нулевой степени ($k_s = 1$), т. е. будут просто произвольные постоянные $C_s$, и общее решение уравнения будет иметь вид

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}.$$

Среди корней уравнения (121), коэффициенты которого мы считаем вещественными, могут быть и комплексные. Соответствующие им слагаемые в решении (127) нетрудно привести к вещественному виду, преобразуя показательные функции в тригонометрические. Положим, что уравнение (121) имеет пару мнимых сопряженных корней $(\gamma \pm \delta i)$ кратности $k$. Им соответствует решение вида

$$e^{(\gamma + \delta i) t} S_{k-1}(t) + e^{(\gamma - \delta i) t} T_{k-1}(t) = e^{\gamma t} [e^{\delta t i} S_{k-1}(t) + e^{-\delta t i} T_{k-1}(t)],$$

где $S_{k-1}(t)$ и $T_{k-1}(t)$ — полиномы степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами. Подставив

$$e^{\delta t i} = \cos \delta t + i \sin \delta t; \quad e^{-\delta t i} = \cos \delta t - i \sin \delta t,$$

получим решение вида

$$e^{\gamma t}[U_{k-1}(t)\cos\delta t + V_{k-1}(t)\sin\delta t],$$

где $U_{k-1}(t)$ и $V_{k-1}(t)$ — полиномы степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами, связанные с $S_{k-1}(t)$ и $T_{k-1}(t)$ формулами

$$U_{k-1}(t) = S_{k-1}(t) + T_{k-1}(t);\quad V_{k-1}(t) = i[S_{k-1}(t) - T_{k-1}(t)].$$

Из сказанного вытекает следующее правило [27]: *чтобы проинтегрировать уравнение* (119), *надо составить соответствующее ему характеристическое уравнение* (121) *и найти его корни. Всякому вещественному корню $r = r'$ кратности $k'$ будет соответствовать решение вида:*

$$e^{r't}P_{k'-1}(t),$$

*где $P_{k'-1}(t)$ — полином степени $(k'-1)$ с произвольными коэффициентами; всякой паре мнимых сопряженных корней $r = \gamma \pm \delta i$ кратности $k$ соответствует решение вида*

$$e^{\gamma t}[U_{k-1}(t)\cos\delta t + V_{k-1}(t)\sin\delta t],$$

*где $U_{k-1}(t)$ и $V_{k-1}(t)$ — полиномы степени $(k-1)$ с произвольными коэффициентами. Складывая все таким образом полученные решения, будем иметь общее решение уравнения* (119). *В случае простых корней упомянутые полиномы суть произвольные постоянные.*

**40. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.** Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$\varphi(D)x = f(t), \tag{129}$$

где $f(t)$ — заданная функция. Общий интеграл соответствующего однородного уравнения мы уже умеем составить, и нам остается найти лишь частное решение уравнения (129), которое и надо прибавить к упомянутому общему интегралу однородного уравнения, чтобы получить общий интеграл уравнения (129) [25]. Можно найти упомянутое частное решение, пользуясь символическим способом. Разложим рациональную дробь $\frac{1}{\varphi(D)}$ на простейшие [I, 196]:

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}.$$

Определим функцию $\xi(t)$ по формуле

$$\xi(t) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s}\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q}f(t), \tag{130}$$

которая имеет вполне определенный смысл, так как, согласно формуле (115) из [38], каждое слагаемое правой части имеет определенный смысл:

$$\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q} f(t) = A_s^{(q)} \frac{e^{r_s t}}{(q-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{q-1} e^{-r_s u} f(u)\, du. \tag{131}$$

Нетрудно видеть, что формула (130) и дает решение уравнения (129). Действительно,

$$\varphi(D)\xi(t) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s} \varphi(D)\frac{A_s^{(q)}}{(D-r_s)^q} f(t).$$

Но, по определению символа $(D-r_s)^{-q}$, если к правой части (131) применить операцию $(D-r_s)^q$, то получится $A_s^{(q)} f(t)$. Полином $\varphi(D)$ делится на $(D-r_s)^q$, т. е. $\varphi(D) = \varphi_{sq}(D)(D-\alpha_s)^q$, где $\varphi_{sq}(D)$ — полином, и, следовательно, предыдущую формулу можно переписать так:

$$\varphi(D)\xi(t) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s} A_s^{(q)} \varphi_{sq}(D) f(t).$$

Но из разложения $\frac{1}{\varphi(D)}$ непосредственно вытекает, что

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{k_s} A_s^{(q)} \varphi_{sq}(D) = 1, \quad \text{и, следовательно,} \quad \varphi(D)\xi(t) = f(t),$$

т. е. формула (130) дает действительно решение уравнения (129). Мы видим, таким образом, что нахождение решения уравнения (129) при любой заданной функции $f(t)$ приводится к разложению рациональной дроби на простейшие и к квадратурам.

В некоторых частных случаях бывает проще отыскивать частное решение уравнения (129) не по общей формуле (130), а способом неопределенных коэффициентов, как это мы указывали в [29].

Заметим, что, пользуясь указанным выше символическим способом, легко получить формулы (71) и (72) из [32].

**41. Пример.** Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$x^{(IV)} + 2x'' + x = t\cos t. \tag{132}$$

Характеристическое уравнение в данном случае будет

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \quad \text{или} \quad (r^2+1)^2 = 0, \tag{133}$$

и оно имеет пару сопряженных корней $r = \pm i$ второй кратности. Общий интеграл однородного уравнения, соответствующего уравнению (132), будет

$$(C_1 t + C_2)\cos t + (C_2 t + C_4)\sin t. \tag{134}$$

Сравнивая свободный член уравнения с формулой (43) из [29], видим, что в данном случае $k = 0$, $l = 1$ и $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$. Числа $k \pm li = \pm i$ совпадают с парой корней второй кратности, так что решение уравнения (132), согласно [29], надо искать в виде

$$x = t^2 [(at + b) \cos t + (ct + d) \sin t]. \tag{135}$$

Вычисления будут проще, если мы преобразуем правую часть (132) к показательному виду. Делая это, а также написав левую часть в символической форме, перепишем (132) так:

$$(D^2 + 1)^2 x = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}. \tag{136}$$

Решение мы должны будем искать в виде

$$x = t^2 (at + b) e^{it} + t^2 (ct + d) e^{-it}. \tag{137}$$

Подставляем это выражение в левую часть уравнения

$$(D + i)^2 (D - i)^2 t^2 (at + b) e^{it} + (D + i)^2 (D - i)^2 t^2 (ct + d) e^{-it} = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Выносим $e^{it}$ и $e^{-it}$ за символический полином согласно правилу (111):

$$e^{it} (D + 2i)^2 D^2 (at^3 + bt^2) + e^{-it} (D - 2i)^2 D^2 (ct^3 + dt^2) = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it},$$

или, заменяя $D^2$ второй производной:

$$e^{it} (D^2 + 4iD - 4) (6at + 2b) + e^{-it} (D^2 - 4iD - 4) (6ct + 2d) = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Производим дифференцирование:

$$[-24at + (24ai - 8b)] e^{it} + [-24ct - (24ci + 8d)] e^{-it} = \frac{t}{2} e^{it} + \frac{t}{2} e^{-it}.$$

Отсюда по методу неопределенных коэффициентов:

$$-24a = \frac{1}{2}; \quad 24ai - 8b = 0; \quad -24c = \frac{1}{2}; \quad 24ci + 8d = 0,$$

или

$$a = -\frac{1}{48}; \quad b = \frac{1}{16} i; \quad c = -\frac{1}{48}; \quad d = \frac{1}{16} i.$$

Подставляя в (137), получим решение:

$$x = -\frac{t^3}{24} \cos t - \frac{t^2}{8} \sin t, \tag{138}$$

и общий интеграл уравнения (132) будет:

$$x = (C_1 t + C_2) \cos t + (C_3 t + C_4) \sin t - \frac{t^3}{24} \cos t - \frac{t^2}{8} \sin t. \tag{139}$$

## 42. Уравнение Эйлера.

**42. Уравнение Эйлера.** Это уравнение имеет вид

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} t x' + a_n x = 0, \tag{140}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные. Мы покажем, что оно приводится к уравнению с постоянными коэффициентами, если ввести вместо $t$ новую независимую переменную $\tau$ по формуле

$$t = e^{\tau}. \tag{141}$$

Операцию дифференцирования по $t$ будем попрежнему обозначать символическим множителем $D$, а дифференцирование по $\tau$ — символическим множителем $\delta$. Имеем очевидно

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = e^{\tau} \frac{dx}{dt},$$

или, в символических обозначениях:

$$Dx = e^{-\tau} \delta x. \tag{142}$$

Применяя к левой части операцию $D$, а к правой равносильную ей операцию $e^{-\tau}\delta$, получим:

$$D^2 x = e^{-\tau}\delta (e^{-\tau}\delta) x.$$

Вынося множитель $e^{-\tau}$ за знак $\delta$, согласно правилу, выраженному формулой (111), будем иметь:

$$D^2 x = e^{-2\tau} (\delta - 1) \delta x = e^{-2\tau} \delta (\delta - 1) x.$$

Из этой формулы и формулы (142) подмечаем следующую общую формулу:

$$D^s x = e^{-s\tau} \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1) x. \tag{143}$$

Надо доказать, что если эта формула справедлива для $s$ символических множителей, то она справедлива и для $(s+1)$ множителей. Применяя к левой части формулы (143), которую мы считаем справедливой, операцию $D$, а к правой равносильную ей операцию $e^{-\tau}\delta$, получим:

$$D^{s+1} x = e^{-\tau}\delta [e^{-s\tau}\delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1) x],$$

откуда, вынося $e^{-s\tau}$ за знак $\delta$:

$$D^{s+1} x = e^{-\tau} e^{-s\tau} (\delta - s) \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1) x =$$
$$= e^{-(s+1)\tau} \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1)(\delta - s) x,$$

что и доказывает справедливость формулы (143) при любом $s$.

Заменяя в этой формуле $e^{\tau}$ на $t$, можем переписать ее в виде:

$$t^s D^s x = \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1) x. \tag{144}$$

Таким образом, в результате преобразования (141) всякое слагаемое $a_{n-s} t^s x^{(s)}$ в левой части уравнения (140) заменяется слагаемым

$$a_{n-s} \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - s + 1) x,$$

не содержащим независимой переменной $\tau$, и мы получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$[\delta (\delta - 1) \ldots (\delta - n + 1) + a_1 \delta (\delta - 1) \ldots (\delta - n + 2) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} \delta + a_n] x = 0. \tag{145}$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение будет:

$$r(r-1)\ldots(r-n+1)+a_1r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots+$$
$$+a_{n-1}r+a_n=0, \qquad (146)$$

и общее решение уравнения (145):

$$x=e^{r_1\tau}P_{k_1-1}(\tau)+e^{r_2\tau}P_{k_2-1}(\tau)+\ldots+e^{r_m\tau}P_{k_m-1}(\tau),$$

где $r_s$ — корни уравнения (146), $k_s$ — кратности этих корней и $P_{k_s-1}(\tau)$ — полиномы степени $(k_s-1)$ с произвольными коэффициентами.

Пользуясь соотношением (141) и возвращаясь к прежней переменной, получим решение уравнения (140):

$$x=t^{r_1}P_{k_1-1}(\lg t)+t^{r_2}P_{k_2-1}(\lg t)+\ldots+t^{r_m}P_{k_m-1}(\lg t). \qquad (147)$$

Если все корни уравнения (146) простые, то решение уравнения (140) будет

$$x=C_1t^{r_1}+C_2t^{r_2}+\ldots+C_nt^{r_n}. \qquad (148)$$

Уравнение (146), как нетрудно видеть, получается, если искать решение уравнения (140) в виде $x=t^r$.

Если имеется неоднородное уравнение вида

$$t^nx^{(n)}+a_1t^{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}tx'+a_nx=t^aP(\lg t), \qquad (149)$$

где $P(\lg t)$ — полином от $\lg t$ степени $p$, то, пользуясь преобразованием (141), нетрудно показать, что решение уравнения (149) можно искать в виде:

$$x=(\lg t)^s t^aQ(\lg t), \qquad (150)$$

где $Q(\lg t)$ — полином степени $p$ от $\lg t$ и $s$ — число корней уравнения (146), равных $a$.

Вместо уравнения (140) можно рассматривать более общее уравнение вида:

$$(ct+d)^n x^{(n)}+a_1(ct+d)^{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}(ct+d)x'+a_nx=0. \qquad (151)$$

В этом случае вместо формулы (141) надо воспользоваться следующей формулой преобразования переменных:

$$ct+d=e^\tau,$$

и вместо формулы (144) будет иметь место формула

$$(ct+d)^s D^s x=c^s\delta(\delta-1)\ldots(\delta-s+1)x,$$

с помощью которой уравнение (151) и приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

**43. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.** Во многих случаях положение механической системы определяется не одной, а несколькими независимыми величинами $q_1$, $q_2, \ldots, q_k$, которые называются *координатными параметрами*. Их число $k$ дает *число степеней свободы*. Так, например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси мы имеем одну степень свободы — угол $\theta$ поворота тела вокруг оси. Вращение же тела вокруг неподвижной точки дает три степени свободы, и за координатные параметры можно, например, принять известные из кинематики твердого тела углы Эйлера: $\varphi$, $\psi$ и $\theta$. Движение точки по плоскости, или сфере, или какой-либо иной поверхности представляет собой движение с двумя степенями свободы. В случае плоскости координатными параметрами могут служить обычные прямоугольные координаты $x$ и $y$, а на сфере — долгота $\varphi$ и широта $\psi$.

При движении механической системы ее координатные параметры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ являются функциями от времени $t$ и определяются из системы дифференциальных уравнений и начальных условий. В частности, при рассмотрении малых колебаний системы около положения равновесия, которому соответствует значение параметров

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0,$$

обычно удерживают в дифференциальных уравнениях лишь члены первого измерения относительно $q_s$ и $\frac{dq_s}{dt}$ и таким образом получают систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждое из уравнений будет, вообще говоря, содержать все функции $q_s$ и их производные по $t$ первого и второго порядка.

В случае двух степеней свободы система будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} a_1 q_1'' + b_1 q_1' + c_1 q_1 + a_2 q_2'' + b_2 q_2' + c_2 q_2 = 0; \\ d_1 q_1'' + e_1 q_1' + f_1 q_1 + d_2 q_2'' + e_2 q_2' + f_2 q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

где $q_1'$, $q_1''$, $q_2'$, $q_2''$ — производные от $q_1$ и $q_2$ по $t$.

Обозначая, как и выше, символическим множителем $D$ операцию дифференцирования по $t$, можем переписать систему (152) так:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) q_1 + (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) q_2 = 0; \\ (d_1 D^2 + e_1 D + f_1) q_1 + (d_2 D^2 + e_2 D + f_2) q_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Если на систему действуют внешние силы, то в правой части уравнений будут не нули, а известные функции $t$.

Начальные условия имеют вид:

$$q_1|_{t=0} = q_{10}; \quad q_1'|_{t=0} = q_{10}'; \quad q_2|_{t=0} = q_{20}; \quad q_2'|_{t=0} = q_{20}',$$

где $q_{10}$, $q_{10}'$, $q_{20}$, $q_{20}'$ — заданные числа, и общий интеграл системы (153) должен содержать четыре произвольные постоянные.

Покажем, каким образом интегрирование системы (153) приводится к интегрированию одного линейного уравнения четвертого порядка с одной неизвестной функцией [ср. **20**]. Для этого введем вспомогательную функцию $V$ от $t$, полагая:

$$q_1 = -(a_2D^2 + b_2D + c_2)V; \qquad q_2 = (a_1D^2 + b_1D + c_1)V. \quad (154)$$

Подставляя эти выражения $q_1$ и $q_2$ в уравнения (153), увидим, что первое уравнение будет удовлетворено при любом выборе $V$, и остается выбрать функцию $V$ так, чтобы было удовлетворено и второе из уравнений (153).

Подставляя выражения (154) в это второе уравнение, получим для $V$ уравнение четвертого порядка: [1])

$$[(a_1D^2 + b_1D + c_1)(d_2D^2 + e_2D + f_2) -$$
$$-(a_2D^2 + b_2D + c_2)(d_1D^2 + e_1D + f_1)]V = 0. \quad (155)$$

Найдя $V$, получим $q_1$ и $q_2$ из (154) простым дифференцированием.

Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4$ — не кратные корни характеристического уравнения:

$$(a_1r^2 + b_1r + c_1)(d_2r^2 + e_2r + f_2) -$$
$$-(a_2r^2 + b_2r + c_2)(d_1r^2 + e_1r + f_1) = 0, \quad (156)$$

так что

$$V = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_3e^{r_3t} + C_4e^{r_4t}. \quad (157)$$

Подставляя это выражение в формулы (154) и принимая во внимание, что $De^{rt} = re^{rt}$ и $D^2e^{rt} = r^2e^{rt}$, получим общее выражение для $q_1$ и $q_2$. Оно будет представлять собою также линейную комбинацию четырех решений, каждое из которых будет содержать произвольный постоянный множитель. Так, например, решение $V = C_1e^{r_1t}$ даст:

$$q_1 = -C_1(a_2r_1^2 + b_2r_1 + c_2)e^{r_1t}; \quad q_2 = C_1(a_1r_1^2 + b_1r_1 + c_1)e^{r_1t}. \quad (158)$$

Если уравнение (156) имеет комплексные корни, что обычно и встречается в приложениях, то решение уравнений (155) полезно писать в тригонометрической форме, так что паре сопряженных корней $r = a \pm bi$ будут соответствовать решения для $V$:

$$C_1e^{at}\cos bt \quad \text{и} \quad C_2e^{at}\sin bt.$$

Точно так же, если уравнение (156) имеет двукратный корень $r_1 = r_2$, то решения будут:

$$C_1e^{r_1t} \quad \text{и} \quad C_2te^{r_1t}.$$

---

[1]) Мы предполагаем, что $a_1d_2 - a_2d_1 \neq 0$; этот случай имеет всегда место при рассмотрении движения материальной системы.

Отметим теперь тот случай, когда предыдущие вычисления не дадут для $q_1$ и $q_2$ общего решения, содержащего четыре произвольные постоянные. Положим, что для некоторого корня $r_1$ уравнение (156) будет

$$a_1r_1^2+b_1r_1+c_1=a_2r_1^2+b_2r_1+c_2=0. \tag{159}$$

В этом случае формулы (158) дадут для $q_1$ и $q_2$ тождественно нуль, и общее решение системы не будет содержать произвольной постоянной $C_1$. Мы можем попытаться восстановить эту потерянную произвольную постоянную тем путем, что для введения вспомогательной функции $V$ воспользуемся вместо уравнений (154) уравнениями

$$q_1=(d_2D^2+e_2D+f_2)V; \quad q_2=-(d_1D^2+e_1D+f_1)V. \tag{160}$$

При этом второе из уравнений (153) будет удовлетворено при всяком выборе $V$, и подставляя выражения (160) в первое из уравнений (153), получим для $V$ то же уравнение (155), что и выше. При этом корень $r_1$ характеристического уравнения (156) даст для $q_1$ и $q_2$ вместо (158) выражения

$$q_1=C_1(d_2r_1^2+e_2r_1+f_2)e^{r_1t}; \quad q_2=-C_1(d_1r_1^2+e_1r_1+f_1)e^{r_1t}.$$

Если хоть один из множителей $(d_1r_1^2+e_1r_1+f_1)$ и $(d_2r_1^2+e_2r_1+f_2)$ будет отличен от нуля, то мы восстановим таким образом решение, соответствующее корню $r=r_1$ уравнения (156).

Остается еще рассмотреть тот случай, когда, кроме соотношений (159), имеют место соотношения

$$d_1r_1^2+e_1r_1+f_1=d_2r_1^2+e_2r_1+f_2=0. \tag{161}$$

При этом нам не удается указанным путем восстановить решение, соответствующее корню $r=r_1$ уравнения (156). Но раз выполнены соотношения (159) и (161), то каждый из квадратных трехчленов, стоящих в левой части уравнения (156), будет иметь корень $r=r_1$, т. е. будет содержать множитель $(r-r_1)$. Следовательно, при выполнении соотношений (159) и (161), корень $r=r_1$ должен быть кратным корнем уравнения (156). Ограничимся рассмотрением того случая, когда $r=r_1$ будет двукратным корнем, и укажем два решения системы, соответствующие этому двукратному корню. Эти два решения будут:

$$q_1=C_1e^{r_1t}; \quad q_2=0 \tag{162}$$

$$q_1=0; \quad q_2=C_2e^{r_1t}. \tag{163}$$

Действительно, подставляя, например, выражения (162) в левую часть уравнений (153), получим, в силу соотношений (159) и (161), тождества.

Указанные два решения будут различны, так как в первом $q_2$ есть тождественно нуль, а во втором $q_2$ отлично от нуля.

Заметим, что если в случае кратного корня $r_1 = r_2$ не выполняется, например, одно из соотношений (159), то, подставляя в формулы (154):

$$V = C_1 e^{r_1 t} \quad \text{и} \quad V = C_2 t e^{r_1 t},$$

мы получим решение (158) и решение, содержащее $t$ множителем:

$$q_1 = -C_2 (a_2 r_1^2 + b_2 r_1 + c_2) t e^{r_1 t} + C_2 p_1 e^{r_1 t};$$

$$q_2 = C_2 (a_1 r_1^2 + b_1 r_1 + c_1) t e^{r_1 t} + C_2 p_2 e^{r_1 t},$$

где $p_1$ и $p_2$ — определенные постоянные.

Общий интеграл неоднородной системы:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 D^2 + b_1 D + c_1) q_1 + (a_2 D^2 + b_2 D + c_2) q_2 = f_1(t); \\ (d_1 D^2 + e_1 D + f_1) q_1 + (d_2 D^2 + e_2 D + f_2) q_2 = f_2(t), \end{aligned}\right\} \quad (164)$$

как и в случае одного уравнения, представляет собою сумму общего интеграла соответствующей однородной системы (153) и какого-либо частного решения неоднородной системы. Если свободные члены $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют вид

$$A_0 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_0 e^{\alpha t} \sin \beta t = D e^{\alpha t} \sin (\beta t + \varphi),$$

то и частные решения можно искать в виде

$$q_1 = A_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_1 e^{\alpha t} \sin \beta t; \qquad q_2 = A_2 e^{\alpha t} \cos \beta t + B_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

если только $(\alpha \pm \beta i)$ не является корнем уравнения (156). Подставляя эти выражения в левые части уравнений (164) и приравнивая коэффициенты при $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$, получим уравнения для определения $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$.

Частные решения системы (164) можно получить при любых $f_1(t)$ и $f_2(t)$ так же, как мы это делали в случае одного уравнения **[40]**. Решая систему (164) относительно $q_1$ и $q_2$, получим, например, для $q_1$

$$q_1 = \frac{d_2 D^2 + e_2 D + f_2}{\Delta(D)} f_1(t) - \frac{a_2 D^2 + b_2 D + c_2}{\Delta(D)} f_2(t),$$

где через $\Delta(D)$ мы обозначили для краткости символический полином, стоящий в левой части уравнения (155). Разлагая рациональные дроби и пользуясь указанным в **[38]** значением символического множителя $(D - r)^{-k}$, мы и получим искомое решение системы (164).

Заметим еще, что, пользуясь рассуждениями из **[20]**, мы можем легко приводить интегрирование системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами к интегрированию одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами. В томе III мы дадим общий прием интегрирования систем уравнений с постоянными коэффициентами.

**44. Примеры. 1.** Рассмотрим систему

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z + x; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = y + 2x,$$

где $y$ и $z$ — искомые функции от $x$. Определяя из первого уравнения $z$:

$$z = \frac{d^2y}{dx^2} - x \tag{165}$$

и подставляя во второе уравнение, получим уравнение четвертого порядка для $y$:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 2x,$$

общий интеграл которого определяется по обычным правилам:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x.$$

Подставляя это выражение в формулу (165), получим выражение для $z$:

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x - x.$$

**2.** Рассмотрим систему трех уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y + z; \quad \frac{dy}{dt} = z + x; \quad \frac{dz}{dt} = x + y, \tag{166}$$

где $x$, $y$ и $z$ — искомые функции от $t$. Решая первое уравнение относительно $y$:

$$y = \frac{dx}{dt} - z \tag{167}$$

и подставляя это выражение в остальные два уравнения, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dz}{dt} = z + x; \quad \frac{dz}{dt} = x + \frac{dx}{dt} - z. \tag{168}$$

Подставляя выражение $\frac{dz}{dt}$ из второго уравнения в первое, получим уравнение второго порядка, содержащее одно только $x$ (исключительный случай):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

общий интеграл которого будет:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}. \tag{169$_1$}$$

Подставляя это во второе из уравнений (168), получаем уравнение первого порядка для $z$:

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_1e^{2t},$$

общий интеграл которого будет:

$$z = C_3e^{-t} + C_1e^{2t}. \tag{169$_2$}$$

Подставляя выражения ($169_1$) и ($169_2$) в формулу (167), получим выражение для $y$

$$y = C_1e^{2t} - (C_2 + C_3)\,e^{-t}. \tag{169$_3$}$$

Здесь получился тот исключительный случай, о котором мы уже упоминали в [20]. Вместо одного дифференциального уравнения третьего порядка

мы получили одно уравнение второго порядка и еще одно уравнение первого порядка.

3. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами встречаются не только при рассмотрении малых колебаний механических систем около положения равновесия, как мы уже упоминали выше, но и при исследовании электрических колебаний. Положим, что имеются две цепи, находящиеся в магнитной связи, т. е. ток одной из цепей создает магнитное поле, индуктирующее электродвижущую силу другой цепи. Если $i_1$ и $i_2$ — силы токов в цепях, то для первой цепи индуктированная электродвижущая сила будет $M\frac{di_2}{dt}$, а для второй $M\frac{di_1}{dt}$, где $M$ — постоянный коэффициент взаимной индукции. Если мы предположим, что ни в одной из цепей нет источника тока, то уравнения будут

$$L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}+R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1}i_1+M\frac{d^2i_2}{dt^2}=0; \tag{170}$$

$$M\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2\frac{d^2i_2}{dt_2}+R_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_2}i_2=0, \tag{171}$$

где $L_1$, $R_1$, $C_1$ — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость первой цепи, а $L_2$, $R_2$, $C_2$ — те же величины для второй цепи.

Покажем на примере этой системы, каким образом можно, не вводя вспомогательной функции $V$, исключить одну из неизвестных функций и составить одно дифференциальное уравнение четвертого порядка с одной неизвестной функцией.

Определяя из уравнения (171) $\frac{d^2i_2}{dt^2}$ и подставляя полученное выражение в уравнение (170), получим уравнение

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2}+L_2R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{L_2}{C_1}i_1-R_2M\frac{di_2}{dt}-\frac{M}{C_2}i_2=0. \tag{172}$$

Дифференцируя это уравнение и заменяя $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ его выражением

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2}=-L_1\frac{d^2i_1}{dt^2}-R_1\frac{di_1}{dt}-\frac{1}{C_1}i_1 \tag{173}$$

из уравнения (170), получим

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^2i_1}{dt^2}+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt}+$$
$$+\frac{R_2}{C_1}i_1-\frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt}=0. \tag{174}$$

Наконец, дифференцируя это уравнение еще раз и заменяя опять $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ выражением (173), придем к линейному уравнению четвертого порядка для $i_1$:

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^3i_1}{dt^3}+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2}+$$
$$+\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2}i_1=0. \tag{175}$$

Если бы мы стали исключать $i_1$, то для $i_2$ получили бы совершенно такое же уравнение четвертого порядка. Соответствующее ему характеристическое уравнение будет

$$(1-k^2)r^4+2(g_1+g_2)r^3+(n_1^2+n_2^2+4g_1g_2)r^2+\\ +2(g_1n_2^2+g_2n_1^2)r+n_1^2n_2^2=0, \quad (176)$$

где для краткости мы положили:

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}};\quad n_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}};\quad n_2=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}};\quad g_1=\frac{R_1}{2L_1};\quad g_2=\frac{R_2}{2L_2}.$$

Уравнение (176) можно переписать в виде:

$$(r^2+2g_1r+n_1^2)(r^2+2g_2r+n_2^2)-k^2r^4=0. \quad (177)$$

Если бы магнитной связи между цепями не было, то мы должны были бы в уравнениях (170) и (171) положить $M=0$ и получили бы два отдельных уравнения, определяющих явления разряда в цепях:

$$\frac{d^2i_1}{dt^2}+2g_1\frac{di_1}{dt}+n_1^2i_1=0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2i_2}{dt^2}+2g_2\frac{di_2}{dt}+n_2^2i_2=0. \quad (178)$$

Обыкновенно обе цепи бывают колебательными, иначе говоря, характеристические уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям (178)

$$r^2+2g_1r+n_1^2=0 \quad \text{и} \quad r^2+2g_2r+n_2^2=0, \quad (179)$$

имеют комплексные корни, т. е. $g_1^2-n_1^2<0$ и $g_2^2-n_2^2<0$, или

$$\frac{R_1}{2L_1}<\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \quad \text{и} \quad \frac{R_2}{2L_2}<\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},$$

или иначе

$$\frac{R_1}{2}<\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad \text{и} \quad \frac{R_2}{2}<\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}.$$

Уравнение (177) при $k=0$ дает две пары комплексных сопряженных корней [корни уравнений (179)], и при небольших значениях $M$, каковые обычно и встречаются на практике, уравнение (177) будет также иметь две пары комплексных сопряженных корней с отрицательными вещественными частями; $r_{1,2}=-a\pm bi$ и $r_{3,4}=-c\pm di$, и общее выражение для $i_1$ будет:

$$i_1=C_1e^{-at}\cos bt+C_2e^{-at}\sin bt+C_3e^{-ct}\cos dt+C_4e^{-ct}\sin dt.$$

Заметим, что, зная $i_1$, мы можем получить $i_2$ уже без всяких квадратур. Действительно, из уравнения (174) мы определим $\frac{di_2}{dt}$; подставляя найденное выражение в уравнение (172), получим уравнение первой степени относительно $i_2$. Выражение $i_2$ будет содержать члены того же вида, что и $i_1$, с коэффициентами, которые будут линейными комбинациями постоянных $C_1$, $C_2$, $C_3$ и $C_4$.

Если пренебречь сопротивлениями, т. е. считать $g_1=g_2=0$, и, кроме того, считать, что цепи настроены на одну и ту же частоту, т. е. $n_1=n_2=n$, то уравнение (177) будет

$$(1-k^2)r^4+2n^2r^2+n^4=0,$$

откуда

$$r^2 = \frac{-n^2 \pm kn^2}{1-k^2} = -\frac{n^2}{1 \pm k},$$

и

$$r_{1,2} = \pm \frac{n}{\sqrt{1+k}} i; \quad r_{3,4} = \pm \frac{n}{\sqrt{1-k}} i \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Этим чисто мнимым корням соответствует решение в виде тригонометрических функций. Таким образом при магнитной связи цепей, настроенных на одинаковую частоту, возникают два колебания, частоты которых зависят от общей частоты $n$ цепей и постоянной $k$, характеризующей магнитную связь следующим образом:

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1+k}}; \quad n'' = \frac{n}{\sqrt{1-k}}.$$

## § 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

**45. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда.** Решения линейного уравнения с переменными коэффициентами выше первого порядка, как мы уже говорили, не выражаются, вообще говоря, через элементарные функции, и интегрирование такого уравнения не приводится, вообще говоря, к квадратурам. Наиболее употребительным приемом является представление искомого решения в виде степенного ряда, о чем мы уже говорили [**13**]. Этот прием является особенно удобным именно в применении к линейным дифференциальным уравнениям. Мы ограничимся рассмотрением уравнения второго порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Положим, что коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представляются в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням $x$, так что уравнение имеет вид:

$$y'' + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)y' + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)y = 0. \tag{2}$$

Обращаем внимание на то, что коэффициент при $y''$ мы считаем равным единице.

Будем искать решение уравнения (2) также в виде степенного ряда

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s. \tag{3}$$

Подставив это выражение $y$ и его производных в уравнение (2) находим:

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)\alpha_s x^{s-2} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \cdot \sum_{s=1}^{\infty} s\alpha_s x^{s-1} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s = 0.$$

Перемножая степенные ряды, собирая подобные члены и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях $x$ в левой части

написанного равенства, получим ряд уравнений:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot 1\alpha_2+a_0\alpha_1+b_0\alpha_0=0 \\ x^1 & 3\cdot 2\alpha_3+2a_0\alpha_2+a_1\alpha_1+b_0\alpha_1+b_1\alpha_0=0 \\ x^2 & 4\cdot 3\alpha_4+3a_0\alpha_3+2a_1\alpha_2+a_2\alpha_1+b_0\alpha_2+b_1\alpha_1+b_2\alpha_0=0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x^s & (s+2)(s+1)\alpha_{s+2}+Q_s(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{s+1})=0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array}\right\}\qquad(4)$$

Через $Q_s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1})$ мы обозначили однородный полином первой степени от аргументов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1}$.

Каждое последующее из написанных уравнений содержит одним искомым коэффициентом больше предыдущего. Коэффициенты $\alpha_0$ и $\alpha_1$ остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных. Первое из уравнений (4) дает $\alpha_2$, а затем второе дает $\alpha_3$, третье $\alpha_4$ и т. д., и вообще из $(s+1)$-го уравнения можно определить $\alpha_{s+2}$, зная предыдущие $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s+1}$.

При этом удобно поступать следующим образом. Определим вышеуказанным способом два решения $y_1$ и $y_2$, причем для первого решения примем $\alpha_0=1$ и $\alpha_1=0$ и для второго $\alpha_0=0$ и $\alpha_1=1$, что равносильно следующим начальным условиям:

$$y_1\big|_{x=0}=1;\qquad y_1'\big|_{x=0}=0,$$
$$y_2\big|_{x=0}=0;\qquad y_2'\big|_{x=0}=1.$$

Всякое решение уравнения будет линейной комбинацией этих решений, и если начальные условия имеют вид

$$y\big|_{x=0}=A;\qquad y'\big|_{x=0}=B,$$

то очевидно

$$y=Ay_1+By_2.$$

Выше мы показали, что путем формальных вычислений можно постепенно определять коэффициенты степенного ряда (3). Но остается открытым вопрос о том, будет ли таким образом построенный степенной ряд сходящимся и будет ли он давать решение уравнения. В томе III мы дадим доказательство следующего предложения: *если ряды*

$$p(x)=\sum_{s=0}^{\infty}a_sx^s;\qquad q(x)=\sum_{s=0}^{\infty}b_sx^s$$

*сходятся при* $|x|<R$, *то при этих значениях* $x$ *построенный указанным выше образом степенной ряд будет также сходящимся и явится решением уравнения* (2). *В частности, если* $p(x)$ *и* $q(x)$ — *полиномы от* $x$, *то найденный степенной ряд будет сходиться при любом значении* $x$.

Во многих случаях линейное уравнение имеет вид

$$P_0(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_2(x)\,y = 0, \tag{5}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ — полиномы от $x$. Чтобы привести его к виду (1), надо разделить обе части уравнения на $P_0(x)$, так что в этом случае надо считать

$$p(x) = \frac{P_1(x)}{P_0(x)}; \qquad q(x) = \frac{P_2(x)}{P_0(x)}. \tag{6}$$

Если свободный член полинома $P_0(x)$ отличен от нуля, т. е. $P_0(0) \neq 0$, то, производя деление полиномов, расположенных по возрастающим степеням $x$, можно представить $p(x)$ и $q(x)$ в виде степенных рядов, и решение уравнения (5) также можно искать в виде степенного ряда. При этом нет необходимости приводить уравнение (5) к виду (1), но проще непосредственно подставить выражение (3) для $y$ в левую часть уравнения (5) и затем применить способ неопределенных коэффициентов.

До сих пор мы рассматривали лишь степенные ряды, расположенные по целым положительным степеням $x$. Вместо этого можно было бы пользоваться рядами, расположенными по степеням разности $(x - a)$.

Все сказанное выше, очевидно, применяется и к линейным уравнениям выше второго порядка. Только в этом случае при отыскании решения в виде степенного ряда остаются неопределенными не первые два коэффициента, но число их, равное порядку уравнения.

Если имеется линейное неоднородное уравнение

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x),$$

у которого не только коэффициенты, но и свободный член суть степенные ряды, то его частное решение также можно искать в виде степенного ряда.

Сделаем одно замечание по поводу формул (6). Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ два полинома от $x$, причем $P(0) \neq 0$. Производя, как выше было сказано, деление полиномов, можем представить их частное в виде степенного ряда

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots; \tag{7}$$

но возникает вопрос: будет ли ряд, стоящий справа, сходящимся, и если это так, то в каком промежутке он будет сходиться, и будет ли его сумма равна левой части равенства? Решение этих вопросов очень просто вытекает из теории функций комплексной переменной, которая будет изложена в томе III. Мы приведем здесь лишь окончательный результат: степенной ряд формулы (7) сходится при $|x| < R$, где $R$ — модуль (или абсолютное значение) того корня

уравнения $P(x)=0$, который имеет наименьший модуль, и равенство (7) имеет место при указанных значениях $x$. Отсюда вытекает, между прочим, что если интегрировать непосредственно уравнение (5) при помощи степенного ряда, то полученный ряд будет наверно сходящимся при $|x|<R$, где $R$ — модуль наименьшего по модулю корня уравнения $P_0(x)=0$.

Заметим, что если доказать сходимость ряда (3) внутри промежутка $(-R, +R)$, то отсюда будет непосредственно вытекать, что сумма этого ряда дает решение уравнения. Действительно, прежде всего, можно вычислять $y'$ и $y''$ простым почленным дифференцированием ряда (3) [**I, 150**]. Далее, подставляя выражения $y$, $y'$ и $y''$ в левую часть уравнения (2), мы можем почленно перемножать ряды $y'$ и $y$ на ряды $p(x)$ и $q(x)$ ввиду того, что степенные ряды сходятся абсолютно [**I; 137, 148**]. Наконец, в силу выбора коэффициентов $a_n$ из равенств (4), мы имеем сокращение всех членов в левой части (2).

**46. Примеры. 1.** Рассмотрим уравнение:

$$y''-xy=0.$$

Подставляя ряд (3), получим,

$$(2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\dots)-x(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)=0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2\cdot 1a_2=0\\
x^1 & 3\cdot 2a_3-a_0=0\\
x^2 & 4\cdot 3a_4-a_1=0\\
x^3 & 5\cdot 4a_5-a_2=0\\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\\
x^s & (s+2)(s+1)a_{s+2}-a_{s-1}=0\\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Полагая $a_0=1$ и $a_1=0$, получим последовательно значения остальных коэффициентов:

$$a_2=0;\quad a_3=\frac{1}{2\cdot 3};\quad a_4=a_5=0;\quad a_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6};\quad a_7=a_8=0;$$

$$a_9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9},$$

т. е. отличными от нуля будут лишь коэффициенты $a_s$, у которых значок $s$ делится на 3, и мы можем написать:

$$a_{3k+1}=a_{3k+2}=0\quad\text{и}\quad a_{3k}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3k-2)}{(3k)!}.$$

Построенное нами решение будет

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}.$$

Для построения второго решения положим $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. Нетрудно, как и выше, показать, что это второе решение будет

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}.$$

Построенные степенные ряды будут сходящимися при всяком значении $x$. Проверим это для ряда $y_1$ по признаку Даламбера [**I, 121**]. В нем отношение последующего члена к предыдущему будет

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k+1)}{(3k+3)!} x^{3k+3} : \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} = \frac{1}{(3k+2)(3k+3)} x^3,$$

и при любом значении $x$ абсолютное значение этого отношения стремится к нулю при беспредельном возрастании $k$, откуда и вытекает абсолютная сходимость ряда.

**2.** Рассмотрим уравнение:

$$(1 - x^2) y'' - xy' + a^2 y = 0.$$

Подставляя ряд (3), получим, приравнивая коэффициент при $x^n$ нулю, следующее соотношение между коэффициентами $\alpha_n$:

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} - n(n-1)\alpha_n - n\alpha_n + a^2\alpha_n = 0$$

или

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2} = (n^2 - a^2)\alpha_n.$$

Полагая $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$, получим решение:

$$y_1 = 1 - \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^2(a^2-4)}{4!} x^4 - \frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{6!} x^6 + \ldots$$

Совершенно так же, подставляя $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$, получим:

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!} x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-9)}{5!} x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-9)(a^2-25)}{7!} x^7 + \ldots$$

В рассматриваемом уравнении коэффициент $P_0(x) = 1 - x^2$ при $y''$ имеет корни $x = \pm 1$, а абсолютное значение обоих из этих корней равно единице. Отсюда вытекает, что ряды $y_1$ и $y_2$ должны сходиться при $-1 < x < +1$, т. е. при $|x| < 1$.

Нетрудно проверить это по признаку Даламбера. Беря отношение последующего члена к предыдущему, например, для ряда $y_1$, получим с точностью до знака:

$$\frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n)^2]}{(2n+2)!} x^{2n+2} : \frac{a^2(a^2-4)\ldots[a^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} x^{2n} =$$
$$= \frac{a^2-(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} x^2.$$

Деля числитель и знаменатель на $n^2$, можем переписать абсолютное значение этого отношения в виде:

$$\left| \frac{4 - \frac{a^2}{n^2}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \right| |x|^2.$$

При беспредельном возрастании $n$ это отношение стремится к $|x|^2$, и, очевидно, $|x|^2 < 1$ при $|x| < 1$, т. е., согласно признаку Даламбера, ряд $y_1$ абсолютно сходится при $|x| < 1$. Очевидно также, что он расходится при $|x| > 1$, если только $a$ не равно целому четному числу. В последнем случае ряд $y_1$ обрывается и превращается в полином. Аналогичные заключения получаются и для ряда $y_2$. Можно проверить, что решения $y_1$ и $y_2$ выражаются через элементарные функции, а именно

$$y_1 = \cos(a \arccos x); \quad y_2 = \frac{1}{a} \sin(a \arccos x).$$

**47. Разложение решения в обобщенный степенной ряд.** Значительное число уравнений, встречающихся в приложениях, имеет вид

$$x^2 y'' + p(x) \cdot xy' + q(x) y = 0,$$

где $p(x)$ и $q(x)$, как и в уравнении (2), — ряды, расположенные по целым положительным степеням $x$, или просто полиномы. Ввиду наличия множителя $x^2$ при второй производной написанное уравнение не подходит под тип (2). Говорят, что написанное уравнение имеет в точке $x = 0$ *регулярную особую точку*. Выписав явно степенные ряды $p(x)$ и $q(x)$

$$x^2 y'' + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) xy' + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) y = 0, \quad (8)$$

будем искать решение уравнения уже не в виде простого степенного ряда (3), а в виде произведения некоторой степени $x$ на такой ряд:

$$y = x^\rho \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s, \quad (9)$$

и первый коэффициент $\alpha_0$ мы можем, конечно, считать отличным от нуля ввиду неопределенности показателя степени $\rho$ у множителя $x^\rho$, стоящего перед знаком суммы.

Подставим в левую часть уравнения (8) выражения $y$, $y'$ и $y''$:

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^{\rho+s}; \quad y' = \sum_{s=0}^{\infty} (\rho + s) \alpha_s x^{\rho+s-1}; \quad y'' = \sum_{s=0}^{\infty} (\rho + s)(\rho + s - 1) \alpha_s x^{\rho+s-2}.$$

Собрав подобные члены и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях $x$, получим ряд уравнений:

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^\rho & [\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0]\,\alpha_0 = 0 \\
x^{\rho+1} & [(\rho+1)\rho + a_0(\rho+1) + b_0]\,\alpha_1 + a_1\rho\alpha_0 + b_1\alpha_0 = 0 \\
x^{\rho+2} & [(\rho+2)(\rho+1) + a_0(\rho+2) + b_0]\,\alpha_2 + a_1(\rho+1)\alpha_1 + a_2\rho\alpha_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 = 0 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x^{\rho+s} & [(\rho+s)(\rho+s-1) + a_0(\rho+s) + b_0]\,\alpha_s + Q_s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}) = 0. \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right\} (10)$$

Через $Q_s(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1})$ мы обозначили однородный полином первой степени от аргументов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$.

Ввиду того, что по условию $\alpha_0 \neq 0$, первое из написанных уравнений дает квадратное уравнение для определения показателя $\rho$:

$$F(\rho) = \rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0. \quad (11)$$

Уравнение это называется *определяющим уравнением*.

Пусть $\rho_1$ и $\rho_2$ — его корни. Полагая в уравнениях (10) $\rho = \rho_1$ или $\rho = \rho_2$, будем иметь ряд уравнений, из которых каждое последующее будет содержать одним коэффициентом $\alpha_s$ больше предыдущего, и таким образом постепенно можно будет определить $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Коэффициент $\alpha_0$ останется произвольным и будет играть роль произвольного множителя. Можно положить, например, $\alpha_0 = 1$.

После подстановки $\rho = \rho_1$ или $\rho = \rho_2$ первое из уравнений (10) обратится в тождество, второе даст $\alpha_1$, третье $\alpha_2$ и т. д., и вообще $(s+1)$-е даст $\alpha_s$, если уже известны $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$. При этом надо только, чтобы коэффициент при $\alpha_s$ в этом уравнении был отличен от нуля. Непосредственно видно, что этот коэффициент может быть получен из левой части уравнения (11) заменою $\rho$ на $(\rho_1 + s)$ или $(\rho_2 + s)$, т. е. он равен $F(\rho_1 + s)$ или $F(\rho_2 + s)$.

Положим, что при построении решения (9) мы исходили из корня уравнения (11) $\rho = \rho_2$. Если $F(\rho_2 + s) \neq 0$ при любом целом положительном $s$, то указанный выше прием вычисления коэффициентов $\alpha_s$ будет выполним и даст определенные значения для этих коэффициентов.

Условие же $F(\rho_2 + s) \neq 0$ равносильно, очевидно, тому условию, что второй корень $\rho_1$ уравнения (11) не есть число вида $(\rho_2 + s)$, где $s$ — целое положительное число, т. е., иначе говоря, разность корней $(\rho_1 - \rho_2)$ не должна быть целым положительным числом.

Из сказанного нетрудно вывести следующие заключения.

1. Если разность корней $\rho_1$ и $\rho_2$ уравнения (11) не равна целому числу или нулю, то можно использовать оба корня уравнения (11) и построить вышеуказанным способом два решения вида

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s; \quad y_2 = x^{\rho_2} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x^s \quad (\alpha_0 \text{ и } \beta_0 \neq 0). \tag{12}$$

2. Если разность $(\rho_1 - \rho_2)$ есть целое положительное число, то можно построить указанным выше способом, вообще говоря, лишь один ряд:

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s x^s. \tag{13}$$

3. Если уравнение (11) имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2$, то также можно построить лишь один ряд (13).

По поводу сходимости построенных рядов имеет место предложение, аналогичное предложению, приведенному нами в [45]: *если ряды*

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s \quad \text{и} \quad \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s$$

*сходятся при* $|x| < R$, *то при этих значениях* $x$ *построенные выше ряды также будут сходящимися и будут давать решения уравнения* (8).

К разобранному приводится уравнение:

$$x^2 P_0(x) y'' + x P_1(x) y' + P_2(x) y = 0, \tag{14}$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — полиномы или ряды, расположенные по целым положительным степеням $x$, причем $P_0(0) \neq 0$. Здесь, как и в [45], можно непосредственно подставлять ряд (9) в левую часть уравнения (14), не производя деление на $P_0(x)$. Кроме того, как и в [45], можно рассматривать ряды, расположенные по целым положительным степеням не $x$, а разности $(x - a)$.

В первом случае два построенных решения (12) будут линейно-независимыми, т. е. их отношение не будет величиной постоянной, что вытекает непосредственно из того факта, что выражения $y_1$ и $y_2$ содержат перед знаком

суммы различные степени $x^{\rho_1}$ и $x^{\rho_2}$. Во втором и третьем случаях мы построили только одно решение (13). Формула (9) из [24] дает возможность найти второе решение при помощи квадратуры. Пользуясь этой формулой, можно указать форму второго решения. Не приводя доказательства, мы формулируем лишь результат: если разность $(\rho_1 - \rho_2)$ есть целое положительное число или нуль, то наряду с решением (13) будет решение вида

$$y_2 = \beta y_1 \lg x + x^{\rho_2} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x^s. \tag{15}$$

Таким образом в рассматриваемом случае выражение $y_2$ отличается от обычного выражения (12) добавочным слагаемым вида $\beta y_1 \lg x$. Постоянная $\beta$ может оказаться и равной нулю, и тогда для $y_2$ получится выражение вида (12). Все высказанные выше утверждения будут доказаны нами в томе III.

**48. Уравнение Бесселя.** Это уравнение имеет вид

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\, y = 0, \tag{16}$$

где $p$ — заданная постоянная. Применения его встречаются в различных вопросах астрономии, физики и техники.

Сравнивая это уравнение с уравнением (8), видим, что $a_0 = 1$ и $b_0 = -p^2$, так что определяющее уравнение в данном случае будет

$$\rho(\rho - 1) + \rho - p^2 = 0 \quad \text{или} \quad \rho^2 - p^2 = 0,$$

и его корни

$$\rho_1 = p, \quad \rho_2 = -p.$$

Ищем решение в виде

$$y = x^p (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots).$$

Подставляя в левую часть уравнения (16) и приравнивая коэффициенты при различных степенях $x$ нулю, получим:

$$\begin{array}{r|l} x^{p+1} & [(p+1)^2 - p^2]\,\alpha_1 = 0 \\ x^{p+2} & [(p+2)^2 - p^2]\,\alpha_2 + \alpha_0 = 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{p+s} & [(p+s)^2 - p^2]\,\alpha_s + \alpha_{s-2} = 0. \end{array}$$

Подставляя $\alpha_0 = 1$ и вычисляя последовательно коэффициенты, придем к решению

$$y_1 = x^p \left[1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2p+2)(2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \ldots \right]. \tag{17}$$

Используя второй корень $\rho_2 = -p$, можем построить второе решение уравнения (16). Оно может быть получено, очевидно, из решения (17) простой заменой $p$ на $(-p)$, так как уравнение (16) содержит только $p^2$ и не меняется при замене $p$ на $(-p)$:

$$y_2 = x^{-p} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots \right]. \tag{18}$$

Разность корней определяющего уравнения равна $2p$, а следовательно, оба написанных решения будут годиться, если $p$ не равно целому числу или половине целого нечетного числа. Решение (17) с точностью до некоторого постоянного множителя дает бесселеву функцию $p$-го порядка, которую обозначают обычно через $J_p(x)$ и называют также цилиндрической функцией первого рода. Таким образом, если $p$ не есть целое число или половина целого нечетного числа, то общее решение уравнения (16) будет:

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x).$$

Степенной ряд, входящий в решение (17), сходится при любом значении $x$, в чем нетрудно убедиться по обычному признаку Даламбера.

Положим теперь, что $p = n$ есть целое положительное число. Решение (17) сохранит свою силу, а решение (18) потеряет силу, так как, начиная с некоторого числа, один из множителей в знаменателе членов разложения (18) будет равен нулю. При целом положительном $p = n$ бесселева функция $J_n(x)$ определяется из формулы (17) добавлением постоянного множителя $\frac{1}{2^n n!}$

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \ldots\right]. \tag{19}$$

Общий член в этом разложении будет

$$(-1)^s \frac{x^{n+2s}}{2^n \cdot n!\, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots 2s \cdot (2n+2)(2n+4)(2n+6)\ldots(2n+2s)}.$$

В знаменателе каждый из $2s$ множителей, стоящих после $2^n \cdot n!$, содержит множитель 2. Относя этот множитель к $2^n$, можем переписать общий член в виде

$$(-1)^s \frac{x^{n+2s}}{2^{n+2s} \cdot n!\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s \cdot (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+s)} =$$
$$= \frac{(-1)^s}{s! \cdot (n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s},$$

так что формула (19) может быть написана в виде

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \tag{20}$$

причем, как всегда, считается, что $0! = 1$. В частности при $n = 0$ получим:

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} =$$
$$= \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \tag{21}$$

В силу сказанного в [47] уравнение (16) при целом положительном $p = n$ будем иметь наряду с решением (20) второе решение вида

$$K_n(x) = \beta J_n(x) \lg x + x^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s x^s. \tag{22}$$

Это решение, очевидно, обращается в бесконечность при $x=0$.

Общий интеграл уравнения (16) при $p=n$ будет

$$y=C_1 J_n(x)+C_2 K_n(x). \tag{23}$$

Если мы хотим получить решение, конечное в точке $x=0$, то мы должны взять постоянную $C_2$ равной нулю, т. е. должны ограничиться решением (20).

Приведем более подробно вид решения (22) при $p=0$. В этом случае уравнение будет:

$$y''+\frac{1}{x}y'+y=0, \tag{24}$$

и одно из его решений дается формулой (21). Второе решение можно искать в виде

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots$$

Взяв линейную комбинацию этого решения с уже найденным, можем свободный член $\beta_0$ привести к нулю, так что окончательное решение можно искать в виде

$$\beta J_0(x)\lg x+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots$$

Подставляя это выражение в левую часть уравнения (24) и применяя способ неопределенных коэффициентов, последовательно определим коэффициенты $\beta_n$. Не приводя всех вычислений, мы только укажем окончательное выражение второго решения. При этом коэффициент $\beta$, который оказывается не равным нулю, мы полагаем равным единице:

$$K_0(x)=J_0(x)\lg x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots \tag{25}$$

Эта функция называется *бесселевой или цилиндрической функцией нулевого порядка второго рода.*

Положим, наконец, что $p=\frac{2n+1}{2}$ есть половина целого нечетного числа. Хотя в этом случае разность корней определяющего уравнения и равна целому числу $(2n+1)$, но оба решения (17) и (18) сохраняют силу и будут между собою линейно-независимыми, так как у одного множитель перед степенным рядом будет $x^{\frac{2n+1}{2}}$, а у другого $x^{-\frac{2n+1}{2}}$, и, следовательно, отношение этих двух решений не может быть постоянной величиной.

Подставляя, например, в решение (17) $p=\frac{1}{2}$, получим ряд:

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right]=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Умножая это решение на постоянный множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, получим бесселеву функцию $J_{\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{26}$$

Точно так же формула (18) даст

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \tag{27}$$

и общий интеграл уравнения (16) при $p=\frac{1}{2}$ будет:

$$y=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Укажем, не приводя доказательства, на то, что вообще бесселева функция со значком, равным половине нечетного числа, выражается через элементарные функции, а именно имеет вид:

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin x+Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos x\right],$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ и $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — полиномы от $1/x$. В частности:

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right);$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right];$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{x}\right);$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3}{x}\sin x+\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos x\right].$$

Кроме того, для любого целого положительного $n$ имеет место формула:

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(x)=(-1)^n\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{d(x^2)^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

В этой формуле надо четную функцию $\frac{\sin x}{x}$ дифференцировать $n$ раз по $x^2$.

**49. Уравнения, приводящиеся к уравнению Бесселя.** Укажем некоторые уравнения, которые приводятся к уравнению Бесселя (16) заменой переменных. Рассмотрим уравнение вида

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-p^2)\,y=0, \tag{28}$$

где $k$ — некоторая постоянная, отличная от нуля. Введем вместо $x$ новую независимую переменную $\xi=kx$. При этом надо будет в уравнении (28) заменить

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=k\frac{dy}{d\xi}\quad\text{и}\quad y''=\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{d\xi}\right)=k^2\frac{d^2y}{d\xi^2},$$

так что уравнение (28) перепишется

$$k^2x^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + kx \frac{dy}{d\xi} + (k^2x^2 - p^2)\, y = 0$$

или

$$\xi^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)\, y = 0,$$

а это есть уравнение Бесселя (16) с независимой переменной $\xi$. Таким образом, в силу $\xi = kx$, общий интеграл уравнения (28) будет:

$$y = C_1 J_p(kx) + C_2 J_{-p}(kx), \tag{29}$$

или, если $p = n$ есть целое положительное число или нуль:

$$y = C_1 J_n(kx) + C_2 K_n(kx). \tag{29$_1$}$$

Приведем еще обширный класс уравнений, приводящихся к уравнению Бесселя. Для этого введем в уравнение (16) новую независимую переменную $t$ и новую функцию $u$ по формулам

$$y = t^\alpha u \quad \text{и} \quad x = \gamma t^\beta, \tag{30}$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — постоянные, причем $\beta$ и $\gamma$ отличны от нуля. Дифференцируя, имеем очевидные равенства:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \left( \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-\beta}{\beta\gamma} t^{-\beta} \frac{dy}{dt} \right),$$

и, кроме того,

$$\frac{dy}{dt} = t^\alpha \frac{du}{dt} + \alpha t^{\alpha-1} u; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t^\alpha \frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha t^{\alpha-1} \frac{du}{dt} + \alpha(\alpha-1)\, t^{\alpha-2} u.$$

Подставляя выражения $y$, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в уравнение (16) и заменяя $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$ их последними выражениями через $u$, $\frac{du}{dt}$ и $\frac{d^2u}{dt^2}$, получим, после элементарных преобразований, уравнение для $u$:

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + (2\alpha + 1)\, t \frac{du}{dt} + (\alpha^2 - \beta^2 p^2 + \beta^2\gamma^2 t^{2\beta})\, u = 0. \tag{31}$$

Уравнение (16) имело общий интеграл

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x),$$

и, следовательно, в силу (30), уравнение (31) будет иметь общий интеграл

$$u = t^{-\alpha} y = C_1 t^{-\alpha} J_p(\gamma t^\beta) + C_2 t^{-\alpha} J_{-p}(\gamma t^\beta), \tag{32}$$

причем, если $p = n$ — целое положительное число или нуль, то $J_{-p}(\gamma t^\beta)$ надо заменить на $K_n(\gamma t^\beta)$.

Уравнение (31) есть уравнение вида

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + at \frac{du}{dt} + (b + ct^m)\, u = 0, \tag{33}$$

причем

$$2\alpha + 1 = a; \quad \alpha^2 - \beta^2 p^2 = b; \quad \beta^2\gamma^2 = c; \quad 2\beta = m. \tag{34}$$

Можно, наоборот, для любого заданного уравнения вида (33), при условии, что постоянные $c$ и $m$ отличны от нуля, найти по формулам (34) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $p$ и выразить общий интеграл уравнения (33), согласно формуле (32), через функции Бесселя.

Если $c$ или $m$ равно нулю, то уравнение (33) есть уравнение Эйлера [42] и приводится, следовательно, просто к уравнению с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим частный случай уравнения (33)

$$t\frac{d^2u}{dt^2}+a\frac{du}{dt}+tu=0. \tag{35}$$

Умножая уравнение на $t$, видим, что в данном случае $a$ — произвольно, $b=0$, $c=1$ и $m=2$. Уравнения (34) будут:

$$2\alpha+1=a; \quad \alpha^2-\beta^2p^2=0; \quad \beta^2\gamma^2=1; \quad 2\beta=2,$$

откуда можно считать

$$\alpha=\frac{a-1}{2}; \quad \beta=1; \quad \gamma=1; \quad p=\frac{a-1}{2},$$

и, согласно (32), общий интеграл (35) будет

$$u=C_1t^{\frac{1-a}{2}}J_{\frac{a-1}{2}}(t)+C_2t^{\frac{1-a}{2}}J_{\frac{1-a}{2}}(t),$$

причем, если, например, значок $\frac{1-a}{2}$ окажется целым отрицательным или нулем, то надо заменить $J_{\frac{1-a}{2}}$ на $K_{\frac{a-1}{2}}$. При $a=1$ уравнение (35) совпадает с уравнением (24).

Вообще уравнение (33) дает обширный класс линейных уравнений, часто встречающихся в приложениях, общий интеграл которых выражается, как мы видим, через функции Бесселя.

## § 5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**50. Метод последовательных приближений для линейных уравнений.** Мы уже несколько раз упоминали о теореме существования и единственности для дифференциальных уравнений. Приведем доказательство этой теоремы сначала для случая линейных дифференциальных уравнений. Для доказательства мы применим так называемый метод последовательных приближений, которым мы уже пользовались для приближенного вычисления корней уравнений [I, 193].

Для определенности рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений

$$\frac{dy}{dx}=p_1(x)y+q_1(x)z; \quad \frac{dz}{dx}=p_2(x)y+q_2(x)z \tag{1}$$

и начальные условия

$$y|_{x=x_0}=y_0; \quad z|_{x=x_0}=z_0. \tag{2}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнений (1) суть непрерывные функции $x$ в некотором конечном замкнутом промежутке $I\,(a \leqslant x \leqslant b)$, содержащем начальное значение $x_0$, и в дальнейшем изложении мы считаем, что $x$ принадлежит $I$.

Решения $y$ и $z$ системы (1) должны быть, конечно, непрерывными функциями, имеющими производную, и из самих уравнений видно, что и производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ будут непрерывными функциями, ибо при сделанных предположениях правые части уравнений (1) суть непрерывные функции. Интегрируя уравнения (1) почленно от $x_0$ до $x$ и принимая во внимание (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t)\,y(t) + q_1(t)\,z(t)]\,dt \\ z(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(t)\,y(t) + q_2(t)\,z(t)]\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь мы для отчетливости выписали аргументы у функций $y$ и $z$, а переменную интегрирования обозначили через $t$, чтобы не путать ее с верхним пределом интегрирования $x$. Итак, уравнения (1) с начальными условиями (2) приводят нас к уравнениям (3).

Покажем теперь, наоборот, что если непрерывные функции $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют уравнениям (3), то они удовлетворяют уравнениям (1) и начальным условиям (2). Действительно, полагая в уравнениях (3) $x = x_0$ и принимая во внимание, что интеграл с одинаковыми пределами равен нулю, получим начальные условия (2), а дифференцируя уравнения (3) по $x$, получим уравнения (1) **[I, 96]**. Из сказанного следует, что уравнения (3) в указанном смысле равносильны уравнениям (1) с начальными условиями (2), и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь уравнения (3). Отметим, что в этих уравнениях искомые функции $y(x)$ и $z(x)$ входят как в левую часть, так и под знак интеграла в правую часть.

Выясним идею метода последовательных приближений. Считая начальные значения $y_0$ и $z_0$ первыми приближениями к искомым функциям $y$ и $z$, заменяем в правых частях уравнений (3) $y$ и $z$ на $y_0$ и $z_0$. Таким образом получим функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t)\,y_0 + q_1(t)\,z_0]\,dt \\ z_1(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(t)\,y_0 + q_2(t)\,z_0]\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

являющиеся вторым приближением к $y$ и $z$. Эти функции $y_1(x)$ и $z_1(x)$ очевидно непрерывны в вышеупомянутом промежутке $I$ [I, 96]. Заменяя теперь в правых частях уравнений (3) $y$ и $z$ на $y_1(x)$ и $z_1(x)$, получим третье приближение $y_2(x)$ и $z_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t) y_1(t) + q_1(t) z_1(t)]\, dt$$

$$z_2(x) = z_0 + \int_{x}^{x} [p_2(t) y_1(t) + q_2(t) z_1(t)]\, dt,$$

причем $y_2(x)$ и $z_2(x)$ опять непрерывны в промежутке $I$ и т. д. Общая формула, дающая $(n+1)$-е приближение, будет:

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} [p_1(t) y_{n-1}(t) + q_1(t) z_{n-1}(t)]\, dt \\ z_n(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} [p_2(t) y_{n-1}(t) + q_2(t) z_{n-1}(t)]\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

В промежутке $I$ коэффициенты уравнений (1) суть, по условию, непрерывные функции, а потому в этом промежутке они будут по абсолютной величине не больше некоторого определенного положительного числа $M$ [I, 35]:

$$|p_1(x)| \leqslant M; \quad |q_1(x)| \leqslant M; \quad |p_2(x)| \leqslant M; \quad |q_2(x)| \leqslant M (x \text{ в } I). \qquad (6)$$

Обозначим, кроме того, буквой $m$ наибольшее из двух положительных чисел $|y_0|$ и $|z_0|$, т. е.

$$|y_0| \leqslant m; \qquad |z_0| \leqslant m. \qquad (7)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь часть промежутка $I$, лежащую справа от $x_0$, т. е. будем считать $x - x_0 \geqslant 0$. Рассмотрение левой части может быть сделано так же.

Оценим разности между соседними последовательными приближениями. Первая из формул (4) дает

$$y_1(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} [p_1(t) y_0 + q_1(t) z_0]\, dt.$$

Заменяя под интегралом все величины абсолютными значениями и большими величинами, в силу (6) и (7) получим [I, 95]:

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} (Mm + Mm)\, dt;$$

т. е.

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant m \cdot 2M(x-x_0), \tag{8}$$

и совершенно так же

$$|z_1(x)-z_0| \leqslant m \cdot 2M(x-x_0). \tag{$8_1$}$$

Первое из уравнений (5) при $n=2$ будет

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[p_1(t)\,y_1(t)+q_1(t)\,z_1(t)]\,dt,$$

вычитая из него почленно первое из уравнений (4), получим:

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)\,[y_1(t)-y_0]+q_1(t)\,[z_1(t)-z_0]\}\,dt.$$

Заменяя опять под интегралами все величины абсолютными значениями и пользуясь (6), (8) и ($8_1$), получим:

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x}\{\,M\cdot m\cdot 2M(t-x_0)+M\cdot m\cdot 2M(t-x_0)\,\}\,dt$$

или

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant 2^2mM^2\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt=m\cdot 2^2M^2\left[\frac{(t-x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

откуда окончательно

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant m\,\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}. \tag{9}$$

Совершенно так же

$$|z_2(x)-z_1(x)| \leqslant m\,\frac{[2M(x-x_0)]^2}{2!}. \tag{$9_1$}$$

Далее берем первые из уравнений (5) при $n=2$ и $n=3$ и, почленно вычитая, получим:

$$y_3(x)-y_2(x)=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)\,[y_2(t)-y_1(t)]+q_1(t)\,[z_2(t)-z_1(t)]\}\,dt.$$

Пользуясь (6), (9) и ($9_1$), как и выше, будем иметь:

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant m\,\frac{2^3M^3}{2}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^2\,dt,$$

откуда

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant m\,\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!};$$

$$|z_3(x)-z_2(x)| \leqslant m\,\frac{[2M(x-x_0)]^3}{3!}.$$

Продолжая так и дальше, можем написать общие оценки разности двух соседних приближений:

$$\left.\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^n}{n!} \\ |z_n(x) - z_{n-1}(x)| &\leqslant m\frac{[2M(x-x_0)]^n}{n!}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Пользуясь этими оценками, нетрудно показать, что функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ равномерно стремятся к некоторым предельным функциям $y(x)$ и $z(x)$ [1]) при беспредельном увеличении значка $n$. Докажем это для последовательности функций $y_n(x)$. Эту последовательность мы можем заменить бесконечным рядом

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \\ + [y_3(x) - y_2(x)] + \ldots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots, \qquad (11)$$

у которого сумма первых $(n+1)$ членов равна $y_n(x)$, и мы должны, таким образом, доказать равномерную сходимость ряда (11) [**I, 144**]. Если $l$ есть длина промежутка $I$, в котором меняется $x$, то первая из формул (10) показывает, что члены ряда (11) по абсолютной величине не превосходят положительных чисел

$$m\frac{(2Ml)^n}{n!} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

а ряд, составленный из этих чисел, сходится по признаку Даламбера, так как отношение последующего члена к предыдущему, равное $\frac{2Ml}{n}$, стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$. То же следует и из разложения $e^x$ [**I, 129**]. Таким образом, согласно признаку Вейерштрасса [**I, 147**], ряд (11) равномерно сходится в промежутке $I$, т. е. в этом промежутке $y_n(x)$ равномерно стремятся к некоторой функции $y(x)$. Совершенно так же можно доказать, что и последовательность $z_n(x)$ равномерно стремится в $I$ к некоторой предельной функции $z(x)$, т. е. в $I$ имеет место равномерное по отношению $x$ стремление к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x); \quad \lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x). \qquad (12)$$

Функции $y_n(x)$ и $z_n(x)$ непрерывны в $I$ и, следовательно, то же можно утверждать и относительно предельных функций $y(x)$ и $z(x)$ [**I, 145**].

Отметим, что для части промежутка $I$, лежащей слева от $x_0$, где $x - x_0 \leqslant 0$, мы должны в правых частях неравенств (8) и ($8_1$) заменить $(x - x_0)$ на $(x_0 - x)$. В дальнейших оценках надо будет $(t - x_0)$

[1]) Для дальнейшего существенно вспомнить параграфы о рядах с переменными членами и равномерной сходимости из тома I.

заменить $(x_0 - t)$ и т. д. Неравенства (10) останутся справедливыми для всего промежутка $I$ при условии замены $(x - x_0)$ абсолютным значением этой разности.

Докажем теперь, что предельные функции удовлетворяют уравнениям (3), т. е. уравнениям (1) и предельным условиям (2). Это непосредственно вытекает из формул (5), если в обеих частях этих уравнений перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда $y_n(x)$ и $y_{n-1}(t)$ будут стремиться к $y(x)$ и $y(t)$, а $z_n(x)$ и $z_{n-1}(t)$ — к $z(x)$ и $z(t)$, и в пределе для $y(x)$ и $z(x)$ получим уравнения (3). Проведем строго этот предельный переход. Из (12) следует:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} [p_1(t) y_{n-1}(t) + q_1(t) z_{n-1}(t)] = p_1(t) y(t) + q_1(t) z(t); \\ &\lim_{n\to\infty} [p_2(t) y_{n-1}(t) + q_2(t) z_{n-1}(t)] = p_2(t) y(t) + q_2(t) z(t). \end{aligned}\right\} \qquad (12_1)$$

Докажем, что эти предельные переходы имеют место равномерно по отношению к $t$ в промежутке $I$. Ограничимся первой формулой. Оценим разности между пределом и переменной:

$$\begin{aligned} &|[p_1(t) y(t) + q_1(t) z(t)] - [p_1(t) y_{n-1}(t) + q_1(t) z_{n-1}(t)]| \leqslant \\ &\qquad \leqslant |p_1(t)|\,|y(t) - y_{n-1}(t)| + |q_1(t)|\,|z(t) - z_{n-1}(t)|. \end{aligned}$$

В силу равномерного стремления $y_{n-1}(t)$ и $z_{n-1}(t)$ к $y(t)$ и $z(t)$ при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует число $N$, одно и то же для всех $t$ из $I$, такое, что

$$|y(t) - y_{n-1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad |z(t) - z_{n-1}(t)| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ при } n > N.$$

Отсюда, в силу (6), следует, что при любых $t$ из $I$ имеет место неравенство:

$$|[p_1(t) y(t) + q_1(t) z(t)] - [p_1(t) y_{n-1}(t) + q_1(t) z_{n-1}(t)]| < \varepsilon \quad \text{при } n > N,$$

что и доказывает равномерное стремление к пределу в формулах $(12_1)$ во всем промежутке $I$ и в любой его части $(x_0, x)$. Обращаемся к формулам (5) и пользуемся возможностью перехода к пределу под знаком интеграла для равномерно сходящихся последовательностей [**I, 145**]. Переходя к пределу, получаем из этих формул уравнения (3) для $y(x)$ и $z(x)$.

Резюмируя, можем сказать, что метод последовательных приближений дал нам решение системы (1) при начальных условиях (2), т. е. мы доказали существование решения. Покажем теперь, что искомое решение единственно. Пусть уравнения (3) имеют два решения: $y(x)$, $z(x)$ и $Y(x)$, $Z(x)$. Подставляя в уравнение (3) сначала

одно, а потом другое решение, и вычитая почленно, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} y(x)-Y(x)&=\int_{x_0}^{x}\{p_1(t)[y(t)-Y(t)]+q_1(t)[z(t)-Z(t)]\}\,dt\\ z(x)-Z(x)&=\int_{x_0}^{x}\{[p_2(t)[y(t)-Y(t)]+q_2(t)[z(t)-Z(t)]\}\,dt.\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Возьмем справа от $x_0$ промежуток $I_1$ такой длины $l_1$, чтобы произведение $2Ml_1=\theta$ было меньше единицы. Докажем, что в этом промежутке упомянутые два решения совпадают. Если бы это было не так, то абсолютные значения разностей

$$|y(x)-Y(x)|,\quad |z(x)-Z(x)|$$

имели бы в $I_1$ положительный максимум, который мы обозначим числом $\delta$. Пусть он достигается, например, первой разностью в точке $x=\xi$, т. е.

$$|y(\xi)-Y(\xi)|=\delta \qquad (14)$$

и

$$|y(x)-Y(x)|\leqslant\delta \quad \text{и} \quad |z(x)-Z(x)|\leqslant\delta \quad (x \text{ в } I_1). \qquad (14_1)$$

Рассмотрим первое из уравнений (13) при $x=\xi$. Оценивая интеграл, как это мы делали выше, получим в силу $(14_1)$:

$$|y(\xi)-Y(\xi)|<2M\delta(\xi-x_0),$$

откуда, пользуясь (14), а также тем, что $\xi$ принадлежит промежутку $I_1$,

$$\delta<2Ml_1\delta,\ \text{т. е.}\ \delta<\theta\delta,$$

а последнее неравенство нелепо, ибо по условию $0<\theta<1$.

Итак, наше предположение, что решения $y$, $z$ и $Y$, $Z$ не совпадают на промежутке $I_1$, привело к нелепости. Покрывая весь промежуток $I$ несколькими промежутками длины $l_1$, мы можем доказать совпадение упомянутых двух решений на всем промежутке $I$.

Формулируем теперь окончательный результат: *система* (1) *при начальных условиях* (2) *имеет одно определенное решение, которое существует в промежутке $I$, в котором коэффициенты системы* (1) *суть непрерывные функции, и это решение может быть получено по методу последовательных приближений.*

Результат этот справедлив и в том случае, когда $I$ есть открытый промежуток $c<x<d$, ибо, в силу доказанного выше, мы будем иметь существование и единственность решения во всяком конечном замкнутом промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, содержащем начальное значение $x_0$ и лежащем внутри промежутка $c<x<d$.

Мы могли бы рассматривать и неоднородную систему, т. е. прибавить к правым частям уравнений (1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$,

непрерывные в промежутке $I$. Предыдущее доказательство также сохранило бы свою силу.

Линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{15}$$

может быть написано в виде системы, если ввести, кроме $y$, искомую функцию $z = y'$:

$$\frac{dy}{dx} = z; \quad \frac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)y,$$

и таким образом высказанный выше результат справедлив и для уравнения (15) при начальных условиях

$$y|_{x=x_0} = y_0; \qquad y'|_{x=x_0} = y'_0 \tag{16}$$

в промежутке $I$ непрерывности коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$.

Пользуясь условиями (16), можем переписать уравнение (15) в виде

$$y = y_0 + y'_0 x - \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} [p(x)y' + q(x)y]\,dx, \tag{17}$$

причем двукратный интеграл можно заменить простым по формуле (23) из [**15**]. Равенство (17) дает возможность применять метод последовательных приближений к уравнению (15) и не приводя этого уравнения к системе.

Пример. Применим метод последовательных приближений к примеру, рассмотренному нами в [**46**]:

$$y'' - xy = 0.$$

Возьмем начальные условия $y|_{x=0} = 1$ и $y'|_{x=0} = 0$. Уравнение (17) в данном случае будет

$$y = 1 + \int_0^x dx \int_0^x xy\,dx.$$

Подставляя справа $y = 1$, получим второе приближение:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x\,dx = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}.$$

Третье приближение будет

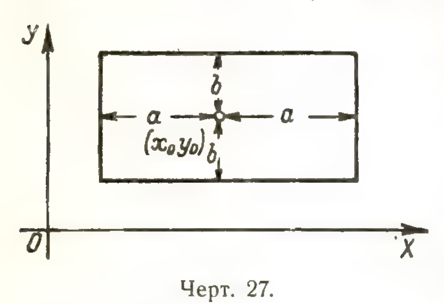
$$y_2(x) = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x\left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right) dx = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Переходя к пределу, мы получим, очевидно, степенной ряд:

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \ldots,$$

который мы имели в [46].

**51. Случай нелинейного уравнения.** Метод последовательных приближений применим для доказательства теоремы существования и единственности и в случае нелинейного уравнения, но здесь окончательный результат будет несколько иным. Для простоты будем рассматривать одно уравнение первого порядка:




Черт. 27.

$$y' = f(x, y) \tag{18}$$

с начальным условием:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{19}$$

Предположим, что заданная функция $f(x, y)$ непрерывна в окрестности начальной точки $(x_0, y_0)$ и имеет в этой окрестности ограниченную производную по $y$. Точнее говоря, существует такой прямоугольник $Q$ в плоскости $XY$ (черт. 27):

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a; \\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

что в нем $f(x, y)$ — непрерывна, имеет частную производную по $y$ и

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| < k, \tag{21}$$

где $k$ — определенное положительное число. Как и в случае линейного уравнения, можно показать, что уравнение (18) с начальным условием (19) равносильно уравнению:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\, dt. \tag{22}$$

При этом считаем, что промежуток изменения $x$ не выходит из промежутка $(x_0 - a, x_0 + a)$, а значения непрерывной функции $y(x)$ не выходят из промежутка $(y_0 - b, y_0 + b)$, т. е. считаем, что точки с абсциссами $x$ и ординатами $y(x)$ принадлежат прямоугольнику $Q$.

Вычисление последовательных приближений будем производить по формулам, аналогичным (4) и (5):

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt; \quad \ldots;$$
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt. \tag{23}$$

Обратимся к условию (21). Если взять две точки $(x_1, y_1)$ и $(x_1, y_2)$ из $Q$ с одинаковыми абсциссами, то по формуле конечных приращений можем написать [**I, 63**]:

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| = |y_2 - y_1| \left[\frac{\partial f(x_1, y)}{\partial y}\right]_{y=y_3},$$

где $y_3$ лежит между $y_1$ и $y_2$. Условие (21) дает при этом:

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| < k\,|y_2 - y_1|. \tag{24}$$

Это неравенство, обычно называемое неравенством Липшица, и используется при доказательстве сходимости $y_n(x)$ и единственности решения. Пусть $M$ — наибольшее абсолютное значение непрерывной функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $Q$, т. е.

$$|f(x, y)| \leqslant M \qquad [(x, y) \text{ в } Q]. \tag{25}$$

При выполнении вычислений по формулам (23) надо прежде всего позаботиться, чтобы точки с абсциссами $x$ и ординатами $y_n(x)$ не вышли из прямоугольника $Q$, определяемого из условий (20). Первое из этих условий дает для $x$ неравенство $|x - x_0| \leqslant a$. Второе условие сводится к неравенству

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant b. \tag{26}$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось при всяком $n$, надо подчинить $x$, кроме уже поставленного условия $|x - x_0| \leqslant a$, еще условию $|x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}$, так что окончательно получим для $x$ два условия:

$$|x - x_0| \leqslant a; \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}. \tag{27}$$

Покажем, что при этом все приближения будут удовлетворять неравенству (26). Первое из уравнений (23) дает

$$y_1(x) - y_0 = \int_{x}^{x} f(t, y_0)\,dt,$$

и, оценивая, как всегда, интеграл, получим в силу (25):

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0|,$$

откуда, в силу второго из условий (27), $|y_1(x)-y_0| \leqslant b$, т. е. неравенство (26) выполнено при $n=1$. Кроме того, очевидно, функция $y_1(x)$, определяемая предыдущей формулой, непрерывна при соблюдении условий (27). Убедившись во всем этом, сможем вычислить $y_2(x)$ по формуле (23) при $n=2$:

$$y_2(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f[t,\ y_1(t)]\,dt,$$

откуда, как и выше,

$$|y_2(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0| \leqslant M\frac{b}{M}=b,$$

т. е. неравенство (26) выполнено и при $n=2$, и, очевидно, $y_2(x)$ — непрерывная функция при соблюдении условий (27) и т. д. Таким образом мы сможем определять последовательные приближения $y_n(x)$ в промежутке $(x_0-c,\ x_0+c)$, где, в силу (27), $c$ есть наименьшее из двух чисел: $a$ и $\frac{b}{M}$. Назовем этот промежуток через $I$. Все $y_n(x)$ суть непрерывные функции в $I$, и во всех дальнейших рассуждениях мы будем считать, что $x$ принадлежит $I$.

Проведем теперь оценку разностей $y_n(x)-y_{n-1}(x)$, причем для простоты будем считать $x-x_0>0$, как это мы делали и в предыдущем. Первое из уравнений (23), в силу (25), дает

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant M(x-x_0). \tag{28}$$

Берем второе из уравнений (23) при $n=2$ и вычитаем почленно из первого:

$$y_2(x)-y_1(x)=\int_{x_0}^{x} \{f[t,\ y_1(t)]-f(t,\ y_0)\}\,dt,$$

откуда [I, 95]

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f[t,\ y_1(t)]-f(t,\ y_0)|\,dt,$$

или, в силу (24):

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} k\,|y_1(t)-y_0|\,dt.$$

Пользуясь неравенством (28), получим далее:

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant kM\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt = kM\left[\frac{(t-x_0)^2}{2!}\right]_{t=x_0}^{t=x},$$

и окончательно

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant kM\frac{(x-x_0)^2}{2!}. \tag{29}$$

Далее, написав вторую из формул (23) при $n=2$ и $n=3$ и производя почленное вычитание, получим:

$$y_3(x)-y_2(x)=\int_{x_0}^{x}\{f[t,\ y_2(t)]-f[t,\ y_1(t)]\}\,dt.$$

Пользуясь неравенствами (24) и (29), получим отсюда, как и выше,

$$|y_3(x)-y_2(x)| \leqslant k^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}$$

и, продолжая так дальше, придем к общему неравенству:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{k}\frac{[k(x-x_0)]^n}{n!}. \tag{30}$$

Если справа заменить разность $(x-x_0)$ ее абсолютным значением, то неравенство будет справедливо для всех $x$ из $I$. Из этого неравенства, как и выше, следует, что $y_n(x)$ стремится равномерно относительно $x$ в промежутке $I$ к предельной функции $y(x)$, которая является непрерывной и удовлетворяет неравенству (26), т. е. $|y(x)-y_0| \leqslant b$. Отсюда следует, что точки с абсциссами $x$ и ординатами $y(x)$ принадлежат прямоугольнику $Q$. В силу непрерывности функции $f(x,\ y)$ мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} f[t,\ y_{n-1}(t)] = f[t,\ y(t)] \qquad (t \text{ из } I).$$

Нетрудно видеть, что этот предельный переход имеет место равномерно по отношению к $t$ в промежутке $I$. Действительно, при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует, в силу равномерной непрерывности $f(x,\ y)$ в $Q$, такое $\delta$, что $|f(x'',\ y'')-f(x',\ y')| < \varepsilon$, если $(x',\ y')$ и $(x'',\ y'')$ — любые точки из $Q$ такие, что $|x''-x'| < \delta$ и $|y''-y'| < \delta$. Далее, в силу равномерного стремления $y_{n-1}(t)$ к $y(t)$, существует такое число $N$, одно и то же для всех $t$ из $I$, что $|y(t)-y_{n-1}(t)| < \delta$ при $n > N$ и всех $t$ из $I$. Отсюда вытекает, что для всех $t$ из $I$:

$$|f[t,\ y(t)]-f[t,\ y_{n-1}(t)]| < \varepsilon \qquad \text{при } n > N,$$

что и доказывает равномерное стремление к пределу. Обращаемся ко второй из формул (23) и переходим в обеих частях к пределу при беспредельном возрастании $n$. В силу равномерной сходимости $f[t, y_{n-1}(t)]$ к $f[t, y(t)]$ можем переходить к пределу под знаком интеграла и получим для предельной функции уравнение (22).

Остается доказать единственность. Положим, что уравнение (22) имеет два решения $y(x)$ и $Y(x)$ в некотором промежутке $(x_0 - d,\ x_0 + d)$, не выходящем из промежутка $(x_0 - a,\ x_0 + a)$, причем $d$ мы можем считать настолько малым, чтобы $y(x)$ и $Y(x)$ не выходили из промежутка $(y_0 - b,\ y_0 + b)$. Подставляя в уравнение (22) сначала одно, а потом другое решение и вычитая почленно, будем иметь:

$$y(x) - Y(x) = \int_{x_0}^{x} \{f[t,\ y(t)] - f[t,\ Y(t)]\}\, dt,$$

откуда

$$|y(x) - Y(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f[t,\ y(t)] - f[t,\ Y(t)]|\, dt \qquad (t \geqslant x_0),$$

и, в силу (24):

$$|y(x) - Y(x)| \leqslant k \int_{x_0}^{x} |y(t) - Y(t)|\, dt.$$

Взяв промежуток такой длины $l_1$, чтобы $kl_1 = \theta$ было меньше единицы, докажем, как и раньше, что $y(x)$ и $Y(x)$ совпадают. Итак, *уравнение* (18) *с начальным условием* (19) *при сделанных предположениях относительно* $f(x, y)$ *имеет определенное решение, которое существует в промежутке* $(x_0 - c,\ x_0 + c)$, *где* $c$ — *наименьшее из чисел*: $a$ *и* $\frac{b}{M}$, *и это решение может быть получено по методу последовательных приближений*. Заметим, что в рассматриваемом случае нелинейного уравнения промежуток изменения $x$ определяется сложнее, чем для системы линейных уравнений, где он просто совпадал с промежутком непрерывности коэффициентов. Выясним на примере этот вопрос подробнее.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y' = x + y^2 \tag{31}$$

с начальным условием

$$y|_{x=0} = 0. \tag{32}$$

Уравнение (22) будет

$$y(x) = \int_{0}^{x} [t + y^2(t)]\, dt. \tag{33}$$

Заменяем направо $y(t)$ нулем и вычисляем второе приближение:

$$y_1(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Подставляя его в правую часть (33), определим третье приближение:

$$y_2(x) = \int_0^x \left[t + \frac{t^4}{4}\right] dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$$

и т. д.

Рассмотрим теперь определение интервала изменения $x$, в котором применим метод последовательных приближений. Правая часть уравнения (31) непрерывна и имеет ограниченную производную по $y$ в любом прямоугольнике, построенном около точки (0, 0), т. е. числа $a$ и $b$, входящие в условия (20), мы можем брать любыми. При этом $M = \max|x + y^2| = a + b^2$, и неравенства (26), определяющие искомый промежуток изменения $x$, будут

$$|x| \leqslant a; \quad |x| \leqslant \frac{b}{a + b^2}.$$

Если брать $b$ близким к нулю или большим, то второе из неравенств даст очень тесный промежуток изменения $x$. То же будет, если $a$ брать очень большим. Но при малом $a$ первое из неравенств даст тесный промежуток. Таким образом нам не удастся получить для $x$ сколь угодно большого промежутка, хотя правая часть уравнения (31) и не имеет никаких особенностей при конечных значения $x$ и $y$.

**52. Особые точки дифференциального уравнения первого порядка.** Если правая часть уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{34}$$

в точке $(x_0, y_0)$ и ее окрестности есть непрерывная функция, имеющая ограниченную производную по $y$, то через эту точку $(x_0, y_0)$, по теореме существования и единственности, проходит одна и только одна интегральная кривая. Если же упомянутые условия функцией $f(x, y)$ в некоторой точке не выполняются, то такую точку мы назовем *особой точкой уравнения* (34). В такой точке теорема существования и единственности может не иметь места.

Перепишем уравнение (34) в форме, содержащей дифференциалы

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \tag{35}$$

и положим для простоты, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы от $x$ и $y$. Если $P(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (35) перепишем так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

и при соблюдении только что упомянутого условия правая часть написанного уравнения будет непрерывной функцией в точке $(x_0, y_0)$ и ее окрестности и будет иметь ограниченную производную по $y$, которая определится по обычному правилу дифференцирования частного. Итак, если $P(x_0, y_0) \neq 0$, то в точке $(x_0, y_0)$ будут выполнены условия теоремы существования и единственности, и через эту точку пройдет одна и только одна интегральная кривая уравнения (35). Если $P(x_0, y_0) = 0$, но $Q(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение (35) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

принимая $x$ за функцию от $y$. Знаменатель правой части не обращается в нуль в точке $(x_0, y_0)$, и точно так же, как и выше, убедимся в применимости теоремы существования и единственности для точки $(x_0, y_0)$. Таким образом особые точки уравнения (35) суть те точки, в которых одновременно обращаются в нуль $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, т. е. координаты этих точек получаются, как вещественные решения системы уравнений

$$P(x, y) = 0; \quad Q(x, y) = 0. \tag{36}$$

Сказанное применимо и к тому случаю, когда $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть ряды, расположенные по целым положительным степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$. Если по крайней мере в одном из этих рядов свободный член отличен от нуля, то к точке $(x_0, y_0)$ применима теорема существования и единственности. В противном случае эта точка будет особой точкой уравнения.

Поясним понятие об особой точке на примере установившегося течения жидкости [**12**]. Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — проекции вектора скорости $\mathbf{v}(x, y)$ на координатные оси. Уравнение (35), выражающее условие параллельности касательной и вектора скорости, представляет собою дифференциальное уравнение линий тока. Если в некоторой точке вектор $\mathbf{v}(x, y)$ отличен от нуля, то в этой точке по крайней мере одна из проекций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вектора $\mathbf{v}(x, y)$ отлична от нуля, и через эту точку, согласно теореме существования и единственности, проходит одна и только одна линия тока. Точки же, в которых вектор $\mathbf{v}(x, y)$ равен нулю, т. е. в которых имеют место равенства (36), будут особыми точками уравнения (35) и называются критическими точками рассматриваемого течения. В такой точке обстоятельства будут уже иные: линии тока могут пересекаться, асимптотически приближаться к точке или окружать ее замкнутыми кривыми. Таким образом особые точки могут иметь различный характер, и для изучения движения (интегральных кривых уравнения) важно уметь определять характер особых точек. В следующем номере мы на частном примере решим этот вопрос.

**53. Линии тока коллинеарного плоского движения жидкости.** Рассмотрим тот частный случай, когда проекции скорости $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть полиномы первой степени:

$$P(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + b_1; \quad Q(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + b_2;$$

в этом случае движение жидкости называется *коллинеарным*.

*Положим сперва, что прямые*

$$a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0 \tag{37}$$

*не параллельны*. Выбирая точку их пересечения за начало координат, мы обратим в нуль свободные члены $b_1$ и $b_2$. Уравнение будет иметь вид

$$\frac{dx}{a_{11}x + a_{12}y} = \frac{dy}{a_{21}x + a_{22}y}, \tag{38}$$

и начало координат $x = y = 0$ является для него, очевидно, особой точкой. Мы укажем, каким образом по коэффициентам $a_{ik}$ можно судить о характере этой особой точки.

Уравнение (38), как нетрудно видеть, есть однородное уравнение и может быть проинтегрировано способом, указанным в [**3**]. Но мы применим другой способ, а именно, вводя новые переменные $\xi$ и $\eta$, мы приведем сперва уравнение (38) к виду, более удобному для непосредственного исследования.

Положим

$$\xi = m_1x + n_1y; \quad \eta = m_2x + n_2y, \tag{39}$$

откуда

$$d\xi = m_1\,dx + n_1\,dy; \quad d\eta = m_2\,dx + n_2\,dy.$$

Из уравнения (38), составляя производную пропорцию, получим:

$$\frac{d\xi}{m_1(a_{11}x + a_{12}y) + n_1(a_{21}x + a_{22}y)} = \frac{d\eta}{m_2(a_{11}x + a_{12}y) + n_2(a_{21}x + a_{22}y)}. \tag{40}$$

Определим теперь коэффициенты в формулах (39) так, чтобы знаменатели написанных дробей были соответственно пропорциональны $\xi$ и $\eta$. Для первого знаменателя будем иметь

$$m_1(a_{11}x + a_{12}y) + n_1(a_{21}x + a_{22}y) = \rho(m_1x + n_1y),$$

откуда, сравнивая коэффициенты при $x$ и $y$, получим систему однородных уравнений для определения $m_1$ и $n_1$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \rho)m_1 + a_{21}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22} - \rho)n_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{41$_1$}$$

Точно так же, обращаясь ко второму знаменателю и приравнивая его $\rho\eta$, получим для определения $m_2$ и $n_2$ систему:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \rho)m_2 + a_{21}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \rho)n_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{41$_2$}$$

причем коэффициент пропорциональности $\rho$ будет иметь уже другое значение.

Значения $m = n = 0$ для нас не годятся, так как при этом преобразования переменных (39) теряют смысл. Нам необходимо, следовательно, чтобы системы $(41_1)$ и $(41_2)$ имели решения, отличные от указанного $m = n = 0$. Но два однородных уравнения первой степени

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = 0; \quad \alpha_2 x + \beta_2 y = 0$$

тогда и только тогда имеют решения, отличные от $x = y = 0$, когда соответствующие им прямые совпадают, т. е. когда их коэффициенты пропорциональны. В случае систем $(41_1)$ и $(41_2)$ это приводит к пропорции:

$$\frac{a_{11} - \rho}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22} - \rho},$$

что дает квадратное уравнение для определения $\rho$:

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{42}$$

При этом как система $(41_1)$, так и $(41_2)$ приведется к одному уравнению, и мы сможем определить решение, отличное от нулевого решения: $m = n = 0$.

Займемся теперь детальным исследованием различных возможных случаев.

(*A*) *Уравнение* (42) *имеет два различных корня* $\rho_1$ и $\rho_2$.

Подставляя в уравнения $(41_1)$ $\rho = \rho_1$ и в уравнения $(41_2)$ $\rho = \rho_2$, сможем, как мы выше указали, определить коэффициенты в формулах (39), после чего уравнение (40) приведется к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{d\xi}{\rho_1 \xi} = \frac{d\eta}{\rho_2 \eta}. \tag{43}$$

Можно показать, что при этом формулы (39) разрешимы относительно $x$ и $y$.

Разобьем теперь исследование случая (*A*) на ряд частных случаев.

1) *Корни* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *уравнения* (42) *вещественны и одинаковых знаков*. Интегрируя уравнение (43), находим:

$$\lg \xi^{\rho_2} = \lg \eta^{\rho_1} + \lg C_1,$$

где через $\lg C_1$ мы обозначаем произвольную постоянную.

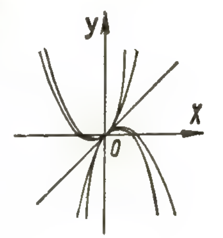
Следовательно:

$$\xi^{\rho_2} = C_1 \eta^{\rho_1}; \quad \xi = C\eta^{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \quad \left(C = C_1^{\frac{1}{\rho_2}}\right),$$

или

$$(m_1 x + n_1 y) = C(m_2 x + n_2 y)^{\frac{\rho_1}{\rho_2}}. \tag{44}$$

В рассматриваемом случае частное $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ есть положительное число, и, следовательно, координаты $x = y = 0$ удовлетворяют уравнению (44) при любом значении $C$, т. е. всякая линия тока (интегральная кривая) попадет в особую точку (черт. 28). Такая особая точка называется *узлом*.



Черт. 28.

2) *Корни* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *вещественны и разных знаков*. В этом случае дробь $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ отрицательна. Обозначая ее через $(-\mu)$, где $\mu$ — положительное число, можем переписать общий интеграл (44) в виде:

$$(m_1x + n_1y)\ (m_2x + n_2y)^{\mu} = C \qquad (\mu > 0). \quad (45)$$

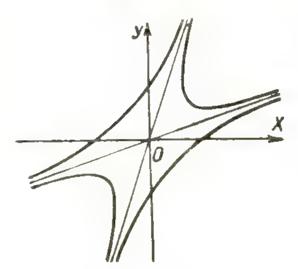
Подставляя $x = y = 0$, получим $C = 0$, т. е. линии тока, проходящие через начала координат, имеют уравнение

$$(m_1x + n_1y)\ (m_2x + n_2y)^{\mu} = 0$$

и этому уравнению соответствуют две прямые:

$$m_1x + n_1y = 0;$$
$$m_2x + n_2y = 0. \qquad (46)$$

Таким образом в рассматриваемом случае через особую точку проходят две и только две линии тока (интегральные кривые). Такая особая точка называется *нейтральной точкой* или *седлом*. При значениях $C$, отличных от нуля, кривые (45) будут похожи на гиперболы (или сами гиперболы при $\mu = 1$), и прямые (46) будут для них асимптотами (черт. 29).



Черт. 29.

3) *Корни* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ — *мнимые сопряженные, с вещественной частью, отличной от нуля*:

$$\rho_1 = \alpha + \beta i; \quad \rho_2 = \alpha - \beta i \quad (\alpha \text{ и } \beta \neq 0).$$

Подставляя в коэффициенты систем $(41_1)$ и $(41_2)$ сопряженные значения $\rho$, получим системы, соответствующие коэффициенты которых суть сопряженные числа. Поэтому, взяв какое-нибудь решение одной системы $m_1$ и $n_1$ и заменив в нем $i$ на $(-i)$, получим решение второй системы $m_2$ и $n_2$. Отсюда в силу формул (39) следует, что $\xi$ и $\eta$ можно считать также сопряженными:

$$\xi = \xi_1 + \eta_1 i; \quad \eta = \xi_1 - \eta_1 i,$$

где $\xi_1$ и $\eta_1$ — вещественные полиномы от $x$ и $y$ вида

$$\xi_1 = p_1x + q_1y; \quad \eta_1 = p_2x + q_2y. \qquad (47)$$

Уравнение (43) будет:

$$\frac{d\xi_1 + i\,d\eta_1}{(\alpha + \beta i)(\xi_1 + \eta_1 i)} = \frac{d\xi_1 - i\,d\eta_1}{(\alpha - \beta i)(\xi_1 - \eta_1 i)}$$

или

$$\frac{d\xi_1 + i\,d\eta_1}{(\alpha\xi_1 - \beta\eta_1) + (\beta\xi_1 + \alpha\eta_1)\,i} = \frac{d\xi_1 - i\,d\eta_1}{(\alpha\xi_1 - \beta\eta_1) - (\beta\xi_1 + \alpha\eta_1)\,i}.$$

Рассматривая сумму и разность предыдущих и последующих членов пропорции по свойству производных пропорций, выводим отсюда:

$$\frac{d\xi_1}{\alpha\xi_1 - \beta\eta_1} = \frac{d\eta_1}{\beta\xi_1 + \alpha\eta_1},$$

откуда

$$\xi_1\,d\xi_1 + \eta_1\,d\eta_1 = \frac{\alpha}{\beta}(\xi_1\,d\eta_1 - \eta_1\,d\xi_1)$$

или

$$\frac{\xi_1\,d\xi_1 + \eta_1\,d\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1}{1 + \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2}} \cdot \frac{\xi_1\,d\eta_1 - \eta_1\,d\xi_1}{\xi_1^2}.$$

Полагая

$$u = \xi_1^2 + \eta_1^2; \quad v = \frac{\eta_1}{\xi_1},$$

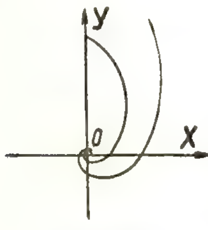
будем иметь

$$\frac{du}{2u} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{dv}{1 + v^2}; \quad \frac{1}{2}\lg u = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg} v + \lg C$$

и, следовательно, общий интеграл будет

$$\lg\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_1}{\xi_1} + \lg C \quad \text{или} \quad \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{\eta_1}{\xi_1}}. \quad (48)$$

Вводя на плоскости $(\xi_1, \eta_1)$ полярные координаты $\xi_1 = r\cos\theta$; $\eta_1 = r\sin\theta$, получим:



Черт. 30.

$$r = Ce^{\frac{\alpha}{\beta}\theta},$$

т. е. линии тока в координатах $(\xi_1, \eta_1)$ будут логарифмические спирали, закручивающиеся в одну и ту же сторону вокруг начала координат [I, 83]. Аналогичный вид спиралей будут иметь линии тока и в первоначальных координатах $(x, y)$, связанных с новыми $(\xi_1, \eta_1)$ преобразованиями (47). Таким образом в рассматриваемом случае ни одна линия тока (интегральная кривая) не пройдет через особую точку, и всякая линия тока будет асимптотически к ней приближаться, закручиваясь вокруг нее (черт. 30). Такая особая точка называется *фокусом*.

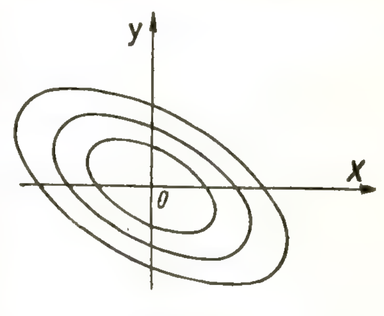
4) *Корни* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *чисто мнимые* ($\pm\beta i$). Полагая в формуле (48) $\alpha = 0$, получим:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = C^2, \tag{49}$$

или в первоначальных координатах:

$$(p_1 x + q_1 y)^2 + (p_2 x + q_2 y)^2 = C^2. \tag{50}$$

Вместо окружностей (49) получим подобные эллипсы. Таким образом и в этом случае ни одна линия тока (интегральная кривая) не пройдет через особую точку, но, в отличие от предыдущего случая, эта последняя будет окружена замкнутыми линиями тока (черт. 31), а не заворачивающимися около нее спиралями. Такая особая точка называется *центром*.




Черт. 31.

(*B*) *Уравнение* (42) *имеет кратный корень* $\rho_1 = \rho_2$, *отличный от нуля*. При подстановке в коэффициенты системы ($41_1$) или ($42_2$) $\rho = \rho_1$ могут встретиться два случая: или все коэффициенты при этом обратятся в нуль, или среди коэффициентов будет, по крайней мере, один, отличный от нуля. Рассмотрим сначала первый случай:

$$a_{12} = a_{21} = 0; \quad a_{11} = a_{22} = \rho_1, \tag{51}$$

при этом система (38) будет иметь вид:

$$\frac{dx}{\rho_1 x} = \frac{dy}{\rho_1 y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

и ее общий интеграл $y = Cx$ будет семейством прямых, проходящих через начало, т. е. начало координат будет узлом.

*Среди коэффициентов*

$$a_{12}, \ a_{21}, \ a_{11} - \rho_1, \ a_{22} - \rho_1$$

*есть, по крайней мере, один, отличный от нуля*. Нетрудно видеть, что при этом $a_{12}$ и $a_{21}$ не могут оба быть равны нулю. Действительно, если $a_{12} = a_{21} = 0$, то, принимая во внимание кратность корня $\rho_1$ уравнения (42), получим $a_{11} = a_{22} = \rho_1$. При сделанном предположении уравнение (42) превращается в уравнение $\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} = 0$, и условие кратности корня этого уравнения дает $a_{11} = a_{22}$, и общая величина $a_{11}$ и $a_{22}$ и есть кратный корень уравнения. Итак, если предположить $a_{12} = a_{21} = 0$, то выполнены условия (51), что противоречит сделанному нами предположению. Поэтому хотя бы один из коэффициентов $a_{12}$ или $a_{21}$ отличен от нуля.

Положим, например, что $a_{21} \neq 0$. Кратный корень уравнения (42) будет очевидно

$$\rho_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2},$$

и система ($41_1$) при подстановке $\rho = \rho_1$ должна привестись, как мы выше упоминали, к одному уравнению:

$$\frac{a_{11} - a_{22}}{2} m_1 + a_{21} n_1 = 0.$$

Выберем $m_1 = a_{21}$ и $n_1 = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2}$, т. е.

$$\xi = a_{21} x - \frac{a_{11} - a_{22}}{2} y, \tag{52}$$

оставляя вторую переменную $y$ прежней. Дифференциальное уравнение можно будет написать в виде

$$\frac{d\xi}{\rho_1 \xi} = \frac{dy}{a_{21} x + a_{22} y}$$

или, подставляя вместо $x$ его выражение, определяемое из формулы (52):

$$\frac{d\xi}{\rho_1 \xi} = \frac{dy}{\xi + \rho_1 y}.$$

Вводя вместо $y$ новую переменную $t$

$$y = t\xi,$$

придем к уравнению

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\xi}{\xi} = dt,$$

и, интегрируя, получим общий интеграл

$$y = \frac{\xi}{\rho_1} \lg (C\xi).$$

Знак $\xi$ должен совпадать со знаком $C$, а при $\xi \to 0$ очевидно $y \to 0$ и вместе с тем

$$y' = \frac{1}{\rho_1} [1 + \lg (C\xi)] \to \infty,$$

т. е. в координатах ($\xi$, $y$) интегральные кривые будут попадать в начало координат, касаясь оси $OY$ (черт. 32), и начало координат будет, следовательно, узлом.

При преобразовании уравнения (35) к виду (38) было существенным предположение, что прямые (37) не параллельны. Если они параллельны, то их левые части не обращаются одновременно в нуль, т. е. ни в одной точке вектор скорости не равен нулю, и дифференциальное уравнение линий тока

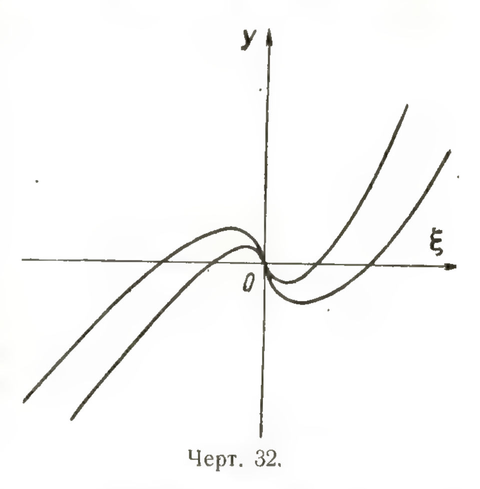
$$\frac{dx}{a_{11} x + a_{12} y + b_1} = \frac{dy}{a_{21} x + a_{22} y + b_2}$$

не имеет особых точек, и через всякую точку плоскости проходит одна и только одна линия тока.

Уравнения с особой точкой в начале координат более общего вида, чем в случае коллинеарного движения, будут

$$\frac{dx}{a_{11}x + a_{12}y + b_1x^2 + c_1xy + \ldots} = \frac{dy}{a_{21}x + a_{22}y + b_2x^2 + c_2xy + \ldots}. \quad (53)$$

Знаменатели здесь содержат и члены выше первого измерения относительно $x$ и $y$. Интегрирование таких уравнений не приводится к квадратурам, кроме исключительных случаев, но в некоторых случаях можно определить характер особой точки по первым коэффициентам знаменателей в уравнении (53), совершенно не производя интегрирования этого уравнения. Грубо говоря, можно рассуждать так: при малых по абсолютному значению $x$ и $y$, т. е. в окрестности начала координат, члены высших измерений в знаменателях уравнения (53) будут малы по сравнению с членами первого измерения, и можно думать, что расположение интегральных кривых вблизи начала координат будет приблизительно таким же, каким оно было бы, если бы мы удержали в знаменателях только члены первого измерения. Если это так, то мы встретимся и для уравнения (53) с теми же типами особых точек, которые мы имели выше для коллинеарного движения. На самом деле, за некоторыми исключениями, это так и будет. Не приводя доказательства, мы формулируем лишь окончательный результат:



Черт. 32.

1) Если корни квадратного уравнения (42) — вещественны, различны и одинаковых знаков, то особая точка $x = y = 0$ уравнения (53) будет узлом. Это значит, что всякая интегральная кривая, которая достаточно близко подойдет к особой точке, попадет в самую эту точку.

2) Если корни уравнения (42) — вещественны и разных знаков, то особая точка будет седлом, т. е. через нее пройдут две интегральные кривые.

3) Если корни уравнения (42) — комплексные с вещественной частью, отличной от нуля, то особая точка — фокус.

4) Если корни уравнения (42) — чисто мнимые, то особая точка — фокус или центр.

ГЛАВА III

# КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

## § 6. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**54. Объемы.** До сих пор мы рассматривали определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

как предел суммы для того случая, когда функция $f(x)$ определена на отрезке $(a, b)$ оси $OX$. Иначе говоря, областью интегрирования являлся всегда некоторый прямолинейный отрезок.

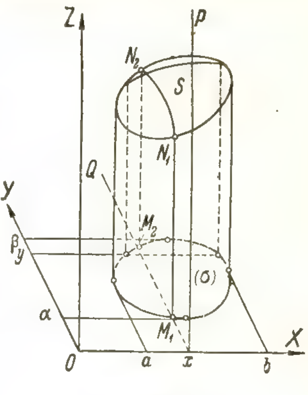
В настоящем параграфе мы обобщим понятие об интеграле на тот случай, когда областью интегрирования является некоторая область на плоскости, или некоторая область в пространстве, или, наконец, область на какой-либо поверхности. При изложении настоящего параграфа мы будем пользоваться интуитивным представлением площади и объема и не будем останавливаться на обосновании некоторых рассуждений, связанных с переходом к пределу. Основные моменты строгого изложения читатель может найти в последнем параграфе настоящей главы. Мы начнем с понятия о двойном интеграле, которое связано с вопросом о вычислении объема, так же как написанный выше интеграл связан с вычислением площади, а потому, прежде чем вводить понятие о двойном интеграле, мы займемся вопросом о вычислении объемов.

Мы знаем, что вопрос о вычислении площади, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью $OX$ и двумя ординатами: $x = a$, $x = b$, решается с помощью понятия об определенном интеграле, а именно указанная площадь выражается написанным выше определенным интегралом **[I, 87]**.

Займемся аналогичной задачей для объема $v$ тела, ограниченного данной поверхностью $(S)$, уравнение которой

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

плоскостью $XOY$ и цилиндром $(C)$ с образующими, параллельными оси $OZ$, проектирующими $(S)$ на область $(\sigma)$ плоскости $XOY$ (черт. 33).

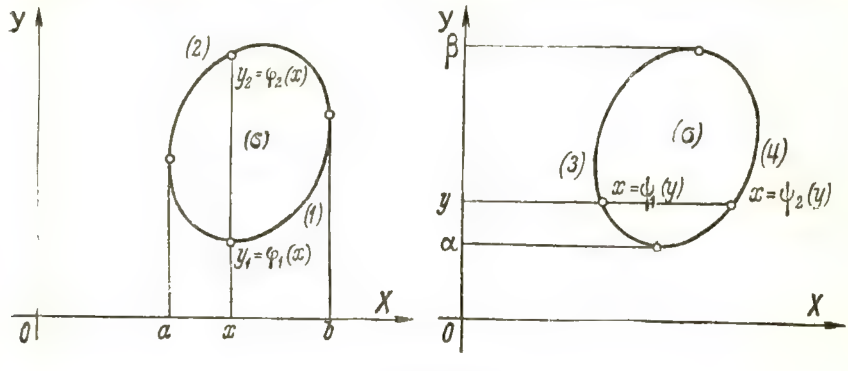


Черт. 33.

В [I, 104] мы привели вычисление объема тела также к определенному интегралу, для чего нужно только знать параллельные сечения тела; этот способ мы применим и в нашей задаче.

Допустим для простоты, что поверхность $(S)$ целиком находится над плоскостью $XOY$ и что контур $(l)$, ограничивающий $(\sigma)$, пересекается лишь в двух точках прямыми, параллельными координатным осям.

Будем рассекать рассматриваемое тело плоскостями, параллельными плоскости $YOZ$, следы которых на плоскости $XOY$ суть прямые, параллельные оси $OY$ (черт. 33 и 34). Абсциссы крайних сечений обозначим через $a$ и $b$. Это будут, вместе с тем, абсциссы точек контура, разделяющих этот контур на две части (1) и (2), одна из



Черт. 34.

которых является местом входа в область $(\sigma)$ прямых, параллельных оси $OY$, а другая — местом выхода (черт. 34). Каждая из этих частей имеет свое уравнение

$$y_1 = \varphi_1(x); \quad y_2 = \varphi_2(x). \tag{2}$$

Площадь сечения тела с плоскостью $PQ$, проведенной на расстоянии $x$ от $YOZ$, зависит от $x$; обозначим ее через $S(x)$. Мы имеем [I, 104]

$$v = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{3}$$

Остается найти выражение для функции $S(x)$. Это есть площадь фигуры $M_1N_1N_2M_2$; она лежит в плоскости $PQ$ и ограничена кривой $N_1N_2$ пересечения плоскости $PQ$ с поверхностью $(S)$, прямой $M_1M_2$, параллельной оси $OY$, и двумя ординатами $M_1N_1$ и $M_2N_2$.

Так как для всех точек рассматриваемого сечения $x$ постоянно, ординату кривой $N_1N_2$ можно считать функцией от $y$, определяемой уравнением

$$z = f(x, y)$$

при постоянном $x$; независимая переменная $y$ будет при этом меняться в промежутке $(y_1, y_2)$, где $y_1$ и $y_2$ суть ординаты точек входа прямой $M_1M_2$ в область $(\sigma)$ и выхода из этой области.

В силу **[I, 87]** можем писать:

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy;$$

подставив в (3), имеем:

$$v = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Мы получаем, таким образом, выражение объема в виде *повторного интеграла*, в котором интегрирование сперва выполняется по $y$ при постоянном $x$, а затем полученный результат интегрируется по $x$.

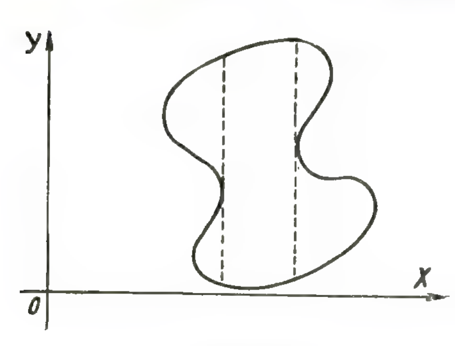
Рассекая данное тело плоскостями, параллельными плоскости $XOZ$, мы получим для того же объема выражение:

$$v = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx, \tag{5}$$

причем $x_1$ и $x_2$ суть известные функции от $y$:

$$x_1 = \psi_1(y); \quad x_2 = \psi_2(y), \tag{6}$$

а $\alpha$ и $\beta$ означают крайние значения $y$ на контуре $(l)$ (черт. 33 и 34).



Черт. 35.

Формулы (4) и (5) были выведены при двух предположениях: 1) поверхность $(S)$ лежит целиком над плоскостью $XOY$ и 2) контур $(l)$, ограничивающий проекцию $(\sigma)$ поверхности $(S)$ на плоскость $XOY$, пересекается лишь в двух точках со всякой прямой, параллельной одной из координатных осей. Если не выполнено условие 1, то правые части формул (4) и (5) дадут не объем, а *алгебраическую сумму объемов*, причем со знаком (+) получатся те объемы, которые лежат над плоскостью $XOY$, со знаком (—) те,

которые лежат под ней. Если же не выполнено условие 2, например (черт. 35) имеется несколько пар точек пересечения контура $(l)$ с прямой $x = \text{const}$, то надо разбить область $(\sigma)$ на части, каждая из которых удовлетворяет условию 2. В соответствии с этим поверхность $(S)$ и объем $v$ разобьются на части, и для вычисления объема каждой из этих частей будет годиться формула (4).

Примеры. **1.** Объем усеченной прямоуголной призмы (черт. 36). Основание образовано осями $OX$, $OY$ и прямыми $x = k$, $y = l$. Секущая плоскость имеет уравнение

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} + \frac{z}{\nu} = 1.$$

Формула (4) в данном случае дает:

$$v = \int_0^k dx \int_0^l z\,dy = \int_0^k dx \int_0^l \nu\left(1 - \frac{x}{\lambda} - \frac{y}{\mu}\right) dy = \nu \int_0^k dx \left(y - \frac{xy}{\lambda} - \frac{y^2}{2\mu}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l} =$$

$$= \nu \int_0^k \left(l - \frac{xl}{\lambda} - \frac{l^2}{2\mu}\right) dx = \nu\left(kl - \frac{k^2 l}{2\lambda} - \frac{kl^2}{2\mu}\right) = kl \cdot \nu\left(1 - \frac{k}{2\lambda} - \frac{l}{2\mu}\right) = \sigma h,$$

где $\sigma$ есть площадь основания, $h$ — ордината точки пересечения диагоналей верхнего сечения $\left(\text{соответствующая значениям } x = \frac{k}{2},\ y = \frac{l}{2}\right)$.

**2.** Объем эллипсоида

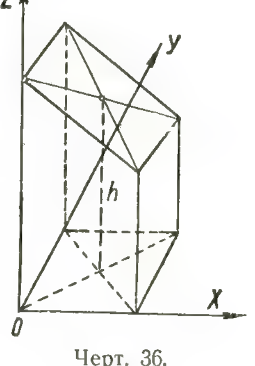
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

При пересечении эллипсоида плоскостями $z = \text{const}$ получаются эллипсы с полуосями

$$a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$$

и с площадью

$$S(z) = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$



Черт. 36.

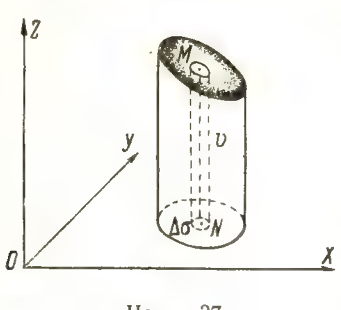
а поэтому искомый объем будет

$$v = \int_{-c}^{+c} \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4}{3}\pi abc.$$

**55. Двукратный интеграл.** Для получения приближенного представления площади кривой $y = f(x)$ мы [I, 87] разбивали ее на вертикальные полосы и заменяли площадь каждой из них прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной некоторому среднему

значению ординаты кривой для данной полосы. При увеличении числа полос и стремлении каждой из них к нулю, ошибка $\to 0$, а приближенная формула в пределе обращается в определенный интеграл, дающий точное выражение для площади.

Аналогичное построение можно проделать и при вычислении объемов. Область $(\sigma)$ (черт. 37) разбиваем на большое число малых элементов $\Delta\sigma$ произвольной формы, причем через $\Delta\sigma$ обозначаем как сами эти малые области, так и их площади. Каждый из таких элементов примем за основание цилиндра, который, будучи продолжен до пересечения с поверхностью $(S)$, вырежет из объема $v$ элементарный объем. Очевидно, что за величину этого объема мы можем приближенно принять объем цилиндра, основание которого тоже $\Delta\sigma$, а высота — ордината, т. е. значение $z$ любой точки элемента поверхности, который проектируется в виде элемента $\Delta\sigma$. Другими словами, взяв на элементе $\Delta\sigma$ любую точку $N$ и обозначив для краткости через $f(N)$ ординату точки $M$ поверхности $(S)$, соответствующую этой точке $N$, или, что то же, значение функции $f(x, y)$ в этой точке, мы имеем для элементарного объема $f(N)\Delta\sigma$ и




Черт. 37.

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma,$$

причем суммирование распространяется на все элементарные площади $\Delta\sigma$, заполняющие площадь $(\sigma)$.

Чем меньше будет каждый элемент $\Delta\sigma$ и больше число $n$ этих элементов, тем точнее будет полученная приближенная формула, и в пределе можно писать:

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma = v.$$

Отвлекаясь от геометрических представлений, мы можем определить написанный предел суммы и независимо от геометрического изображения функции $f(N)$, этот предел и называется *двойным или двукратным интегралом от функции* $f(N)$ *по области* $(\sigma)$ *и изображается так*:

$$\int\int_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma.$$

Существование написанного предела наглядно ясно, ибо этот предел, как мы выяснили, должен давать объем $v$, описанный нами выше. Такое рассуждение не является конечно строгим, но можно

доказать и строго аналитически существование упомянутого предела при довольно общих условиях для $f(N)$ и во всяком случае для всех непрерывных функций.

Если мы положим $f(N)=1$, то получим выражение площади $\sigma$ области ($\sigma$) в виде двойного интеграла

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma.$$

Формулируем полностью определение двукратного интеграла: пусть ($\sigma$) — ограниченная плоская область и $f(N)$ — функция точки в этой области, т. е. функция, принимающая в каждой точке $N$ области ($\sigma$) определенное значение. Разбиваем область ($\sigma$) на $n$ частей, частичных областей, и пусть $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ — площади этих частей и $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — какие-либо точки, находящиеся на этих частях. Составляем сумму произведений:

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot\Delta\sigma_k.$$

*Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений $n$ и беспредельном уменьшении каждой из частичных областей $\Delta\sigma_k$ называется двукратным интегралом от функции $f(N)$ по области* ($\sigma$)

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Замечание. Пусть $d_k$ — максимальное расстояние между двумя точками частичной области с площадью $\Delta\sigma_k$ (диаметр этой области) и $d$ — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Беспредельное уменьшение каждой из частей $\Delta\sigma_k$, о котором говорится в определении, имеет тот смысл, что $d\to 0$. Если буквой $I$ обозначить величину интеграла, то высказанное выше определение равносильно следующему: при любом заданном положительном числе $\varepsilon$ существует такое положительное число $\eta$, что [ср. **I, 87**]

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\sigma_k \right| \leqslant \varepsilon,$$

если только $d \leqslant \eta$. В конце настоящей главы при изложении полной теории кратных интегралов мы введем строгое определение площади, уточним понятие области ($\sigma$), по которой можно производить интегрирование, выясним, каким образом ее можно разбивать на частичные области и докажем существование предела упомянутых сумм для непрерывных функций $f(N)$ и некоторого класса разрывных функций.

**56. Вычисление двукратного интеграла.** Рассматривая двукратный интеграл как объем, мы сможем вывести способ приведения двукратного интеграла к повторному.

Отнеся область ($\sigma$) к прямоугольным координатам, допустим, что элементы $\Delta\sigma$ получаются путем разбивания площади на прямоугольники со сторонами $\Delta x$, $\Delta y$, прямыми, параллельными координатным осям (черт. 38), и пусть $(x, y)$ — координаты точки $N$. Тогда можем написать:

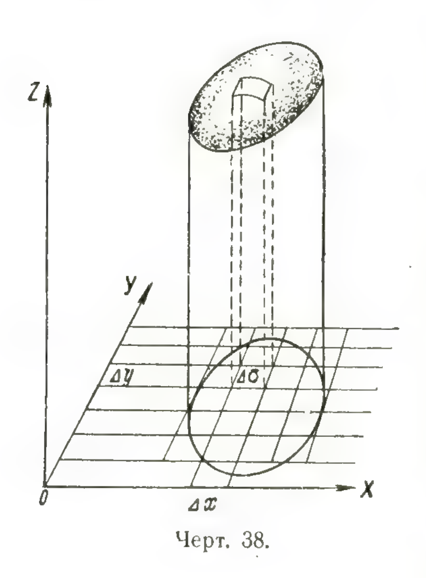
$$f(N) = f(x, y); \quad \Delta\sigma = \Delta x \, \Delta y; \quad d\sigma = dx\,dy$$

и

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

С другой стороны, применяя сказанное в [**54**] относительно выражения объема через повторный интеграл, можем написать:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx, \quad (7)$$



Черт. 38.

что и дает правило для вычисления двукратного интеграла, независимо от геометрического значения функции $f(x, y)$.

Если первое интегрирование совершается по $y$, то $x$ при этом считается постоянным, а пределы $y_1$ и $y_2$ суть функции от $x$, определяемые по формулам (2) [**54**]. Аналогичное обстоятельство имеет место, если первое интегрирование совершается по $x$. Пределы при первом интегрировании в повторном интеграле будут определенными постоянными, не зависящими от переменной второго интегрирования, лишь в том случае, когда область интегрирования есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Если ($\sigma$) есть прямоугольник, ограниченный прямыми (черт. 39):

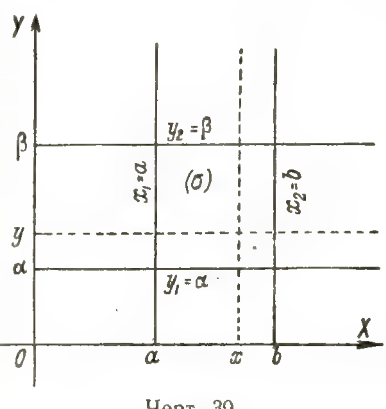
$$x = a; \quad x = b; \quad y = \alpha; \quad y = \beta,$$

то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_\alpha^\beta f(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \quad (8)$$

*Выражение $d\sigma = dx\,dy$ называется элементом площади в прямоугольных координатах.*

Заметим, что в формуле (7) первое интегрирование по $y$ при постоянном $x$ соответствует суммированию по прямоугольникам, содержащимся в полосе, параллельной оси $OY$, причем все эти прямоугольники имеют одну и ту же ширину $dx$, которая выносится за знак первого интегрирования. Второе интегрирование по $x$ соответствует сложению всех сумм, полученных при суммировании по полоскам, параллельным оси $OY$. В последнем параграфе настоящей главы мы даем точное обоснование формул (8) и (7).



Черт. 39.

Если прямые, параллельные осям, пересекают границу (σ) более чем в двух точках, то надо поступать так, как это указано в [**54**].

Здесь и в дальнейшем мы, конечно, предполагаем, что интегралы, о которых идет речь, существуют [ср. **95**]. Для этого достаточно, чтобы подинтегральные функции были непрерывны в (σ) вплоть до ее границы, что мы и будем предполагать, а область (σ) удовлетворяла условию, о котором будет сказано в [**91**] при обосновании понятия интеграла.

Отнесем теперь площадь (σ) к полярным координатам $(r,\ \varphi)$. Уравнение поверхности $(S)$ нужно будет тогда написать в виде $z = f(r,\ \varphi)$.

Элементы $\Delta\sigma$ получим, начертив семейство линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, т. е. концентрических окружностей и лучей, проходящих через начало координат (черт. 40). В частности, при пересечении двух окружностей радиусов $r$ и $(r + \Delta r)$ и лучей, идущих под углами $\varphi$ и $(\varphi + \Delta\varphi)$, образуется криволинейная фигура $\Delta\sigma$, которую, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно рассматривать как прямоугольник со сторонами $\Delta r$ и $r\Delta\varphi$, так что

$$\Delta\sigma = r\,\Delta r\,\Delta\varphi,$$

тогда можно написать:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(r,\ \varphi)\,r\Delta r\,\Delta\varphi = \iint\limits_{(\sigma)} f(r,\ \varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

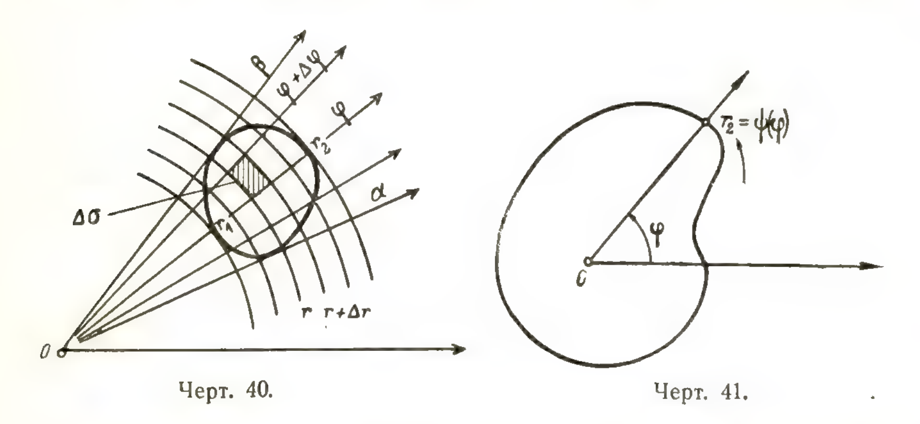
Мы получим здесь двукратный интеграл, подинтегральная функция которого есть $f(r,\ \varphi)\,r$. Для его вычисления можно применить то же правило приведения к повторному интегралу, но только здесь роль $x$ и $y$ играют $r$ и $\varphi$.

Первое интегрирование по $r$ при постоянном $\varphi$ соответствует суммированию по элементам $\Delta\sigma$, содержащимся между двумя лучами $\varphi$ и $(\varphi+d\varphi)$, причем $d\varphi$ выносится за знак первого интегрирования. Второе интегрирование по $\varphi$ соответствует сложению всех сумм, полученных при первом суммировании. Применяя упомянутое правило, мы прежде всего отмечаем крайние значения $\alpha$ и $\beta$ аргумента $\varphi$ ( в [54] крайние значения $x$), затем при фиксированном $\varphi$ — радиусы-векторы $r_1$ и $r_2$ точек входа внутрь $(\sigma)$ и выхода из $(\sigma)$ луча $\varphi = \text{const}$ (это соответствует определению $y_1$ и $y_2$ в [54]). Определив эти данные, имеем:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi)\, r\, dr, \tag{9}$$

где $r_1$ и $r_2$ — известные функции $\varphi$.

Чертеж 40 соответствует тому случаю, когда начало координат лежит вне контура $(l)$. Если же начало лежит внутри контура $(l)$,




Черт. 40. Черт. 41.

то можно считать, что $\varphi$ меняется от 0 до $2\pi$ и что $r$ при заданном значении $\varphi$ меняется от 0 до $r_2$, где $r_2$ получается из уравнения кривой $(l)$: $r_2 = \psi(\varphi)$, что дает (черт. 41):

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r_2} f(r, \varphi)\, r\, dr.$$

Выражение

$$r\, dr\, d\varphi \tag{10}$$

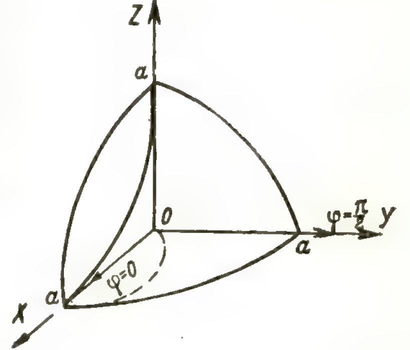
называется *элементом площади в полярных координатах*.

В частности, если $f(N)=1$, мы получаем выведенное в [I, 102] выражение для площади кривой в полярных координатах:

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2 - r_1^2)\,d\varphi.$$

(Формула из [I, 102] соответствует случаю $r_2 = r$ и $r_1 = 0$.)

Пример. Вычислим объем, заключенный между шаром радиуса $a$ и прямым круговым цилиндром радиуса $\frac{a}{2}$, проходящим через центр шара (черт. 42). За начало координат примем центр шара, плоскость $XOY$ выберем перпендикулярно к оси цилиндра и ось $OX$ проведем от центра шара к точке пересечения оси цилиндра с плоскостью $XOY$. В силу симметрии можем сказать, что искомый объем будет равен учетверенному объему части цилиндра, ограниченной плоскостями $ZOX$, $XOY$ и верхним полушарием.




Черт. 42.

Областью интегрирования будет здесь половина основания цилиндра, контур которой состоит из полуокружности

$$r = a\cos\varphi$$

и отрезка оси $OX$, причем угол $\varphi$ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, и соответствующий луч — от оси $OX$ к оси $OY$.

Уравнение поверхности шара

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

в нашем случае перепишется в виде

$$z^2 = a^2 - (x^2 + y^2); \quad z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Поэтому искомый объем будет

$$v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi =$$

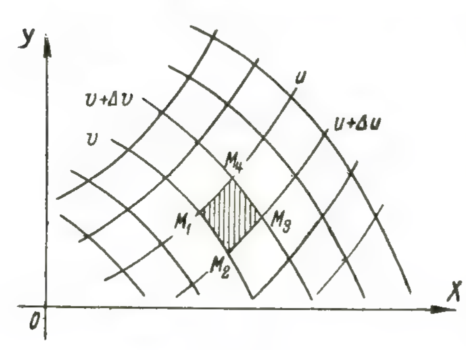
$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 - a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi = \frac{4}{3}a^3\left[\varphi + \cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

**57. Криволинейные координаты.** В предыдущем номере мы определили элемент площади и рассмотрели вопрос о вычислении интеграла в случае прямолинейных прямоугольных координат $(x, y)$ и полярных координат $(r, \varphi)$. Рассмотрим тот же вопрос для любых координат $(u, v)$. Введем вместо прямоугольных координат $x$ и $y$ какие-нибудь новые переменные $u$ и $v$ по формулам

$$\varphi(x, y) = u; \quad \psi(x, y) = v. \tag{11}$$

Если мы фиксируем значение $u$ и будем считать $v$ переменным, то получим семейство линий на плоскости. Точно так же, если фиксируем значение $v$ и будем считать $u$ переменным, то получим другое семейство линий. Линии этих двух семейств могут быть как кривыми линиями, так и прямыми (черт. 43).




Черт. 43.

Положение точки $M$ на плоскости определяется парой чисел $(x, y)$ или, в силу (11), парой чисел $(u, v)$. Эта пара чисел $(u, v)$ называется *криволинейными координатами* точки $M$. Решая уравнения (11) относительно $x$ и $y$, получим выражение прямоугольных координат $(x, y)$ через криволинейные $(u, v)$:

$$x = \varphi_1(u, v); \quad y = \psi_1(u, v). \tag{12}$$

В случае полярных координат $u$ есть $r$ и $v$ есть $\varphi$. Линии постоянного $u$ и постоянного $v$, о которых мы говорили выше, называются координатными линиями криволинейных координат $(u, v)$. Они образуют два семейства линий (окружности и лучи в полярных координатах).

Определим теперь элемент площади $d\sigma$ в криволинейных координатах $(u, v)$.

Для этого рассмотрим элемент площади $M_1M_2M_3M_4$ (черт. 43), образованный двумя парами бесконечно близких координатных линий:

$$\varphi(x, y) = u; \quad \varphi(x, y) = u + du,$$
$$\psi(x, y) = v; \quad \psi(x, y) = v + dv.$$

Координаты вершин четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$ с точностью до бесконечно малых высших порядков будут [I, 68]:

$$(M_1)\, x_1 = \varphi_1(u, v); \qquad y_1 = \psi_1(u, v).$$
$$(M_2)\, x_2 = \varphi_1(u + du, v) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial \varphi_1(u, v)}{\partial u} du;$$
$$y_2 = \psi_1(u + du, v) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} du.$$

$$(M_3)\ x_3 = \varphi_1(u+du,\ v+dv) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}dv;$$

$$y_3 = \psi_1(u+du,\ v+dv) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}du + \frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v}dv.$$

$$(M_4)\ x_4 = \varphi_1(u,\ v+dv) = \varphi_1(u, v) + \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}dv;$$

$$y_4 = \psi_1(u,\ v+dv) = \psi_1(u, v) + \frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v}dv.$$

Из написанных формул непосредственно вытекает, что $x_2 - x_1 = x_3 - x_4$ и $y_2 - y_1 = y_3 - y_4$, а из этих равенств следует, что отрезки $M_1M_2$ и $M_4M_3$ равны и одинаково направлены. То же можно сказать и об отрезках $M_1M_4$ и $M_2M_3$, т. е. с точностью до малых высших порядков $M_1M_2M_3M_4$ есть параллелограмм, и его площадь равна удвоенной площади треугольника $M_1M_2M_3$, т. е. по известной формуле аналитической геометрии:

$$d\sigma = |\,x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)\,|.$$

Подставляя выражения координат, получаем формулу для элемента площади в любых криволинейных координатах:

$$d\sigma = \left|\frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}\right| du\,dv = |D|\,du\,dv,$$

где $D$ называется *функциональным определителем от функций* $\varphi_1(u, v)$ и $\psi_1(u, v)$ по переменным $u$ и $v$:

$$D = \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}.$$

Окончательно формула замены переменных в двукратном интеграле будет:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} F(u, v)\,|D|\,du\,dv, \qquad (13)$$

где $F(u, v)$ означает функцию от $u$ и $v$, в которую перейдет $f(x, y)$ в результате преобразования (12). Пределы интегрирования по $u$ и $v$ определятся из вида области $(\sigma)$ аналогично тому, как это было указано в **[56]** для случая полярных координат.

В формулах преобразования (11) мы рассматривали $u$ и $v$ как новые криволинейные координаты точек, считая самую плоскость неизменной. Мы можем, наоборот, считать $u$ и $v$ попрежнему прямоугольными координатами, и тогда формулы (11) дадут нам преобразование плоскости, при котором точка, имевшая прямоугольные координаты $(x, y)$, преобразуется в точку с прямоугольными координатами $(u, v)$. Такое преобразование деформирует область $(\sigma)$ в новую область $(\Sigma)$. При такой точке зрения мы должны будем переписать

12 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

формулу (13) так:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} F(u, v)\,|D|\,du\,dv,$$

причем здесь $u$ и $v$ — прямоугольные координаты точек области $(\Sigma)$, и пределы интегрирования в интеграле по $(\Sigma)$ определяются так, как это было указано в [56]. Если положить $f(x, y) = F(u, v) = 1$, то получим выражение площади $\sigma$ области $(\sigma)$ в виде интеграла по $(\Sigma)$:

$$\sigma = \iint\limits_{(\Sigma)} |D|\,du\,dv.$$

Отсюда видно, между прочим, что при нашей новой точке зрения значение $|D|$ в какой-либо точке $N$ области $(\Sigma)$ есть коэффициент изменения площади в точке $N$ при деформации области $(\Sigma)$ в область $(\sigma)$, т. е. предел отношения площади некоторой области, лежащей в $(\sigma)$ и содержащей образ точки $N$, к площади, соответствующей области, лежащей в $(\Sigma)$ (эта область содержит точку $N$), когда эта последняя область стягивается к точке $N$. Более подробно мы рассмотрим с этой точки зрения преобразование переменных в двойном интеграле в [77].

Примеры. **1.** Рассмотрим на плоскости $XY$ круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$ с центром в начале координат и радиусом единица. Введем новые переменные по формулам перехода к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, но будем рассматривать $r$ и $\varphi$ не как полярные координаты, а как прямолинейные прямоугольные координаты, т. е. будем считать, что точка с прямоугольными координатами $(x, y)$ преобразовалась в точку с прямоугольными же координатами $(r, \varphi)$. При этом, очевидно, вышеупомянутый круг перейдет в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2\pi$ (или $r = 0$, $r = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$), причем началу координат $x = y = 0$ соответствует целая сторона $r = 0$ этого прямоугольника, а противоположные стороны $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ прямоугольника соответствуют одному и тому же радиусу круга. Применяя для прямоугольника правило приведения двойного интеграла к двум повторным, выражаемое формулой (8), непосредственно видим, что при интегрировании в полярных координатах по вышеуказанному кругу пределы интегрирования по $r$ должны быть $r = 0$ и $r = 1$, а по $\varphi$ соответственно $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$. Аналогично можно объяснить и те правила определения пределов при интегрировании в полярных координатах, которые даны в [56].

В данном случае

$$D = \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} = r,$$

и, как мы видели выше, $d\sigma = r\,dr\,d\varphi$.

**2.** В качестве другого примера второй точки зрения рассмотрим прямоугольный треугольник $(\sigma)$, ограниченный координатными осями и прямой $x + y = a$. Точки, лежащие внутри $(\sigma)$, определяются следующими неравенствами, которым должны подчиняться их координаты:

$$x > 0; \quad y > 0; \quad x + y < a. \qquad (14)$$

Введем новые переменные $(u, v)$, полагая:

$$x + y = u; \qquad ay = uv,$$

т. е.

$$u = x + y; \quad v = \frac{ay}{x+y},$$

или

$$x = \frac{u(a-v)}{a}; \quad y = \frac{uv}{a}.$$

Будем рассматривать $(u, v)$ тоже как прямолинейные прямоугольные координаты. Из последних формул следует, что неравенства (14) в новых переменных равносильны неравенствам: $0 < u < a$, $0 < v < a$, которые определяют квадрат $(\Sigma)$, имеющий вершину в начале и стороны, направленные по осям. Всякой точке $(x, y)$ из $(\sigma)$ соответствует определенная точка $(u, v)$ из $(\Sigma)$ и наоборот. Для $D$ получаем выражение:

$$D = \frac{a-v}{a} \cdot \frac{u}{a} - \frac{u}{a} \cdot \frac{v}{a} = \frac{u}{a},$$

и формула (13) будет иметь вид:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{(\Sigma)} F(u, v) \frac{u}{a}\, du\, dv,$$

или, вводя пределы интегрирования согласно (7) и (8):

$$\int_0^a dx \int_0^{a-x} f(x, y)\, dy = \frac{1}{a} \int_0^a u\, du \int_0^a F(u, v)\, dv.$$

**58. Трехкратный интеграл.** Двукратный интеграл, о котором мы говорили в [55], можно истолковать не как объем тела, а как массу, распределенную на плоской области $(\sigma)$. В самом деле, вообразим, что на $(\sigma)$ распределена материя. Пусть $\Delta m$ — количество материи на элементе $\Delta\sigma$, содержащем внутри себя некоторую точку $N$. Если при беспредельном сжатии $\Delta\sigma$ к точке $N$ отношение $\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$ ($\Delta\sigma$ — площадь упомянутого элемента) стремится к определенному пределу $f(N)$, то этот предел определяет плотность поверхностного распределения материи в точке $N$:

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = f(N).$$

Если $(\sigma)$ разбита на малые элементы $\Delta\sigma$, то масса отдельного элемента приближенно равна произведению $f(N)\Delta\sigma$, а для полной массы на $(\sigma)$ можем написать приближенно

$$m \approx \sum_{(\sigma)} f(N)\, \Delta\sigma,$$

где суммирование распространяется на все элементы $\Delta\sigma$, заполняющие $(\sigma)$. Полученное приближенное равенство будет тем более точным, чем меньше каждый элемент $\Delta\sigma$. В пределе при беспредельном

сжимании по всем направлениям каждого из элементов $\Delta\sigma$, причем число этих элементов тем самым беспредельно увеличивается, мы будем иметь:

$$m = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\,\Delta\sigma = \iint_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma.$$

Совершенно аналогичным путем рассмотрение массы пространственного распределения материи приведет нас к понятию трехкратного интеграла. Вообразим некоторый объем $(v)$ в пространстве, ограниченный замкнутой поверхностью $(S)$. Пусть в этом объеме распределена материя, общая масса которой есть $m$. Разобьем весь объем $(v)$ на большое число $n$ малых элементов $\Delta v$ и обозначим массу каждого из них соответственно через $\Delta m$. Пусть отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta v}$$

при сужении элемента $\Delta v$ к точке $M$, лежащей внутри этого элемента, имеет предел. Он определяет *плотность (пространственную) распределения в точке* $M$.

Обозначим этот предел через $f(M)$:

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta v} = f(M).$$

Как и выше, мы можем писать приближенно

$$m \approx \sum_{(v)} f(M)\,\Delta v,$$

где суммирование распространяется на все элементы $\Delta v$, заполняющие объем $(v)$.

В пределе при беспредельном сужении по всем направлениям каждого из эементов $\Delta v$ мы будем иметь:

$$m = \lim \sum_{(v)} f(M)\,\Delta v.$$

Этот физический пример приводит нас к общему определению трехкратного интеграла, аналогичному определению двукратного интеграла. Пусть $(v)$ — ограниченная область трехмерного пространства и $f(M)$ — функция точки, определенная в этой области, т. е. функция, принимающая в каждой точке $M$ области $(v)$ определенное значение. Разбиваем $(v)$ на $n$ частей, и пусть $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$ — объемы этих частей, а $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — какие-либо точки, находящиеся в этих частичных областях.

Составляем сумму произведений:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k. \qquad (15)$$

*Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений и при беспредельном уменьшении каждой из частичных областей называется трехкратным интегралом от функции $f(M)$ по области $v$:*

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \lim \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k.$$

Замечание [ср. **55**]. Пусть $d_k$ — максимальное расстояние между двумя точками частичной области $\Delta v_k$ (диаметр этой области) и $d$ — наибольшее из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Беспредельное уменьшение каждой из частичных областей имеет тот смысл, что $d \to 0$. Если буквой $I$ обозначить величину интеграла, то высказанное определение равносильно следующему: при любом заданном положительном числе $\varepsilon$ существует такое положительное число $\eta$, что

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta v_k \right| \leqslant \varepsilon, \text{ если только } d \leqslant \eta.$$

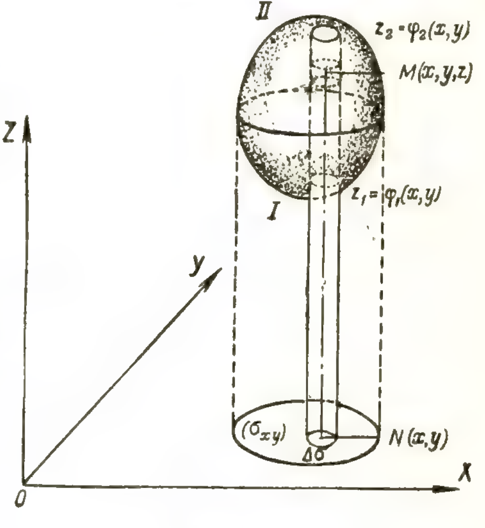
Строгая теория трехкратных интегралов, как и двукратных, будет изложена в конце настоящей главы.

Если $f(M) = 1$ во всей области $(v)$, то получится объем $v$ этой области:

$$v = \iiint\limits_{(v)} dv.$$

Для вычисления трехкратного интеграла нужно уметь приводить его к простым или двукратным интегралам, способ вычисления которых был уже указан.

Отнесем пространство к прямоугольным координатам. Допустим, для простоты, что поверхность $(S)$, ограничивающая объем $(v)$, пересекается не более чем в двух точках любой прямой, параллельной одной из координатных осей. Построим цилиндр, проектирующий эту поверхность $(S)$ на плоскость $XOY$, в виде области $(\sigma_{xy})$ (черт. 44).




Черт. 44.

Линия касания поверхности $(S)$ с цилиндром разобьет ее на две части:

$$\text{(I)} \qquad z_1 = \varphi_1(x, y);$$
$$\text{(II)} \qquad z_2 = \varphi_2(x, y).$$

Прямая, параллельная оси $OZ$ и проходящая через любую точку площади $(\sigma_{xy})$, войдет внутрь объема $(v)$ через часть (I) и выйдет из него через (II); ординаты точек входа и выхода $z_1$ и $z_2$ будут известными функциями от $(x, y)$.

Условимся теперь разбивать объем $(v)$ на элементы $\Delta v$ следующим образом: площадь $(\sigma_{xy})$ разобьем на большое число малых элементов $\Delta\sigma$; на каждом из них, как на основании, построим цилиндр, который вырежет из $(v)$ столбик; этот столбик мы затем разобьем на элементарные цилиндры высоты $\Delta z$ сечениями, параллельными плоскости $XOY$ и проведенными на расстоянии $\Delta z$ одно от другого. Полученные таким путем элементы объема $\Delta v$ выражаются по формуле

$$\Delta v = \Delta\sigma\, \Delta z.$$

Возьмем один из элементов $\Delta\sigma$ и внутри него точку $N(x, y)$. Проведем через нее прямую, параллельную оси $OZ$, которая пересечет $(S)$ в точках с ординатами $z_1$ и $z_2$; на каждом из ее отрезков, заключенных внутри элементов $\Delta v$, возьмем по точке $M(x, y, z)$.

Сумма, входящая в формулу (15), может быть переписана так:

$$\sum_{(v)} f(x, y, z)\,\Delta v = \sum_{(\sigma)} \Delta\sigma \sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z.$$

Фиксируем пока $\Delta\sigma$ и будем уменьшать $\Delta z$. Из основного понятия об определенном интеграле следует:

$$\lim \sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z = \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz,$$

причем величины $x, y$ надлежит рассматривать как постоянные параметры. Итак, приближенно имеем:

$$\sum_{(z)} f(x, y, z)\,\Delta z \approx \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dy = \Phi(x, y).$$

Но тогда, очевидно, в силу определения двукратного интеграла:

$$\sum_{(v)} f(x, y, z)\,\Delta v \approx \sum_{(\sigma_{xy})} \Delta\sigma\Phi(x, y) \to \iint_{(\sigma_{xy})} \Phi(x, y)\,d\sigma,$$

т. е.

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iint_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \qquad (16)$$

Предыдущие рассуждения, если отвлечься от геометрического истолкования, приводят нас к следующему правилу для вычисления трехкратных интегралов.

*Для приведения трехкратного интеграла*

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dv$$

*к простому и двукратному:* 1) *проектируем поверхность* $(S)$, *ограничивающую объем* $(v)$, *на плоскость* $XY$ *в виде области* $(\sigma_{xy})$; 2) *определяем координаты* $z_1$ *и* $z_2$ *точек входа и выхода прямой, параллельной* $OZ$ *и проведенной через точку* $(x, y)$ *области* $(\sigma_{xy})$; 3) *считая* $(x, y)$ *постоянным, вычисляем интеграл*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz,$$

*а затем двойной интеграл*

$$\iint_{(\sigma_{xy})} d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz.$$

Двукратный интеграл можно, в свою очередь, привести к повторному, пользуясь прямоугольными координатами $(x, y)$, и мы получим окончательно:

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \qquad (17)$$

причем пределы $(y_1, y_2)$ и $(a, b)$ определяются, как и в [**54**].

Мы предоставляем читателю разобрать другой порядок приведения трехкратного интеграла к повторному путем проектирования поверхности $(S)$ на плоскость $YZ$ в виде площади $(\sigma_{yz})$ или на плоскость $XZ$ в виде $(\sigma_{xz})$, а равно и более сложные случаи, когда поверхность пересекается прямыми, параллельными координатным осям, более чем в двух точках.

Формулу (17) можно переписать так:

$$\iiint_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz.$$

*Множитель* $dx\,dy\,dz$ *называется элементом объема в прямоугольных координатах; он получается разбиением объема* $(v)$ *на бесконечно малые прямоугольные параллелепипеды плоскостями, параллельными координатным плоскостям.*

Путь строгого обоснования формулы (17) будет указан в конце настоящей главы. Заметим, что если прямые, параллельные осям, пересекают $(S)$ более чем в двух точках, то надо разбить $(v)$ на части так, чтобы для каждой из частей пересечение имело место не более чем в двух точках. Вычисляя интеграл по каждой из полученных частей указанным выше способом и складывая эти интегралы, мы и получим интеграл по всей области $(v)$.

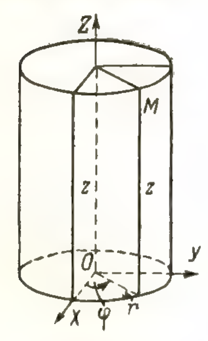
Если $(v)$ есть прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями, параллельными координатным плоскостям

$$x = a; \quad x = b; \quad y = a_1; \quad y = b_1; \quad z = a_2; \quad z = b_2,$$

то и при первых интегрированиях пределы окажутся постоянными

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{a_1}^{b_1} dy \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\, dz. \qquad (18)$$

**59. Цилиндрические и сферические координаты.** Часто бывает удобно относить пространство не к прямолинейным прямоугольным координатам, а к другой системе координат. Наиболее употребительные из этих систем — *цилиндрические и сферические координаты*. В прямолинейной прямоугольной системе положение точки определяется ее тремя координатами $(a, b, c)$, и точка эта находится на пересечении трех плоскостей: $x = a$, $y = b$, $z = c$, параллельных координатным плоскостям. Таким образом в этом случае пространство как бы заполняется тремя семействами взаимно перпендикулярных плоскостей



Черт. 45.

$$x = C_1; \quad y = C_2; \quad z = C_3,$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — постоянные, и всякая точка пространства является точкой пересечения трех плоскостей различных семейств. Оставляя координату $z$, введем вместо $x$ и $y$ новые координаты $r$ и $\varphi$, полагая:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z.$$

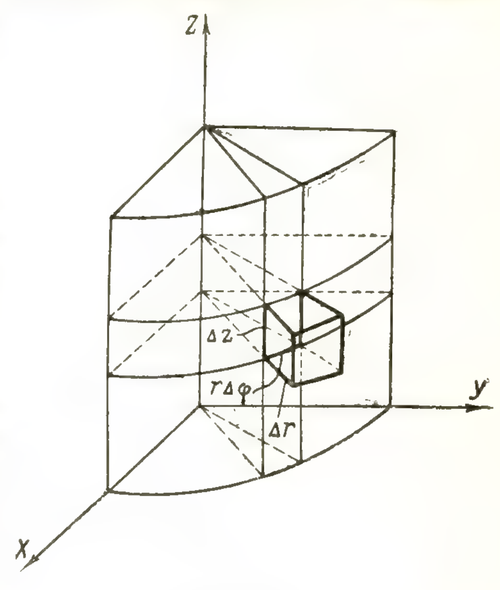
Координата $r$ есть расстояние точки $M$ до оси $OZ$ и $\varphi$ есть угол, образованный плоскостью, проходящей через ось $OZ$ и точку $M$, с плоскостью $XOZ$ (черт. 45), причем $\varphi$ может меняться от 0 до $2\pi$ и $r$ — от 0 до $(+\infty)$. Координаты $(r, \varphi, z)$ называются *цилиндрическими координатами* точки $M$. Точкам оси $OZ$ соответствует $r = 0$, а координата $\varphi$ у них неопределенна.

Мы имеем в этом случае следующие три семейства координатных поверхностей:

$$r = C_1; \quad \varphi = C_2; \quad z = C_3.$$

Первое семейство $r = C_1$ есть семейство круговых цилиндров, ось вращения которых есть ось $OZ$. Второе семейство $\varphi = C_2$ есть семейство полуплоскостей, проходящих через ось $OZ$, и, наконец, третье семейство $z = C_3$ есть семейство плоскостей, параллельных плоскости, $XOY$.

Придавая переменным $r$, $\varphi$ и $z$ приращения $\Delta r$, $\Delta\varphi$, $\Delta z$ и проводя по две близкие поверхности из каждого семейства, соответствующие взятым значениям переменных, получим элемент объема в цилиндрических координатах. Вдоль каждого из его ребер меняется только одна из координат, и эти ребра попарно ортогональны (черт. 46). С точностью до малых высших порядков такой элемент можно принять за прямоугольный параллелепипед с ребрами




Черт. 46.

$$\Delta r, \ r\Delta\varphi, \ \Delta z,$$

что дает выражение элемента объема в цилиндрических координатах

$$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

и вместе с тем выражение трехкратного интеграла в цилиндрических координатах:

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(r, \ \varphi, \ z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz, \tag{19}$$

причем пределы интегрирования определяются по тем же принципам как и в случае прямоугольных координат.

Пример. Найти массу сегмента шара, наполненного неоднородной материей, плотность которой изменяется пропорционально расстоянию от основания сегмента (черт. 47).

Поместим начало координат в центр шара, за плоскость $XOY$ примем диаметральную плоскость, параллельную основанию сегмента, ось $OZ$ направим от начала кординат к сегменту и обозначим через $a$ радиус шара, через $h$ высоту сегмента, через $r_0$ радиус основания сегмента.

Уравнение шара в цилиндрических координатах будет:

$$r^2 + z^2 = a^2 \quad \text{или} \quad z^2 = a^2 - r^2.$$

Закон изменения плотности выразится формулой:

$$f(r, \varphi, z) = b + cz,$$

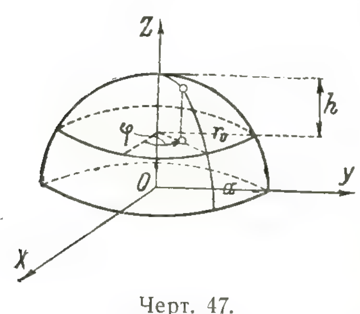
где $b$ и $c$ — известные постоянные.

Применение формулы (19) дает:

$$m = \iiint\limits_{(v)} (b + cz)\, r dr\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r_0} r\, dr \int\limits_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}} (b+cz)\, dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{r_0} \left[ bz + \frac{c}{2} z^2 \right]_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}} r\, dr.$$

Производя подстановку значений $z$ и интегрирование, что мы предоставляем сделать читателю, получим:

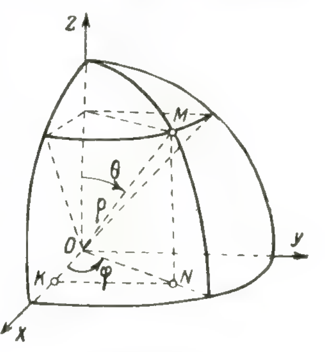



Черт. 47.

$$m = bv + c\pi \frac{r_0^4}{4},$$

где $v$ есть объем сегмента.

Рассмотрим еще *сферические координаты* или, как иногда говорят, *полярные координаты в пространстве*. Пусть $M$ — некоторая точка пространства и $\overline{OM}$ — отрезок, проведенный из начала координат $O$ в точку $M$. Положение точки $M$ можно определить следующими тремя величинами: длиною $\rho$ отрезка $\overline{OM}$; углом $\varphi$, который полуплоскость, проходящая через ось $OZ$ и точку $M$, образует с плоскостью $XZ$; углом $\theta$, который отрезок $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси $OZ$ (черт. 48). При этом $\rho$ может изменяться от 0 до $(+\infty)$; угол $\varphi$ отсчитывается против часовой стрелки от оси $OX$ и может изменяться от 0 до $2\pi$; наконец, угол $\theta$ отсчитывается от положительного направления оси $OZ$ и может изменяться от 0 до $\pi$. Всякой точке $M$ соответствуют определенные координаты $\rho$, $\varphi$, $\theta$ и наоборот. Опустим из точки $M$ перпендикуляр $MN$ на плоскость $XY$ и из основания этого перпендикуляра $N$ опустим перпендикуляр $NK$ на ось $OX$. Отрезки $\overline{OK}$, $\overline{KN}$, $\overline{NM}$ дают, очевидно, прямоугольные координаты $x$, $y$, $z$ точки $M$. Из прямоугольного треугольника $ONM$ имеем:




Черт. 48.

$$\overline{ON} = \rho \sin \theta$$

и, пользуясь еще прямоугольным треугольником $ONK$, получим окончательно *формулы перехода от прямоугольных координат к сферическим*:

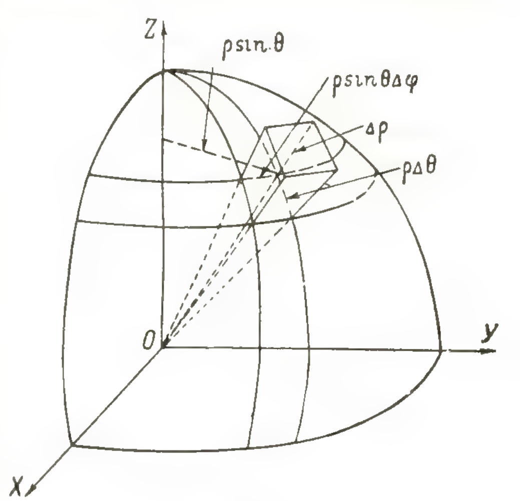
$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Рассмотрим семейства координатных поверхностей:

$$\rho = c_1, \quad \varphi = c_2, \quad \theta = c_3.$$

Первое семейство есть, очевидно, семейство сфер с центром в начале координат; второе семейство — полуплоскостей, проходящих через ось $OZ$, и третье семейство — круговых конусов, для которых осью вращения является ось $OZ$. Заметим, что началу координат $O$ соответствует $\rho = 0$, а значение двух других координат $\varphi$ и $\theta$ неопределенно. Для всех точек, лежащих на оси $OZ$, будет неопределенной координата $\varphi$, а $\theta = 0$ или $\pi$.

Придавая переменным $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ бесконечно малые приращения $\Delta\rho$, $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$, получим элементарный объем в сферических координатах. Вдоль каждого из его ребер меняется только одна из координат, и эти ребра попарно ортогональны (черт. 49). С точностью до малых высших порядков такой элемент можно принять за прямоугольный параллелепипед с ребрами:



Черт. 49.

$$d\rho, \ \rho\, d\theta, \ \rho \sin \theta\, d\varphi,$$

так что выражение этого элементарного объема будет

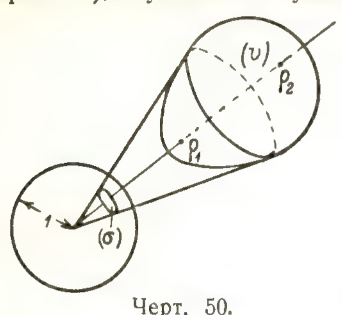
$$dv = \rho^2 \sin \theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

откуда получаем выражение трехкратного интеграла в сферических координатах

$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\, dv = \iiint\limits_{(v)} f(\rho, \ \theta, \ \varphi)\, \rho^2 \sin \theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \qquad (20)$$

Приведение трехкратного интеграла к повторным можно выполнить здесь, например, следующим образом: находим центральную

проекцию объема $(v)$ из начала координат на сферу радиуса единица (черт. 50); пусть это будет область $(\sigma)$ [если начало координат внутри $(v)$, то $(\sigma)$ совпадает со всей поверхностью сферы]. Проведем радиусы-векторы через все точки $(\sigma)$; в простейшем случае каждый такой луч будет иметь точку входа внутрь $(v)$ и выхода из $(v)$; радиусы-векторы этих точек обозначим через $\rho_1$ и $\rho_2$ [в случае, когда начало координат лежит внутри $(v)$, полагаем $\rho_1 = 0$]. Мы получим тогда:



Черт. 50.

$$\iiint\limits_{(v)} f(\rho, \theta, \varphi)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \iint\limits_{(\sigma)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \varphi)\rho^2 \, d\rho,$$

где $\rho_1$ и $\rho_2$ — известные функции $\theta$ и $\varphi$. Пределы интегрирования по $\theta$ и $\varphi$ определяются по виду области $(\sigma)$.

Пример. Определить массу шара, состоящего из концентрических слоев различной плотности. Можем считать в данном случае, согласно условию, что плотность зависит только от $\rho$ и выражается функцией $f(\rho)$, что дает:

$$m = \iiint\limits_{(v)} f(\rho)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^a f(\rho)\rho^2 d\rho = 4\pi \int\limits_0^a f(\rho)\rho^2 \, d\rho.$$

Если плотность постоянна и равна единице, получаем выражение объема шара:

$$v = 4\pi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Замечание. Множитель $\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$ имеет весьма важное геометрическое значение: это есть элемент площади поверхности сферы радиуса единица, на которые она разбивается меридианами и параллельными кругами (черт. 51). Если мы будем разбивать поверхность сферы радиуса единица на элементы $d\sigma$ какой угодно формы, то получим[1]:

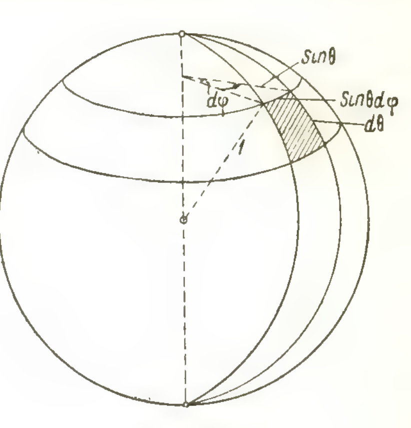
$$\iiint\limits_{(v)} f(M)\, dv = \iint\limits_{(\sigma)} d\sigma \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(M)\, \sigma^2 \, d\rho,$$

где $(\sigma)$ есть область, в виде которой проектируется на поверхность сферы рассматриваемый объем при помощи центральной проекции из начала координат.

---

[1]) $d\sigma$ обозначает как сам элемент, так и его площадь.

Построим элементарный конус, вершина которого в центре шара, а направляющая — контур элемента $d\sigma$. *Растворение этого конуса, которое измеряется площадью $d\sigma$, называется телесным углом, под которым виден из центра элемент любой поверхности* ($S$), *вырезываемый из нее этим элементарным конусом.*




Черт. 51.

**60. Криволинейные координаты в пространстве.** В общем случае криволинейных координат в пространстве положение точки определяется тремя числами $q_1$, $q_2$, $q_3$, связанными с прямоугольными координатами $x$, $y$, $z$ по формулам:

$$\varphi(x, y, z) = q_1; \quad \psi(x, y, z) = q_2; \quad \omega(x, y, z) = q_3. \qquad (21)$$

Придавая $q_1$, $q_2$, $q_3$ различные постоянные значения, получим три семейства координатных поверхностей. Элемент объема $dv$ будет образован тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей. Не останавливаясь на доказательстве, приведем результат, аналогичный результату из [57], для двух измерений. Упомянутый элементарный объем $dv$ можно рассматривать с точностью до бесконечно малых высших порядков как параллелепипед, и если мы решим (21) относительно $x$, $y$, $z$:

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3); \quad y = \psi_1(q_1, q_2, q_3); \quad z = \omega_1(q_1, q_2, q_3), \quad (21_1)$$

то выражение $dv$ будет

$$dv = |D|\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

и формула замены переменных в трехкратном интеграле будет выглядеть так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(v)} F(q_1, q_2, q_3)\, |D|\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

где $F(q_1, q_2, q_3)$ получается из $f(x, y, z)$ в результате преобразования $(21_1)$, а $D$ — функциональный определитель от $x, y, z$ по $q_1, q_2, q_3$:

$$D = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right) + \\ + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right).$$

Так же, как и в [57], формулы (21) можно рассматривать иначе как деформацию пространства, причем точка с прямоугольными координатами $(x, y, z)$ переходит в точку с прямоугольными координатами $(q_1, q_2, q_3)$. При таком толковании $|D|$ дает коэффициент изменения объема в данном месте при переходе от $(q_1, q_2, q_3)$ к $(x, y, z)$.

Приведение тройного интеграла в координатах $(q_1, q_2, q_3)$ к трем квадратурам и определение пределов в этих квадратурах производится аналогично тому, как это делалось в случае двойного интеграла [57].

Для читателя, знакомого с понятием определителя, заметим, что выражение $D$ может быть написано в виде следующего определителя третьего порядка:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_3}, & \frac{\partial \omega_1}{\partial q_3} \end{vmatrix}.$$

В томе III мы подробно займемся такими определителями.

Пример. Пусть имеется тетраэдр $(v)$, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = a$ и определяемый неравенствами

$$x > 0; \quad y > 0; \quad z > 0; \quad x + y + z < a.$$

Введем новые переменные

$$x + y + z = q_1; \quad a(y + z) = q_1 q_2; \quad a^2 z = q_1 q_2 q_3$$

и будем толковать $(q_1, q_2, q_3)$ как прямолинейные прямоугольные координаты. Из написанных формул следует:

$$q_1 = x + y + z; \quad q_2 = \frac{a(y+z)}{x+y+z}; \quad q_3 = \frac{az}{y+z}$$

или

$$x = \frac{q_1(a - q_2)}{a}; \quad y = \frac{q_1 q_2 (a - q_3)}{a^2}; \quad z = \frac{q_1 q_2 q_3}{a^2}.$$

Совершенно так же, как и в [57], нетрудно видеть, что тетраэдр $(v)$ переходит в куб $(v_1)$: $0 < q_1 < a$; $0 < q_2 < a$; $0 < q_3 < a$. Нетрудно и здесь определить $D = \frac{1}{a^3} q_1^2 q_2$, так что формула преобразования будет

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(v_1)} F(q_1, q_2, q_3) \frac{1}{a^3} q_1^2 q_2\, dq_1\, dq_2\, dq_3;$$

или, если определить пределы интегрирования:

$$\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\, dz = \frac{1}{a^3} \int_0^a q_1^2\, dq_1 \int_0^a q_2\, dq_2 \int_0^a F(q_1, q_2, q_3)\, dq_3.$$

**61. Основные свойства кратных интегралов.** Раньше мы доказали основные свойства определенного интеграла, пользуясь непосредственно его определением, как предела суммы [I, 94]. Совершенно так же можно доказать и основные свойства кратных интегралов. Для простоты мы все функции будем считать непрерывными, так что интегралы от них безусловно имеют смысл.

I. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} af(N)\,d\sigma = a\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma.$$

II. Интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых

$$\iint\limits_{(\sigma)} [f(N) - \varphi(N)]\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma - \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma.$$

III. Если область $(\sigma)$ разложена на конечное число частей [например на две части $(\sigma_1)$ и $(\sigma_2)$], то интеграл по всей области равен сумме интегралов по всем частям:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(N)\,d\sigma + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(N)\,d\sigma.$$

IV. Если в области $(\sigma)\, f(N) \leqslant \varphi(N)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma.$$

В частности:

$$\left|\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{(\sigma)} |f(N)|\,d\sigma.$$

V. Если $\varphi(N)$ сохраняет знак в области $(\sigma)$, то имеет место теорема о среднем, выражающаяся формулой:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\varphi(N)\,d\sigma = f(N_0)\iint\limits_{(\sigma)} \varphi(N)\,d\sigma,$$

где $N_0$ — некоторая точка, лежащая внутри области $(\sigma)$.

В частности при $\varphi(N) = 1$ получаем

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = f(N_0)\,\sigma,$$

где $\sigma$ — площадь области $(\sigma)$.

Аналогичные свойства имеют место и для трехкратного интеграла,

Заметим, что при определении двукратного и трехкратного интеграла как предела суммы считается всегда, что область интегрирова-

ния — конечна, и подинтегральная функция $f(N)$ во всяком случае ограничена в области интегрирования, т. е. существует такое число $A$, что во всех точках $N$ области интегрирования соблюдено условие $|f(N)| < A$. Если эти условия не выполнены, то интеграл может существовать как несобственный интеграл, аналогично тому, как это имело место для простого определенного интеграла [I, **97** и **98**]. Мы займемся несобственными кратными интегралами в § 8 [**86**].

**62. Площадь поверхности.** Напишем уравнение данной поверхности $(S)$ в виде

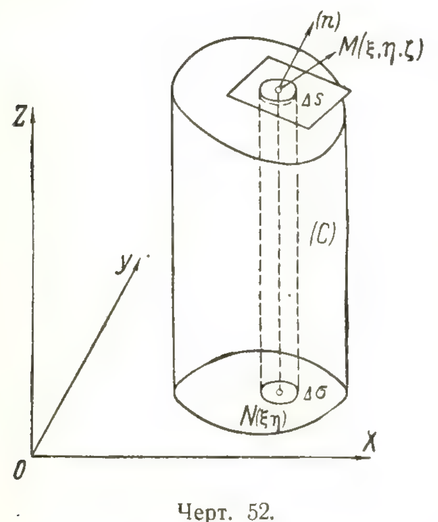
$$z = f(x, y) \tag{22}$$

и обозначим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q. \tag{23}$$

Мы видели [I, **160**], что направляющие косинусы нормали $(n)$ к поверхности $(S)$ в точке $(x, y, z)$ пропорциональны $p$, $q$ и $(-1)$, т. е., как известно из аналитической геометрии, выражаются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos(n, X) = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}; \quad \cos(n, Y) = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}; \\ \cos(n, Z) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$




Черт. 52.

Определим площадь части поверхности $(S)$, вырезываемой цилиндром $(C)$, который проектирует эту часть на плоскость $XY$ в виде области $(\sigma)$ (черт. 52). Разобьем площадь $(\sigma)$ на малые элементы $\Delta\sigma$; цилиндры, построенные на основаниях $\Delta\sigma$, разобьют $(S)$ на элементы $\Delta S$.

Возьмем в каждом из элементов $\Delta\sigma$ по точке $N(\xi, \eta)$, которой соответствует на поверхности $(S)$ точка $M(\xi, \eta, \zeta)$, где $\zeta = f(\xi, \eta)$. Проведем в точке $M$ касательную плоскость и нормаль $(n)$ к поверхности и обозначим через $\Delta S'$ плоскую площадку, вырезываемую на этой касательной плоскости вышеупомянутым цилиндром с основанием $\Delta\sigma$.

*Определим площадь упомянутой выше части поверхности* $(S)$ *как предел суммы площадей плоских площадок* $\Delta S'$, *когда число элементов* $\Delta\sigma$ *беспредельно растет, а каждый из них беспредельно уменьшается по всем направлениям.* Покажем, что этот предел выражается двойным интегралом по области $(\sigma)$. Элемент $\Delta\sigma$ есть проекция плоского элемента $\Delta S'$ на плоскость $XY$, причем нормали к плоскостям этих двух элементов образуют угол $(n, Z)$, косинус которого выражается третьей из формул (24), а потому[1])

$$\Delta\sigma = \Delta S' \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad \text{или} \quad \Delta S' = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma,$$

и таким образом для площади $S$ упомянутой поверхности мы получаем по определению:

$$S = \lim \sum \Delta S' = \lim \sum_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,\Delta\sigma.$$

Предел, стоящий в правой части равенства, представляет собою двойной интеграл по области $(\sigma)$, и мы получаем:

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \qquad (25)$$

— искомую формулу для площади части кривой поверхности, вырезываемой из нее цилиндром, образующие которого параллельны оси $OZ$.

Выражение, стоящее под знаком интеграла, представляет собой элемент $dS$ площади поверхности. Пользуясь выражением $\cos(n, Z)$, можем написать:

$$dS = \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma_{xy} = \frac{d\sigma_{xy}}{|\cos(n, Z)|} \quad \text{или} \quad d\sigma_{xy} = |\cos(n, Z)|\,dS. \qquad (26)$$

Здесь $d\sigma_{xy}$ есть проекция $dS$ на плоскость $XY$. Нужно брать абсолютное значение $\cos(n, Z)$, так как элементы площади $d\sigma_{xy}$ и $dS$ считаются положительными.

---

[1]) Пусть $(S_2)$ есть проекция плоской области $(S_1)$ и $\varphi$ — острый двугранный угол, образованный плоскостями $S_1$ и $S_2$ или, что то же, угол, образованный нормалями к этим плоскостям. Как нетрудно видеть, будет иметь место соотношение: $S_2 = S_1 \cos\varphi$, где $S_1$ и $S_2$ — площади $(S_1)$ и $(S_2)$.

Действительно, разобьем области на прямоугольники двумя семействами прямых, из которых одно есть семейство прямых, параллельных линии пересечения плоскостей $(S_2)$ и $(S_1)$. Положим, что прямоугольники области $(S_2)$ суть проекции прямоугольников $(S_1)$. При проектировании две стороны, параллельные линии пересечения плоскостей $(S_2)$ и $(S_1)$, сохраняют свою величину, а две другие умножаются на $\cos\varphi$, так что если $dx\,dy$ — элемент площади для $(S_1)$, то для $(S_2)$ он будет $\cos\varphi\,dx\,dy$ и, следовательно:

$$S_2 = \iint\limits_{(S_1)} \cos\varphi\,dx\,dy = \cos\varphi \iint\limits_{(S_1)} dx\,dy = S_1 \cos\varphi.$$

Мы предполагаем, что $p$ и $q$, определяемые формулами (23), суть непрерывные функции $(x, y)$. Предыдущие рассуждения выражают предел суммы площадей $\Delta S'$ в виде интеграла (25) от непрерывной функции и тем самым показывают, что этот предел существует. Данное выше определение площади поверхности обладает тем недостатком, что в само определение входит операция проектирования, связанная с выбором плоскости $XY$. Можно показать, что величина площади поверхности не зависит от выбора плоскости $XY$. Заметим еще, что если прямые, параллельные оси $OZ$, встречают поверхность $(S)$ в нескольких точках, то для вычисления площади поверхности по формуле (25) надо разбить поверхность на части и вычислять площадь для каждой отдельной части.

Можно дать определение площади поверхности, не зависящее от выбора осей. Пусть $(S)$ — кусок гладкой поверхности, ограниченный кусочно гладким контуром. Разобьем $(S)$ на части $(S_1)$, $(S_2)$, ..., $(S_n)$, на каждой части возьмем какую-либо точку $M_k$ и спроектируем $(S_k)$ на касательную плоскость к $(S)$ в точке $M_k$. Пусть $p_k$ — площадь этой проекции. Можно показать при определенных условиях гладкости $(S)$ и ее контура, что сумма $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ стремится к определенному пределу $S$, если наибольший из диаметров $\delta$ каждой из частей стремится к нулю [ср. **55**]. Это определение площади поверхности в случае явного уравнения поверхности (22) и при наличии непрерывных производных (23) и приведет к формуле (25) для площади $S$. (Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, §§ 599—601).

Примеры. **1.** Вычислить площадь части шаровой поверхности, рассмотренной в примере [**56**].

Мы имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; \quad p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z};$$

$$q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} = \frac{a}{z}.$$

$$S = \iint\limits_{(\delta)} \frac{a}{z} r\,dr\,d\varphi = 2a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= 2a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sqrt{a^2 - r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi)\,d\varphi = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

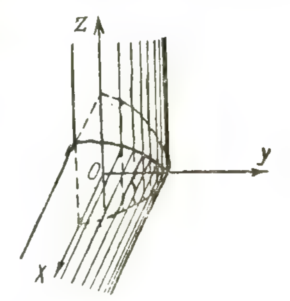
2. Найти площадь части цилиндра

$$x^2+y^2=a^2, \tag{27}$$

вырезываемой из него цилиндром (черт. 53)

$$y^2+z^2=a^2. \tag{28}$$

В этой задаче удобнее считать независимыми переменными $y$ и $z$, а $x$ функцией от них, определяемой из уравнения (27). Область интегрирования в плоскости $YZ$ есть круг, окружность которого определяется уравнением (28). Заштрихованная на чертеже площадь равна, очевидно, $\frac{1}{8}$ части всей рассматриваемой площади, а потому имеем:



Черт. 53.

$$S=8\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\,dz,$$

причем

$$p=\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}; \qquad q=\frac{dx}{dz}=0;$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{a}{x}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

так что

$$S=8a\int\limits_0^a dz\int\limits_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=8a\int\limits_0^a \arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\,dz=$$

$$=8a\left[z\arcsin\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a}\Bigg|_{z=0}^{z=a}+\int\limits_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz\right]=$$

$$=-8a\sqrt{a^2-z^2}\Bigg|_{z=0}^{z=a}=8a^2.$$

**63. Интегралы по поверхности и формула Остроградского.** Понятие о двукратном интеграле по плоской области без труда обобщается на случай интегрирования по поверхности. *Пусть* $(S)$ — *поверхность (замкнутая или незамкнутая) и* $F(M)$ — *непрерывная функция точки на этой поверхности. Разбиваем* $(S)$ *на* $n$ *частей и пусть* $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ — *площади этих частей и* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — *какие-либо точки, находящиеся на этих частях. Составляем сумму произведений*

$$\sum_{k=1}^{n} F(M_k)\cdot\Delta S_k.$$

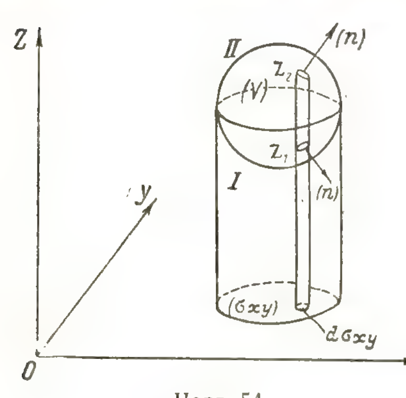
*Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений и беспредельном сжимании каждой из частей $\Delta S_k$ называется интегралом от функции $F(M)$ по поверхности $(S)$:*

$$\int\limits_{(S)}\int F(M)\,dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(M_k)\,\Delta S_k.$$

Положим, что прямые, параллельные оси $Z$, пересекают поверхность только в одной точке (черт. 52) и пусть $(\sigma)$ — проекция $(S)$ на плоскость $XY$. Пользуясь формулой (26), устанавливающей связь между элементарной площадью поверхности $(S)$ и соответствующей площадью ее проекции $(\sigma_{xy})$, сможем привести интеграл по поверхности $(S)$ к интегралу по плоской области $(\sigma_{xy})$:

$$\int\limits_{(S)}\int F(M)\,dS = \int\limits_{(\sigma)}\int \frac{F(N)}{|\cos(n,\,Z)|}\,d\sigma_{xy}, \tag{29}$$

при этом считается, что $\cos(n,\,Z)$ отличен от нуля и что значение функции $F(N)$ в точке $N$ области $(\sigma)$ совпадает со значением заданной на поверхности функции $F(M)$ в той точке $M$, проекция которой совпадает с $N$. Если уравнение поверхности $(S)$ задано в явной форме (22) и функция $F(M)$ выражена через координаты $F(x, y, z)$, то при интегрировании по $(\sigma_{xy})$ достаточно подставить $z = f(x,\,y)$ в выражение функции $F(x,\,y,\,z)$, т. е. $F(N) = F[x,\,y,\,f(x,\,y)]$. Знаменатель в правой части (29) определится по третьей из формул (24).



Черт. 54.

Отметим, что интегралы по поверхности, очевидно, обладают всеми свойствами двойного интеграла, указанными в [61], в частности для них имеет место теорема о среднем.

Докажем теперь одну из основных в теории кратных интегралов формул — формулу Остроградского, устанавливающую связь между трехкратным интегралом по объему $(V)$ и интегралом по поверхности $(S)$, ограничивающей этот объем. Будем считать, как и в [58], что прямые, параллельные оси $Z$, пересекают $(S)$ не более чем в двух точках. Сохраним те же обозначения, что и на черт. 44 [58]. Введем еще в рассмотрение направление $(n)$ — нормали к $(S)$, причем будем считать, что $(n)$ направлено вовне объема $(V)$ (внешняя нормаль) (черт. 54). Это направление $(n)$ образует на верхней части поверхности (II) острый угол

с осью $Z$, а на нижней части (I) — тупой угол. Поэтому $\cos(n, Z)$ будет на части (I) величиной отрицательной, и в этом случае $|\cos(n, Z)| = -\cos(n, Z)$. Формула (26) дает:

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, Z)\, dS \text{ на (II)}; \quad d\sigma_{xy} = -\cos(n, Z)\, dS \text{ на (I)}. \tag{30}$$

Пусть $R(x, y, z)$ — непрерывная функция в области ($v$) вплоть до ее поверхности ($S$) и имеет непрерывную производную $\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$.

Рассмотрим тройной интеграл по ($v$) от функции $\frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$.

Пользуясь формулой (16), будем иметь:

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy} \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dz.$$

Но интеграл от производной равен разности значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах:

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\, d\sigma_{xy}$$

или

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x, y, z_2)\, d\sigma_{xy} - \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x, y, z_1)\, d\sigma_{xy}.$$

Заменяя $d\sigma_{xy}$ на $dS$ по формулам (30), мы сведем интегрирование по ($\sigma_{xy}$) к интегрированию по ($S$), причем в первом интеграле, содержащем переменную ординату $z_2$ части (II) поверхности ($S$), придется пользоваться первой из формул (30), и получится интеграл по (II), а во втором интеграле, содержащем $z_1$, придется пользоваться второй из формул (30), и получится интеграл по (I):

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(II)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\, dS + \\ + \iint\limits_{(I)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\, dS.$$

Значки у $z$ можно уже не писать, так как указано, по какой именно части поверхности производится интегрирование. В правой части стоит сумма интегралов по частям (II) и (I), т. е. интеграл по всей поверхности ($S$):

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}\, dv = \iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\cos(n, Z)\, dS. \tag{31}$$

Совершенно так же, взяв две другие функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$, мы могли бы доказать:

$$\iiint_{(v)} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dv = \iint_{(S)} P(x, y, z) \cos(n, X) dS$$

$$\iiint_{(v)} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dv = \iint_{(S)} Q(x, y, z) \cos(n, Y) dS.$$

Складывая почленно полученные три формулы, придем к формуле Остроградского:

$$\iiint_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv =$$

$$= \iint_{(S)} [P \cos(n, X) + Q \cos(n, Y) + R \cos(n, Z)] dS. \quad (32)$$

Мы не пишем здесь для краткости аргументов $x$, $y$, $z$ у функций $P$, $Q$ и $R$, но надо помнить, что это суть функции, определенные в объеме $(v)$ и непрерывные со своими производными.

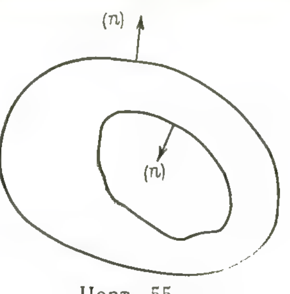
В следующей главе мы приведем большое число примеров применения формулы Остроградского.

Величины $\cos(n, X)$, $\cos(n, Y)$, $\cos(n, Z)$ суть функции, определенные на поверхности $(S)$. Мы их считали непрерывными. Можно сделать более общее предположение, а именно считать, что $(S)$ разбивается на конечное число кусков, на каждом из которых указанные функции непрерывны. Это будет, например, иметь место, если $(S)$ есть многогранник.

При выводе формулы (31) мы предполагали, что прямые, параллельные оси $OZ$, пересекают поверхность $(S)$ области $(v)$ не более чем в двух точках. Нетрудно обобщить эту формулу и на области более общего вида. Заметим прежде всего, что если поверхность $(S)$, кроме верхней части (II) и нижней части (I), имеет цилиндрическую боковую часть с образующими, параллельными оси $OZ$, то на этой боковой части $\cos(n, Z) = 0$, и добавление этой части к правой части формулы (31) не меняет величины интеграла по поверхности, так что все доказательство формулы остается справедливым. В более общем случае достаточно при помощи цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными оси $OZ$, разбить $(v)$ на конечное число частей, удовлетворяющих предыдущим условиям, и применить к каждой части формулу (31). Складывая полученные таким образом формулы, будем иметь в левой части тройной интеграл по всему объему $(v)$. В правой части будем иметь сумму интегралов по всем поверхностям тех частей, на которые мы разбили $(v)$. Интегралы по приведенным вспомогательным цилиндрическим поверхностям, как

указано выше, равны нулю. Таким образом в результате сложения в правой части мы будем иметь интеграл по поверхности $(S)$ первоначального объема $(v)$. Итак, формула (31) оказывается справедливой и для областей $(v)$ более общего вида.

Заметим, что эти рассуждения справедливы и для того случая, когда $(v)$ ограничено несколькими поверхностями: одной поверхностью извне и остальными изнутри. На черт. 55 изображен тот случай, когда $(v)$ ограничено двумя поверхностями. При этом в правой части (31) надо интегрировать по всем поверхностям, ограничивающим $(v)$, и направление $(n)$ будет на внутренних поверхностях направлено внутрь этих поверхностей [т. е. вовне $(v)$].



Черт. 55.

**64. Интегралы по определенной стороне поверхности.** Иногда пользуются другим определением и другой формой записи интеграла по поверхности. Рассмотрим сначала тот случай, когда поверхность $(S)$, изображенная на черт. 54, удовлетворяет условиям, указанным в начале предыдущего номера. В каждой точке поверхности можно придать нормали два противоположных направления. Одно из них будет образовывать острый, а другое — тупой угол с направлением оси $OZ$. В соответствии с этим у поверхности можно различать *две стороны — верхнюю и нижнюю*. Пусть $R(x, y, z)$, как и выше, — функция, заданная на $(S)$. Рассмотрим интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} R\cos(n, Z)\,dS. \tag{33}$$

Величина этого интеграла зависит от выбора направления нормали или, что то же, от указания на то, по какой стороне поверхности $(S)$ производится интегрирование. При интегрировании по верхней стороне $\cos(n, Z) > 0$, и $\cos(n, Z)\,dS = d\sigma_{xy}$, а при интегрировании по нижней стороне $\cos(n, Z) < 0$, и $\cos(n, Z)\,dS = -d\sigma_{xy}$, где $d\sigma_{xy}$ — проекция элемента площади поверхности $(S)$ на плоскость $XY$, т. е. элементы площади области $(\sigma)$ в формуле (29). В координатах $(x, y)$ мы можем написать $d\sigma_{xy} = dx\,dy$, так что интеграл (33) приведется к интегралу по области $(\sigma)$ плоскости $XY$:

$$\iint\limits_{(\sigma)} R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy \quad \text{или} \quad -\iint\limits_{(\sigma)} R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy, \tag{34}$$

смотря по тому, по какой стороне поверхности производится интегрирование. Но часто его в обоих случаях записывают одинаково

$$\iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy, \tag{35}$$

указывая, по какой стороне поверхности производится интегрирование. Если интегрирование производится, например, по нижней части поверхности $(S)$, то интеграл (35) сводится ко второму из интегралов (34). Можно определить интеграл (35) непосредственно, как предел суммы произведений $\sum R(M_k)\,\Delta\sigma_k$

значений функции $R(M)$ в точках поверхности на площади $\Delta\sigma_k$ проекций на плоскость $XY$ элементов $\Delta S_k$, на которые разбита поверхность $(S)$, причем $\Delta\sigma_k$ считаются положительными, если интегрирование совершается по верхней стороне поверхности, и отрицательными, если оно совершается по нижней стороне поверхности.

Рассмотрим теперь общий случай поверхности $(S)$. Пусть $M_0$ — некоторая точка этой поверхности. Фиксируем определенное направление нормали $(n)$ в этой точке и будем, выходя из точки $M_0$ и двигаясь непрерывно по $(S)$, следить за непрерывным изменением направления нормали $(n)$. Если при любом непрерывном движении это приведет нас к определенному направлению нормали в любой точке поверхности, то поверхность называется двусторонней. Если бы на такой поверхности мы фиксировали направление $(n)$ в исходной точке $M_0$ иначе, то при непрерывном движении мы и во всех остальных точках получили бы противоположное направление нормали. Это дает нам возможность говорить о двух сторонах поверхности $(S)$, смотря по тому, какое направление нормали мы фиксировали в точке $M_0$, а тем самым и в остальных точках. Фиксируя сторону поверхности, мы получаем определенное значение для интеграла (33), и этот интеграл записывают при этом в виде (35) с указанием, по какой стороне поверхности производится интегрирование.

Аналогичным образом определяются интегралы:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q\,dx\,dz,$$

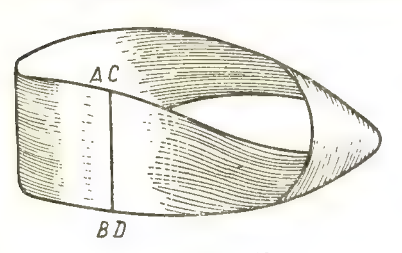
где $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ — функции, заданные на $(S)$. Интегралы эти совпадают с интегралами:

$$\iint\limits_{(S)} P\cos(n, X)\,dS \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q\cos(n, Y)\,dS.$$

При таком определении этих интегралов формулу (32) можно записать так:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy,$$

где в правой части интегрирование производится по внешней части поверхности $(S)$.




Черт. 56.

Заметим, что существуют и односторонние поверхности, на которых при непрерывном движении вдоль поверхности нормаль, непрерывно меняясь по направлению, может перейти в противоположное направление при возвращении в исходную точку. Простейшим примером является так называемый **лист Мебиуса**. Для его получения надо взять прямоугольный лист бумаги $ABCD$, перекрутить его один раз и склеить сторону $AB$ со стороной $CD$ так, чтобы точка $A$ совпадала с $C$, а $B$ с $D$ (черт. 56). Если полученное кольцо начать красить, то, не переходя через границу кольца, его можно покрасить с обеих сторон.

**65. Моменты.** Одно из приложений понятия о кратном интеграле — к теории моментов различных порядков материальных систем. Пусть дана система $n$ материальных точек:

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n,$$

массы которых равны соответственно $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$.

*Моментом $k$-го порядка данной системы относительно плоскости* ($\Delta$), *прямой* ($d$) *или точки* ($D$) *называется сумма произведений массы каждой точки системы на $k$-ю степень расстояния от* ($\Delta$), ($d$) *или* ($D$):

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^k m_i.$$

С этой точки зрения момент нулевого порядка есть просто вся масса системы

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Момент первого порядка относительно данной плоскости ($\Delta$) называется *статическим моментом системы относительно этой плоскости.* Статические моменты относительно координатных плоскостей мы встречаем в выражениях *для координат центра тяжести системы*

$$x_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}; \quad y_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}; \quad z_g = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}. \tag{36}$$

В данном случае расстояния $x_i$, $y_i$, $z_i$ до координатных плоскостей берутся алгебраически, т. е. как положительными, так и отрицательными.

*Моменты второго порядка* называются обыкновенно *моментами инерции системы.* Так, выражения

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 m_i$$

*суть моменты инерции системы относительно координатных плоскостей*; *выражения*

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2)\, m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} (z_i^2 + x_i^2)\, m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\, m_i$$

*суть моменты инерции относительно осей $OX$, $OY$, $OZ$*; наконец, выражение

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\, m_i$$

*есть момент инерции относительно точки $O$.*

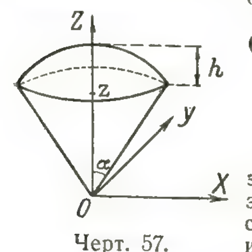
Кроме указанных выше выражений, приходится иметь дело с выражениями

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} z_i x_i m_i; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i,$$

которые называются *центробежными моментами системы относительно осей $OX$, $OY$, $OZ$.*

Если мы имеем дело не с системами конечного числа точек, а с непрерывно распределенными массами, то предыдущие суммы заменятся опреде-

ленными интегралами, простыми, двукратными и трехкратными, в зависимости от того, будут ли массы распределены по прямым, поверхностям или объемам; вместо множителя $m_i$ нужно будет тогда ввести произведение плотности $f(M)$ в данной точке $M$ на элемент длины, площади или объема.



Черт. 57.

Так, например, момент инерции трехмерной области $(v)$ относительно оси $OX$ выразится тройным интегралом

$$\iiint\limits_{(v)} (y^2+z^2) f(M)\,dv.$$

Если считать плотность $f(M)$ постоянной $f_0$, то этот постоянный множитель будет выноситься из-под знака интеграла, и в формулах (36) в числителе будут стоять интегралы с подинтегральной функцией $x$, $y$ и $z$, а в знаменателе — объем или площадь всей области, причем постоянная $f_0$ сократится.

Примеры. **1.** Центр тяжести однородного шарового сектора (черт. 57). При том выборе координат, который указан на чертеже, достаточно найти только ординату

$$z_g = \frac{\iiint\limits_{(v)} z\,dv}{v}.$$

Мы имеем здесь:

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\,d\theta \int_0^{a} \rho^2\,d\rho = \frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha) = \frac{2}{3}\pi a^2 h$$

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\,d\theta \int_0^{a} \rho\cos\theta\rho^2\,d\rho = 2\pi\int_0^{\alpha}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{a}\rho^3\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{8}a^4(1-\cos 2\alpha)$$

$$z_g = \frac{3}{16}a\,\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{3}{8}a(1+\cos\alpha) = \frac{3}{8}(2a-h),$$

где $a$ — радиус шара.

**2.** Если считать, что масса распределена лишь по шаровой поверхности $(S)$ сектора, то ордината центра тяжести будет

$$z_g = \frac{\iint\limits_{(S)} z\,ds}{s},$$

где $s$ — площадь поверхности $(S)$. В данном случае уравнение поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$ или $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$, и нетрудно проверить, что

$$\cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{z}{a},$$

так что

$$\iint\limits_{(s)} z\, ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} z \frac{d\sigma_{xy}}{\cos(n, z)} = a \iint\limits_{(\sigma_{xy})} d\sigma_{xy} = \pi a^3 \sin^2 \alpha,$$

где $(\sigma_{xy})$ есть очевидно круг с центром в начале и радиусом $a \sin \alpha$.

Площадь $s$ будет:

$$s = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \sqrt{1+p^2+q^2}\, d\sigma_{xy} = a \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \frac{d\sigma_{xy}}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} =$$

$$= a \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a \sin \alpha} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi a^2 (1-\cos \alpha),$$

и окончательно:

$$z_g = \frac{\pi a^3 \sin^2 a}{2\pi a^2 (1-\cos \alpha)} = a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

В предыдущем примере мы имели для $z_g$ меньшую величину

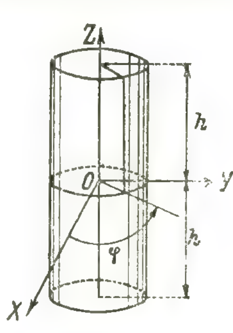
$$\frac{3}{8} a (1+\cos \alpha) = \frac{3}{4} a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**3.** Если центр тяжести совпадает с началом координат, то все статические моменты равны нулю, что непосредственно вытекает из соотношений:

$$\iiint\limits_{(v)} xf\, dv = mx_g;$$

$$\iiint\limits_{(v)} yf\, dv = my_g;$$

$$\iiint\limits_{(v)} zf\, dv = mz_g.$$




Черт. 58.

**4.** Моменты инерции однородного прямого кругового цилиндра (черт. 58) относительно оси цилиндра и относительно диаметра его среднего сечения. Считая плотность постоянной и равной $f_0$, мы имеем:

$$J_z = f_0 \iiint\limits_{(v)} r^2 r\, dr\, d\varphi\, dz = 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} r^3\, dr \int\limits_0^{h} dz = \pi a^4 h f_0 = m \frac{a^2}{2};$$

$$J_x = f_0 \iiint\limits_{(v)} (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi)\, r\, dr\, d\varphi\, dz = 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{a} (z^2 + r^2 \sin^2 \varphi)\, r\, dr =$$

$$= 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{h} z^2\, dz \int\limits_0^{a} r\, dr + 2f_0 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi \int\limits_0^{h} dz \int\limits_0^{a} r^3\, dr = \frac{2}{3} \pi h^3 a^2 f_0 +$$

$$+ \frac{\pi}{2} h a^4 f_0 = m \left( \frac{h^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right),$$

где $2h$ — высота цилиндра, $a$ — радиус его основания и $m$ — его масса.

**5.** Моменты инерции однородного эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Обозначая плотность через $f_0$, имеем, разбивая на слои, параллельные плоскости $XOY$:

$$J_{xy}=f_0\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=f_0\int\limits_{-c}^{+c} z^2\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$=2\pi abf_0\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{5}\right)=m\,\frac{1}{5}\,c^2.$$

Переставляя буквы, найдем без труда:

$$J_{yz}=m\cdot\frac{1}{5}\,a^2;\quad J_{zx}=m\cdot\frac{1}{5}\,b^2$$

$$J_x=J_{xy}+J_{xz}=m\cdot\ \frac{1}{5}\,(b^2+c^2)$$

$$J_y=m\cdot\frac{1}{5}\,(c^2+a^2);\quad J_z=m\cdot\frac{1}{5}\,(a^2+b^2)$$

$$J_0=J_{xy}+J_{yz}+J_{zx}=m\cdot\frac{1}{5}\,(a^2+b^2+c^2).$$

**6.** Кинетическая энергия при вращении твердого тела вокруг оси ($\delta$).

Как известно, при вращении тела вокруг оси ($\delta$) с угловой скоростью $\omega$, скорость $V$ каждой точки тела равна по величине произведению угловой скорости на расстояние точки от оси вращения. Для вычисления кинетической энергии тела разобьем его на элементы массы $\Delta m$ и кинетическую энергию соответствующего элемента обозначим через $\Delta T$. Мы имеем

$$T=\sum\Delta T.$$

Ввиду малости элемента $\Delta m$ можно представить, что вся его масса сосредоточена в одной какой-нибудь его точке $M$; тогда кинетическая энергия $\Delta T$ элемента $\Delta m$ будет равна

$$\Delta T=\frac{1}{2}\,V^2\,\Delta m=\frac{1}{2}\,\omega^2 r_\delta^2 f(M)\,\Delta v,$$

где $f(M)$ есть плотность тела в точке $M$ и $r_\delta$ — расстояние точки $M$ от оси ($\delta$). В силу определения трехкратного интеграла получаем отсюда:

$$T=\iiint\limits_{(v)}\frac{1}{2}\,\omega^2 r_\delta^2 f(M)\,dv=\frac{1}{2}\,\omega^2 J_\delta,$$

где

$$J_\delta=\iiint\limits_{(v)} r_\delta^2 f(M)\,dv$$

есть момент инерции тела относительно оси вращения ($\delta$).

Замечание. Иногда при вычислении объема тела или какого-нибудь его момента удается произвести все вычисления не с помощью тройного, а с помощью двойного или даже простого интеграла. Дело здесь заклю-

чается в том, что при представлении тройного интеграла, как двойного от простого или простого от двойного, удается иногда вычислить внутренний интеграл из каких-либо элементарных соображений, не производя интегрирования. Это и создает такое впечатление, что для вычисления понадобился не тройной интеграл, а двойной или простой.

Так, например, момент инерции $J_{xy}$ относительно плоскости $XY$ тела $(v)$, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=h$ и поверхностью, образованной вращением линии $x=f(z)$ вокруг оси $OZ$, можно вычислить простым интегралом, если представить себе тело составленным из круглых плоских дисков, параллельных плоскости $XY$. Объем такого элементарного диска равен $\pi\,[f(z)]^2\,dz$, и можно написать:

$$J_{xy}=\pi\int\limits_0^h z^2\,[f(z)]^2\,dz.$$

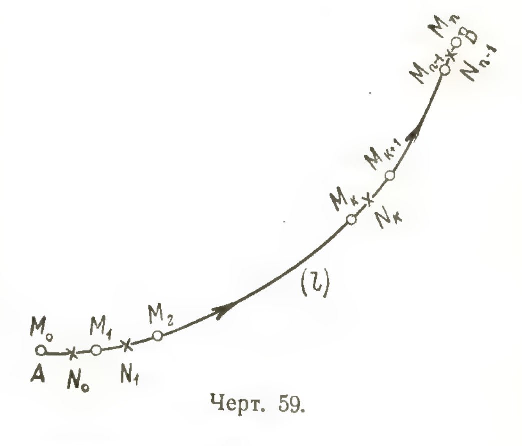
Тот же момент инерции выражается тройным интегралом

$$J_{xy}=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^h z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy,$$

где $(\sigma_z)$ — сечение $(v)$ плоскостью, параллельной плоскости $XY$ на расстоянии $z$ от этой плоскости. Внутренний двойной интеграл дает площадь $(\sigma_z)$, т. е. он равен $\pi\,[f(z)]^2$.

## § 7. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**66. Определение криволинейного интеграла.** Положим, что мы имеем в пространстве некоторую кривую $(l)$, которая имеет определенное направление (черт. 59). Пусть $A$ — начало и $B$ — конец этой кривой. Будем на кривой $(l)$ отсчитывать длину дуги от начальной точки $A$. Положим, что на $(l)$ задана непрерывная функция $f(M)$. Разделим $(l)$ на $n$ частей промежуточными точками: $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$, причем $M_0$ совпадает с $A$ и $M_n$ с $B$. На каждом участке $M_kM_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ возьмем какую-нибудь точку $N_k$ и составим сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(N_k)\Delta s_k$,



Черт. 59.

где $\Delta s_k$ — длина дуги $M_kM_{k+1}$ кривой $(l)$. Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа делений $n$ и беспредельном умень-

шении каждого из участков $M_kM_{k+1}$ называется *криволинейным интегралом от функции* $f(M)$ по $l$ и обозначается так:

$$\int\limits_{(l)} f(M)\,ds = \lim \sum_{k=0}^{n-1} f(N_k)\,\Delta s_k. \qquad (1)$$

Положение переменной точки $M$ кривой $(l)$ вполне определяется длиною дуги $s = \smile AM$, так что функцию $f(M)$ можно считать функцией независимой переменной $s$, т. е. $f(M) = f(s)$, и интеграл (1) является обычным определенным интегралом:

$$\int\limits_{(l)} f(M)\,ds = \int\limits_0^l f(s)\,ds,$$

где $l$ — длина дуги кривой $(l)$. Заметим, что кривая $(l)$ может быть и замкнутой, т. е. $B$ может совпадать с $A$.

До сих пор мы не использовали того факта, что кривая $(l)$ имеет направление. В дальнейшем нам это будет важно. Отнесем пространство к прямолинейным прямоугольным осям. Положение переменной точки $M$ определится координатами $(x, y, z)$. Пусть $P(x, y, z)$ — некоторая непрерывная вдоль кривой $(l)$ функция. Обозначим через $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ — координаты точки $N_k$ и через $\Delta x_k$ — проекцию направленного отрезка $\overline{M_kM_{k+1}}$ на ось $OX$. Величина $\Delta x_k$ может быть, конечно, и положительной и отрицательной и даже равной нулю. Составим сумму произведений $P(N_k) = P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ не на $\Delta s_k$, а на $\Delta x_k$, т. е. сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k.$$

Предел этой суммы называется криволинейным интегралом от $P(x, y, z)$ по $(l)$ и обозначается так:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)\,dx = \lim \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta x_k.$$

Совершенно аналогично определяются интегралы:

$$\int\limits_{(l)} Q(x, y, z)\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(l)} R(x, y, z)\,dz,$$

где $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ — непрерывные функции вдоль $(l)$. Складывая эти три интеграла, получим криволинейный интеграл общего вида, который обозначается так:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

По определению интеграл (2) является пределом суммы следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k], \tag{3}$$

где $\Delta y_k$, $\Delta z_k$ — проекции отрезка $\overline{M_k M_{k+1}}$ на оси $OY$ и $OZ$. Нетрудно установить связь между интегралом вида (2) и интегралом вида (1). Координаты $(x, y, z)$ переменной точки $M$ кривой $(l)$ можно считать функциями длины дуги $s = \smile AM$. Производные этих функций дают, как известно **[I, 160]**, направляющие косинусы касательной к кривой $(l)$, т. е.

$$\frac{dx}{ds} = \cos(t, X); \quad \frac{dy}{ds} = \cos(t, Y); \quad \frac{dz}{ds} = \cos(t, Z),$$

где $t$ — направление касательной к $(l)$ в переменной точке $M$, имеющее то же направление, что и направление кривой. Символом $(\alpha, \beta)$ мы обозначаем, как всегда, угол, образованный направлениями $\alpha$ и $\beta$, причем значение косинуса этого угла не зависит от направления его отсчета, которое мы в данном случае и не фиксируем. С точностью до малых высших порядков можно считать:

$$\Delta x_k = \cos(t_k, X)\Delta s_k, \quad \Delta y_k = \cos(t_k, Y)\Delta s_k; \quad \Delta z_k = \cos(t_k, Z)\Delta s_k,$$

где $t_k$ — направление касательной в точке $N_k$, и интеграл (2), как предел суммы (3), приводится к виду (1):

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{(l)} [P\cos(t, X) + Q\cos(t, Y) + R\cos(t, Z)]\,ds, \tag{4}$$

где $P$, $Q$, $R$ можно считать функциями $s$ вдоль $(l)$.

Пусть имеется уравнение кривой $(l)$ в параметрической форме:

$$x = \varphi(\tau); \quad y = \psi(\tau); \quad z = \omega(\tau), \tag{5}$$

причем при изменении параметра $\tau$ от $a$ до $b$ точка $(x, y, z)$ описывает кривую $(l)$ от $A$ до $B$. Мы будем считать, что функции (5) непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка в замкнутом промежутке $(a, b)$, причем для определенности мы считаем $a < b$.

Положим, что точкам $M_k$ соответствуют значения параметра $\tau = \tau_k$. Рассмотрим первую из сумм (3). Пусть $\tau' = \tau'_k$ — значение параметра, соответствующее точке $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ кривой. По формуле конечных приращений **[I, 63]** можем написать:

$$\Delta x_k = \varphi(\tau_{k+1}) - \varphi(\tau_k) = \varphi'(\tau''_k)(\tau_{k+1} - \tau_k),$$

где $\tau_k''$ — некоторое значение $\tau$ из промежутка $(\tau_k, \tau_{k+1})$. Таким образом упомянутую сумму можно переписать в виде:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')]\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k). \quad (6)$$

Эта сумма очень схожа с суммой

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k),$$

которая в пределе, при стремлении наибольшей из разностей $(\tau_{k+1}-\tau_k)$ к нулю, стремится к определенному интегралу

$$\int_a^b P[\varphi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)]\varphi'(\tau)\,d\tau. \quad (7)$$

Докажем теперь, что разность суммы (6) и $\sigma$ стремится к нулю. Отсюда будет непосредственно следовать, что сумма (6) имеет предел, равный интегралу (7). Упомянутая разность имеет вид:

$$\eta = \sum_{k=0}^{n-1} \{P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')] - P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]\}\varphi'(\tau_k'')(\tau_{k+1}-\tau_k).$$

Значения $\tau_k'$ и $\tau_k''$ принадлежат промежутку $(\tau_k, \tau_{k+1})$, и в силу равномерной непрерывности непрерывной функции $P[\varphi(\tau), \psi(\tau), \omega(\tau)]$ для любого малого положительного $\varepsilon$ существует такое $\delta$, что **[I, 32]**

$$|P[\varphi(\tau_k'), \psi(\tau_k'), \omega(\tau_k')] - P[\varphi(\tau_k''), \psi(\tau_k''), \omega(\tau_k'')]| < \varepsilon,$$

если только $(\tau_{k+1}-\tau_k) < \delta$. Таким образом абсолютное значение $\eta$ будет иметь оценку:

$$|\eta| < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi'(\tau_k'')|(\tau_{k+1}-\tau_k).$$

Но непрерывная в промежутке $(a, b)$ функция $\varphi'(\tau)$ будет и ограниченной в этом промежутке, т. е. $|\varphi'(\tau)| < K$, где $K$ — определенное число **[I, 35]**. Отсюда имеем:

$$|\eta| < \varepsilon K \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{k+1}-\tau_k) = \varepsilon K(b-a).$$

Так как $\varepsilon \to 0$, если $\max\cdot(\tau_{k+1}-\tau_k) \to 0$, то мы видим, что $\eta$ действительно стремится к нулю, и сумма (6) имеет предел (7).

Рассматривая точно так же остальные суммы (3), покажем, что при сделанных предположениях интеграл (2) может быть представлен в виде обычного определенного интеграла:

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b [P\varphi'(\tau) + Q\psi'(\tau) + R\omega'(\tau)]\,d\tau, \qquad (8)$$

где $P$, $Q$ и $R$ надо выразить через $\tau$ согласно формулам (5).

Некоторые из свойств простого интеграла, указанные в [I, 94], непосредственно обобщаются на случай криволинейного интеграла. Так, например:

I. Если кривая $(l)$ состоит из отдельных частей $(l_1)$, $(l_2)$, ..., $(l_m)$, то

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz +$$
$$+ \int_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \ldots + \int_{(l_m)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

II. Величина криволинейного интеграла определяется не только подинтегральным выражением и кривой интегрирования, но и указанием направления на кривой $(l)$, причем *при изменении направления кривой интегрирования интеграл лишь меняет знак.*

Если кривая $(l)$ целиком не удовлетворяет указанным выше условиям, но ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых имеет параметрическое уравнение (5), то формула (7) применима к каждой части, а интеграл по всей кривой можно представить как сумму интегралов по отдельным частям. Нетрудно показать, что это равносильно пределу суммы (3) для всей кривой. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие кривые $(l)$, которые удовлетворяют указанному только что условию. Заметим, наконец, что если $\tau$ есть длина дуги $s = \smile AM$, то формула (8) переходит в формулу (4).

Если кривая $(l)$ есть плоская кривая, находящаяся на плоскости $XY$, то интеграл (2) имеет вид

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy,$$

где $P$ и $Q$ — функции от $(x, y)$, определенные вдоль $(l)$.

**67. Работа силового поля. Примеры.** К понятию криволинейного интеграла (2) естественно приводит задача вычисления работы. Пусть точка $M$ описывает траекторию $(l)$ под действием силы $\mathbf{F}$, являющейся функцией точки вдоль $(l)$. Для вычисления работы разобьем $(l)$ на малые части и рассмотрим одну из этих частей $M_k$, $M_{k+1}$. Ввиду

малости этой части можем считать приближенно, что на этой части вектор силы **F** имеет постоянное значение, хотя бы то, которое он имеет в точке $M_k$, и можем заменить дугу $\smile M_k M_{k+1}$ хордой $\overline{M_k M_{k+1}}$. Таким образом на этом малом участке работа приближенно выразится произведением

$$\Delta E_k \sim |\mathbf{F}_k| \, |\overline{M_k M_{k+1}}| \cos(\mathbf{F}_k, \overline{M_k M_{k+1}}),$$

где через $|\mathbf{F}_k|$ мы обозначали длину вектора **F** в точке $M_k$, через $|\overline{M_k M_{k+1}}|$ — длину отрезка $\overline{M_k M_{k+1}}$ и через $\Delta E_k$ — работу на участке $\smile M_k M_{k+1}$. Пользуясь известной из аналитической геометрии формулой для угла между двумя направлениями, можем написать:

$$\Delta E_k \sim |\mathbf{F}_k| \, |\overline{M_k M_{k+1}}| \, [\cos(\mathbf{F}_k, X)\cos(\overline{M_k M_{k+1}}, X) + \\ + \cos(\mathbf{F}_k, Y)\cos(\overline{M_k M_{k+1}}, Y) + \cos(\mathbf{F}_k, Z)\cos(\overline{M_k M_{k+1}}, Z)],$$

или, раскрывая скобки и обозначая через $P$, $Q$ и $R$ проекции вектора **F** на координатные оси:

$$\Delta E_k \sim P_k \Delta x_k + Q_k \Delta y_k + R_k \Delta z_k,$$

где значок у $P$, $Q$ и $R$ показывает, что берутся значения этих функций в точке $M_k$. Суммируя затем по всем участкам и переходя к пределу, получим точное выражение для всей работы:

$$E = \int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Примеры. **1.** Работа, производимая постоянной силой тяжести при перемещении точки $M$ массы $m$ из положения $M_1(a_1, b_1, c_1)$ в $M_2(a_2, b_2, c_2)$ по любой кривой $(l)$, выражается интегралом

$$\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{c_1}^{c_2} mg\,dz = mg(c_2 - c_1)$$

(ось $OZ$ мы направили вертикально вниз), откуда видно, что эта работа зависит только от начального и конечного положений точки, но не от пути, по которому точка двигалась. Здесь мы имеем пример криволинейного интеграла, величина которого зависит только от начальной и конечной точек интегрирования, но не от пути.

**2.** Работа сил ньютонова притяжения к неподвижному центру массы $m$ при перемещении точки единичной массы из положения $M_1$ в положение $M_2$. Поместив притягивающий центр в начале координат и называя через $r$ радиус-вектор точки, мы видим, что сила $F$ направлена противоположно $\overline{OM}$, а по величине равна $\frac{fm}{r^2}$, где $f$ — постоянная тяготения. Таким образом оказывается:

$$P = -\frac{fm}{r^2} \cdot \frac{x}{r}; \qquad Q = -\frac{fm}{r^2} \cdot \frac{y}{r}; \qquad R = -\frac{fm}{r^2} \cdot \frac{z}{r}$$

$$E = -fm \int_{(l)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r^3} = -fm \int_{(l)} \frac{r\,dr}{r^3} = fm \int_{(l)} d\left(\frac{1}{r}\right),$$

и если мы через $r_2$ и $r_1$ обозначим расстояния точек $M_1$ и $M_2$ от притягивающего центра, то

$$E = fm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

и здесь работа, т. е. соответствующий криволинейный интеграл, зависит только от начальной и конечной точек, но не от пути.

Если ввести потенциал точечной массы

$$U = \frac{fm}{r},$$

так что

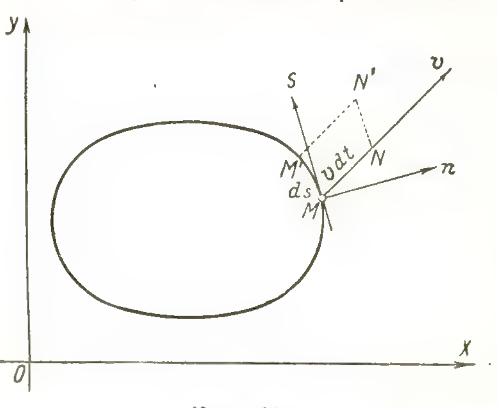
$$P = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то работа $E$ будет выражаться разностью значений потенциала $U$ в точках $M_2$ и $M_1$, т. е.

$$E = U(M_2) - U(M_1).$$

В последующих примерах мы рассмотрим криволинейные интегралы по плоским кривым.

3. Рассмотрим плоское установившееся течение несжимаемой жидкости постоянной плотности, которую мы примем равной единице. При таком движении скорость $\mathbf{v}$ частицы жидкости, находящейся в точке $M(x, y)$, зависит только от $(x, y)$. Вычислим количество жидкости $q$, протекающей в единицу времени через данный контур $(l)$ (черт. 60). Обозначим через $u$ и $v$ проекции скорости $\mathbf{v}$ на координатные оси. Выделим элемент $\smile MM' = ds$ контура $(l)$. Считая приближенно скорости всех частиц этого элемента одинаковыми, мы увидим, что в течение бесконечно малого промежутка времени $dt$ все частицы этого элемента продвинутся на отрезок $|\mathbf{v}|\,dt$ в направлении вектора $\mathbf{v}$ и займут положение $NN'$. Площадь параллелограмма $MNN'M'$ может быть выражена произведением основания $ds$ на величину проекции вектора $\mathbf{v}\,dt$ на направление внешней нормали $(n)$ к кривой $(l)$, т. е.




Черт. 60.

$$\text{площадь } MNN'M' = |\mathbf{v}| \cos(v, n)\, dt\, ds,$$

где $|\mathbf{v}|$ есть длина вектора $\mathbf{v}$. Обозначая через $(s)$ направление касательной к контуру $(l)$ при обходе против часовой стрелки, имеем:

$$(n, X) = (s, Y); \qquad (n, Y) = (s, X) - \pi, \tag{9}$$

где символом $(\alpha, \beta)$ мы обозначаем угол, отсчитываемый от направления $\alpha$ до направления $\beta$ против часовой стрелки. Таким образом мы имеем:

$$\cos(n, X) = \cos(s, Y) \quad \text{и} \quad \cos(n, Y) = -\cos(s, X).$$

Но, как известно, угол между двумя направлениями выражается по формуле

$$\cos(\mathbf{v}, n) = \cos(\mathbf{v}, X)\cos(n, X) + \cos(\mathbf{v}, Y)\cos(n, Y),$$

или в силу (9):

$$\cos(\mathbf{v}, n) = \cos(\mathbf{v}, X)\cos(s, Y) - \cos(\mathbf{v}, Y)\cos(s, X).$$

Подставляя в выражение площади и принимая во внимание, что

$$|\mathbf{v}|\cos(v, X) = u; \qquad |\mathbf{v}|\cos(v, Y) = v$$
$$ds\cos(s, X) = \Delta x; \qquad ds\cos(s, Y) = \Delta y,$$

получим окончательно:

$$\text{площадь } MNN'M' = (-v\,\Delta x + u\,\Delta y)\,dt.$$

При этом, если угол $(v, n)$ тупой, то $\cos(v, n)$ будет отрицательным, и площадь получится со знаком (—), и этот знак будет соответствовать тому случаю, когда жидкость *втекает* в область, ограниченную кривой $(l)$.

Полное количество жидкости, протекающей за время $dt$ через контур $(l)$, будет

$$dt\sum(-v\,\Delta x + u\,\Delta y) = dt\int\limits_{(l)} -v\,dx + u\,dy,$$

а за единицу времени вытекает жидкости

$$q = \int\limits_{(l)} -v\,dx + u\,dy, \tag{10}$$

причем кривую $(l)$ надо обходить в направлении против часовой стрелки. Заметим, что контур $(l)$ может быть замкнутым. Количество жидкости $q$ подсчитывается по формуле (10) со знаком (+), если жидкость течет в ту сторону, куда направлена нормаль $(n)$, и со знаком (—), если в обратную сторону.

Направление $(n)$ указано нами выше. Оно связано с направлением интегрирования по $(l)$ и ориентировкой осей $x$, $y$ согласно формулам (9). Если $(l)$ — замкнутый контур и интегрирование совершается против часовой стрелки (черт. 60), то величина $q$ дает разность между вытекающей в единицу времени в область, ограниченную линией $(l)$, жидкостью и втекающей. Уменьшаемое или вычитаемое могут и отсутствовать.

Если внутри $(l)$ не имеется ни источников, откуда жидкость вытекает (*положительный источник*), ни точек поглощения, куда она втекает (*отрицательный источник*), то $q$ должно равняться нулю, так как в противном случае количество жидкости, находящейся внутри $(l)$, увеличилось бы или уменьшилось, что противоречит свойству несжимаемости и отсутствию источников.

Таким образом *установившееся плоское течение несжимаемой жидкости характеризуется равенством*

$$\int\limits_{(l)} -v\,dx + u\,dy = 0, \tag{11}$$

*которое должно выполняться для всякого замкнутого контура* $(l)$, *не имеющего внутри источников.*

**4.** В термодинамике состояние всякого тела определяется тремя физическими величинами: давлением $p$, объемом $v$ и температурой (абсолютной) $T$

Эти величины связаны одним соотношением

$$f(v, p, T) = 0;$$

например, в случае идеального газа — формулой Клапейрона:

$$pv - RT = 0.$$

Таким образом состояние тела определяется двумя величинами из трех например: $p$ и $v$, т. е. точкой $M(p, v)$ плоскости $pov$.

Если состояние меняется, то определяющая его точка $M$ описывает кривую в плоскости $pov$, которая называется диаграммой рассматриваемого процесса; если тело возвращается к первоначальному состоянию, процесс называется круговым процессом или циклом и диаграмма его будет замкнутая кривая $(l)$.

Для определения количества тепла $Q$, поглощенного телом во время процесса, разобьем его на бесконечно малые элементарные процессы, соответствующие бесконечно малым изменениям величин $p$, $v$, $T$ на $\Delta p$, $\Delta v$, $\Delta T$. Если бы менялась только одна из этих величин, то количество поглощенного тепла было бы приближенно пропорционально приращению соответствующей переменной; если же меняются сразу все три переменные, то по принципу наложения малых действий **[I, 68]** полное приращение $\Delta Q$ будет равно сумме этих частных приращений. Другими словами, мы имеем приближенное равенство вида

$$\Delta Q \approx A\,\Delta p + B\,\Delta v + C\,\Delta T$$

и окончательно получим:

$$Q = \sum \Delta Q = \int A\,dp + B\,dv + C\,dT. \tag{12}$$

Выразив, в силу уравнения состояния, $T$ через $v$ и $p$, мы получим:

$$T = \varphi(v, p); \qquad dT = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv;$$

подставив эти выражения вместо $T$ и $dT$ в правую часть (12), найдем окончательно:

$$Q = \int\limits_{(l)} P\,dp + V\,dv,$$

где $P$ и $V$ суть известные функции от $v$ и $p$.

5. Пусть изучаемый процесс есть расширение или сжатие газа или пара в рабочем цилиндре газового или простого двигателя. Изменение объема $\Delta v$ будет тогда пропорционально смещению поршня в цилиндре под действием давления $p$, а потому работа $\Delta E$, которая будет произведена давлением $p$, при этом изменении объема, будет выражаться при надлежащем выборе единиц произведением $p\,\Delta v$, а полная работа, произведенная в течение всего кругового процесса:

$$E = \int\limits_{(l)} p\,dv.$$

**68. Площадь и криволинейный интеграл.** Вычислим площадь $\sigma$ области $(\sigma)$, находящейся в плоскости $XY$ и ограниченной замкнутой кривой $(l)$. Допустим для простоты (черт. 61), что кривая $(l)$ пересекается прямыми, параллельными оси $OY$, не более чем в двух точках. Назвав через $y_1$ ординату точек входа в область $(\sigma)$, $y_2$—

ординату точек выхода прямой, параллельной оси $OY$, из области ($\sigma$), а через $a$ и $b$ — абсциссы крайних точек кривой ($l$), мы имеем [I, 101]:

$$\sigma = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx.$$

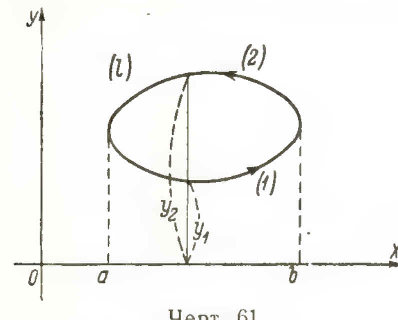
Пусть (1) и (2) — части кривой, соответствующие точкам входа и выхода. Интеграл

$$\int_a^b y_2\,dx$$

есть не что иное, как криволинейный интеграл

$$\int_{(2)} y\,dx,$$

с направлением от точки $x = b$ до $x = a$, взятый с обратным знаком. Точно так же интеграл



Черт. 61.

$$\int_a^b y_1\,dx,$$

совпадает с криволинейным интегралом

$$\int_{(1)} y\,dx,$$

взятым от $x = a$ до $x = b$.

Окончательно имеем:

$$\sigma = \int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx = -\left[\int_{(1)a}^{b} y\,dx + \int_{(2)b}^{a} y\,dx\right] = -\int_{(l)} y\,dx, \quad (13)$$

причем кривая ($l$) обходится в направлении, обратном часовой стрелке.

Совершенно таким же путем находим

$$\sigma = \int_{(l)} x\,dy. \quad (14)$$

Складывая и деля на два, находим еще

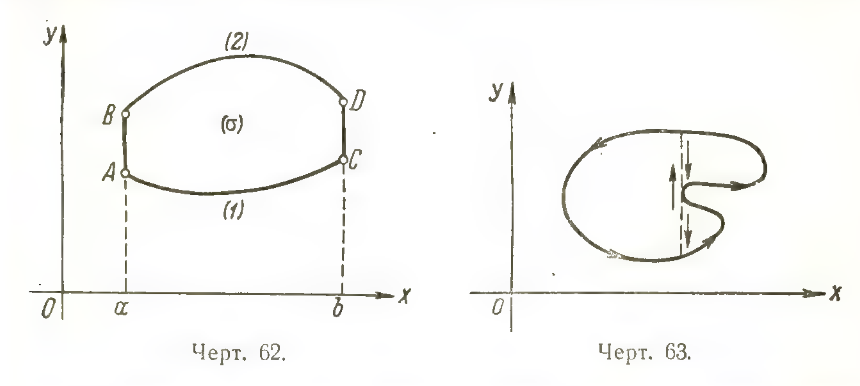
$$\sigma = \frac{1}{2}\int_{(l)} x\,dy - y\,dx. \quad (15)$$

Мы получили формулу (13) в предположении, что прямые, параллельные оси $OY$, пересекают ($l$) не более чем в двух точках.

Нетрудно видеть, что формула справедлива и для более общих контуров. Рассмотрим сначала тот случай, когда область ($\sigma$) ограничена линиями (*1*), (*2*) и двумя отрезками прямых, параллельных оси $OY$ (черт. 62). Повторяя прежние рассуждения, получим:

$$\sigma = -\left[\int\limits_{(1)} y\,dx + \int\limits_{(2)} y\,dx\right].$$

Но $x$ — постоянно на $CD$ и $BA$ и $dx = 0$, так что $\int y\,dx$ по этим отрезкам равен нулю. Добавляя эти интегралы со знаком минус к правой части, получим и для рассматриваемого случая формулу (13). Для области ($\sigma$) с контуром ($l$) более общей формы (черт. 63)




Черт. 62. Черт. 63.

мы поступаем следующим образом. Проводя отрезки прямых, параллельных оси $OY$, разбиваем ($\sigma$) на конечное число частей, к каждой из которых применима формула (13). Складывая эти формулы, получим слева площадь $\sigma$ всей области, а справа интеграл по контуру ($l$), так как интегралы по проведенным вспомогательным контурам, как и выше, равны нулю, т. е. формула (13) справедлива и для взятой области. Точно так же формулы (14) и (15) справедливы для контуров общего вида.

В случае эллипса

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

формула (15) дает:

$$\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

В указанных формулах для площади существенно, что при интегрировании по ($l$) этот контур обходится против часовой стрелки, или лучше сказать, контур ($l$) обходится в таком направлении,

в каком надо повернуть $OX$ на угол $\frac{\pi}{2}$, чтобы она совпала (по направлению) с осью $OY$. Если бы мы направили $OY$ не вверх, а вниз, то формулы для площади остались бы справедливыми, но интегрировать по $(l)$ надо было бы по часовой стрелке. В дальнейшем мы всегда будем держаться указанного выше условия о направлении замкнутого контура по плоскости.

**69. Формула Грина.** Установим теперь основную формулу, связывающую интеграл по замкнутой поверхности и криволинейный интеграл по контуру этой поверхности. Мы начнем с того случая, когда поверхностью является плоская область. В этом случае формула, которую мы установим, называется обычно *формулой Грина*.

Применяем формулу (7) [56] к вычислению двукратного интеграла

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, d\sigma,$$

где $P(x, y)$ есть функция от $(x, y)$.

Производя сперва интегрирование по $y$ и считая, что контур $(l)$ области $(\sigma)$ пересекается только в двух точках прямыми, параллельными оси $OY$ (черт. 61), мы получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\, dx.$$

С другой стороны, интегралы

$$\int\limits_a^b P(x, y_1)\, dx, \quad \int\limits_a^b P(x, y_2)\, dx$$

будут не что иное, как криволинейные интегралы

$$\int P(x, y)\, dx,$$

взятые соответственно по частям (1) и (2) контура $(l)$ от точки $x = a$ до точки $x = b$.

Изменяя во втором из них направление интегрирования, получим:

$$\int\limits_a^b P(x, y_2)\, dx = -\int\limits_b^a P(x, y_2)\, dx = -\int\limits_{(2)\ b}^{a} P(x, y)\, dx,$$

откуда

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\int\limits_{(2)\,b}^{a} P(x, y)\,dx - \int\limits_{(1)\,a}^{b} P(x, y)\,dx,$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\int\limits_{(l)} P\,dx, \tag{16}$$

причем кривую $(l)$ нужно обходить против часовой стрелки (черт. 61),

Таким же путем мы вычислим и интеграл:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} d\sigma,$$

где $Q$ есть другая функция от $(x, y)$. Предположив для простоты, что контур $(l)$ пересекается только в двух точках прямыми, параллельными оси $OX$, мы получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\,dy,$$

причем это выражение может быть тоже приведено к криволинейному интегралу по замкнутому контуру

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \int\limits_{(l)} Q\,dy. \tag{17}$$

Вычитая уравнение (16) из (17), мы и получим формулу Грина

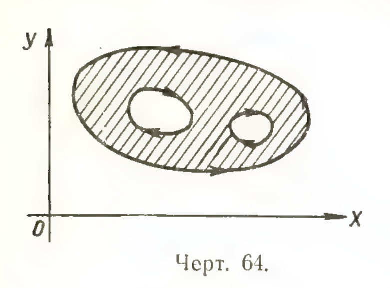
$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = \int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy. \tag{18}$$

Формула (16) выведена нами в предположении, что прямые, параллельные оси $OY$, пересекают $(l)$ не более чем в двух точках. Рассуждая совершенно так же, как в предыдущем номере, можем показать, что эта формула справедлива и для областей общего вида. То же самое замечание относится и к формулам (17) и (18).

Эти рассуждения применимы и к тому случаю, когда область $(\sigma)$ ограничена несколькими кривыми (черт. 64). При этом в правой части (18) надо интегрировать по всем кривым, ограничивающим область, причем при принятом направлении осей надо интегрировать

по внешнему контуру против часовой стрелки, а по внутренним контурам — по часовой стрелке, т. е. по всем контурам так, чтобы область ($\sigma$) оставалась слева.

Отметим, что формулу Грина (18) мы можем записать в другом виде. Пусть $t$ — касательная к линии $l$, имеющая то же направление, что и $l$, и $n$ — нормаль к $l$, направленная вовне $\sigma$. Направление $t$ получается из направления $n$, поворотом на прямой угол против часовой стрелки, и, следовательно, для углов, образованных $t$ и $n$ с осями координат, мы имеем: $(t, X) = \pi + (n, Y)$ и $(t, Y) = (n, X)$. Если $ds$ есть элемент дуги кривой, то $dx = ds \cdot \cos(t, X)$ и $dy = ds \cdot \cos(t, Y)$, т. е. $dx = -ds \cos(n, Y)$ и $dy = ds \cdot \cos(n, X)$. Подставляя это в формулу (18) и заменяя в этой формуле $P$ на $(-Q)$ и $Q$ на $P$, получим:

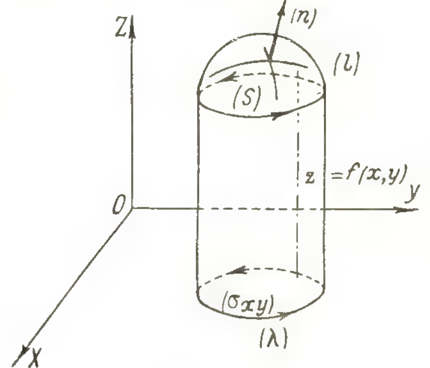


Черт. 64.

$$\int\limits_{(\sigma)}\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\sigma = \int\limits_{(l)} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, Y)]\, ds.$$

В этом виде формула Грина представляет собой формулу Остроградского для плоскости.

**70. Формула Стокса.** Переходим теперь к случаю любой незамкнутой поверхности ($S$) с контуром $l$ (черт. 65). Предполагаем, что прямые, параллельные оси $z$, пересекают $S$ только в одной точке, и сохраняем все обозначения из [**62**]. Проекция $l$ на плоскость $XY$ дает контур ($\lambda$) области ($\sigma_{xy}$). За положительный обход контура ($\lambda$) принимаем обход против часовой стрелки и соответственно считаем положительный обход по ($l$). Направление нормали $n$ к ($S$) берем так, чтобы оно составляло острый угол с осью $OZ$, так что $\cos(n, Z) > 0$. При этом в формулах (24) [**62**] надо брать нижний знак, и эти формулы дают:



Черт. 65.

$$p \cos(n, Z) = -\cos(n, X); \quad q \cos(n, Z) = -\cos(n, Y), \qquad (19)$$

а формулу (26) из [62] можно переписать так:

$$d\sigma_{xy} = \cos(n, Z)\,dS. \tag{20}$$

Пусть $P(x, y, z)$ — какая-либо функция, заданная вблизи поверхности $(S)$ и непрерывная со своими производными первого порядка. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)\,dx.$$

Линия $(l)$ лежит на $(S)$ и, пользуясь уравнением этой поверхности: $z = f(x, y)$, мы можем заменить под знаком интеграла $z$ на $f(x, y)$. При этом подинтегральная функция $P[x, y, f(x, y)]$ будет содержать только $x$ и $y$. Координаты $(x, y)$ переменной точки $(\lambda)$ такие же, что и в соответствующих точках на $(l)$, а потому интегрирование по $(l)$ можно заменить интегрированием по $(\lambda)$:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)dx = \int\limits_{(\lambda)} P[x, y, f(x, y)]\,dx.$$

Применим к интегралу, стоящему направо, формулу Грина (18), причем в данном случае $P = P[x, y, f(x, y)]$; $Q = 0$ и $(l)$ есть $(\lambda)$. При вычислении $\frac{\partial P}{\partial y}$ надо будет дифференцировать $P$ как непосредственно по $y$, так и через посредство третьего аргумента $z$, который заменен на $f(x, y)$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

причем в выражении $P$ под буквой $z$ надо подразумевать $f(x, y)$. Формула (18) дает:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)\,dx = \int\limits_{(\lambda)} P[x, y, f(x, y)]\,dx =$$

$$= -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] d\sigma_{xy}.$$

Выражая $d\sigma_{xy}$ через элемент $dS$ поверхности $(S)$, согласно (20), приведем двойной интеграл к интегралу по поверхности $(S)$ [63]:

$$\int\limits_{(l)} P(x, y, z)\,dx =$$

$$= -\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] \cos(n, Z)\,dS,$$

и, наконец, пользуясь второй из формул (19), получим окончательно

$$\int\limits_{(l)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos(n,\ Y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(n,\ Z)\right] dS. \qquad (21)$$

Если $Q(x,\ y,\ z)$ и $R(x,\ y,\ z)$ — две другие функции, заданные вблизи $(S)$, то, совершая круговую перестановку координат $x$, $y$ и $z$, получим две аналогичные формулы:

$$\int\limits_{(l)} Q\,dy = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(n,\ Z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(n,\ X)\right] dS$$

$$\int\limits_{(l)} R\,dz = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos(n,\ X) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(n,\ Y)\right] dS.$$

Складывая три полученные формулы, придем к формуле Стокса:

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(n,\ X) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(n,\ Y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(n,\ Z)\right] dS. \qquad (22)$$

Формула эта связывает криволинейный интеграл по контуру поверхности с интегралом по самой поверхности, и в этом отношении она совершенно аналогична формуле Остроградского [**63**], которая связывала интеграл по поверхности трехмерной области с интегралом по самой области. Формула Грина есть тот частный случай формулы Стокса, когда $(S)$ есть плоская область на плоскости $XY$. При этом $(l)$ есть замкнутая кривая на плоскости $XY$ и $dz = 0$, а направление $(n)$ совпадает с осью $OZ$, так что $\cos(n,\ X) = \cos(n,\ Y) = 0$ и $\cos(n,\ Z) = 1$. Подставляя все это в (22), получим формулу (18).

По поводу косинусов, входящих в формулу (22), делаются те же предположения, что и при выводе формулы Остроградского [**63**].

Формула (21) выведена нами в предположении, что прямые, параллельные оси $OZ$ пересекают $(S)$ только в одной точке. Если это не так, то разбиваем $(S)$ на части вспомогательными линиями так, чтобы каждая часть удовлетворяла указанному выше условию, так что к каждой части формула (21) применима. Складывая полученные таким образом для всех частей формулы, будем иметь слева интеграл по контуру $(l)$, так как интегралы по вспомогательным контурам будут браться два раза в противоположных направлениях и сократятся. Справа получим двойной интеграл по всей поверхности $(S)$, т. е. формула (21) окажется справедливой в общем случае. То же самое замечание справедливо и для общей формулы (22). При этом только нужно соблюдать следующее условие для обхода $(l)$ и

направления нормали $(n)$: *наблюдатель, обходящий* $(l)$ *и направленный по нормали* $(n)$, *должен иметь поверхность* $(S)$ *слева*. Это правило связано с выбором координатной системы, указанной на черт. 65. В этой системе наблюдатель, направленный по $OZ$, видит $OX$ переходящей в $OY$ при вращении на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Если бы это вращение было по часовой стрелке, то в предыдущем правиле слово „слева" надо было бы заменить словом „справа".

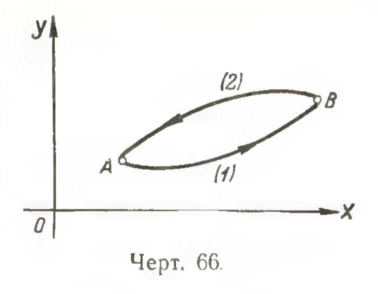
Если воспользоваться обозначением интеграла по поверхности, указанным в [64], то формулу (22) можно переписать в виде:

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (23)$$

Определение стороны поверхности $(S)$ и направления $(n)$ производится по вышеуказанному правилу.

**71. Независимость криволинейного интеграла от пути на плоскости.** Примеры криволинейных интегралов, разобранные в [**67**], показывали, что в некоторых случаях величина криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования, но лишь от начальной и конечной точек интегрирования, а в других случаях вид самого пути влияет на величину интеграла. Теперь, пользуясь формулами Грина и Стокса, мы выясним те условия, при которых величина интеграла не зависит от пути интегрирования. Мы начнем со случая плоской кривой и выясним условия независимости криволинейного интеграла



Черт. 66.

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

от пути. Соединяя точки $(A)$ и $(B)$ кривыми (1) и (2) (черт. 66), мы должны иметь:

$$(1)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = (2)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy, \qquad (24)$$

или, пользуясь свойством II [66]:

$$(1)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy - (2)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

$$(1)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + (2)\int\limits_{(B)}^{(A)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy = 0, \quad (25)$$

где $(l)$ — замкнутый контур, составленный из кривой (1) с направлением от $(A)$ к $(B)$ и кривой (2) с направлением от $(B)$ к $(A)$. Таким образом, ввиду произвольности точек $A$ и $B$, мы видим, что интеграл по любому замкнутому контуру $(l)$ должен равняться нулю. Наоборот, если интеграл по замкнутому контуру $(l)$ равен нулю, то интеграл по (1) равен интегралу по (2), так как из равенства (25), наоборот, вытекает равенство (24). Если кривые (1) и (2), соединяющие точки $A$ и $B$, пересекаются, то, соединив $A$ с $B$ кривой (3), которая не пересекается ни с кривой (1), ни с (2), из равенств

$$(1)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = (3)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

$$(2)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = (3)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy$$

будем иметь:

$$(1)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = (2)\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy.$$

Итак, *условие независимости интеграла от пути совпадает с условием, что интеграл по любому замкнутому контуру* $(l)$ *равен нулю.*

Если последнее условие выполнено, то из формулы (18) мы получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0, \quad (26)$$

причем область интегрирования $(\sigma)$ может быть взята *совершенно произвольно.*

Покажем, что отсюда вытекает

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

*тождественно*, т. е. *при всех значениях* $x$ и $y$.

В самом деле, пусть в некоторой точке $C(a, b)$ разность

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y)$$

отлична от нуля, например положительна. В силу непрерывности производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, что мы предполагаем, указанная разность будет положительной в некотором малом круге $(\sigma_0)$ с центром в $C$. Составим интеграл

$$\iint_{(\sigma_0)} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

и применим к нему теорему о среднем [**61**]:

$$\iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma,$$

где $(\xi, \eta)$ — некоторая точка из $(\sigma_0)$, и потому $f(\xi, \eta) > 0$, откуда вытекает, что

$$\iint_{(\sigma_0)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma > 0,$$

а это противоречит тому, что интеграл (26) равен нулю при любом выборе области $(\sigma)$. Итак, условие (27) необходимо для независимости интеграла от пути. Нетрудно видеть, что оно и достаточно, ибо из него, в силу (18), вытекает, что интеграл $\int_{(l)} P\,dx + Q\,dy$ по любой замкнутой кривой равен нулю, что и равносильно независимости интеграла от пути.

Итак, *условие* (27) *необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл*

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy \tag{28}$$

*не зависел от пути интегрирования и был только функцией координат точек A и B.*

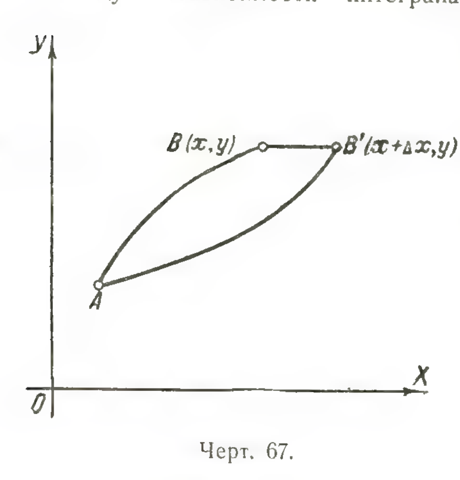
Если это условие выполнено, и мы закрепим точку $A(x_0, y_0)$, а будем считать переменной только точку $B(x, y)$, то интеграл (28) будет функцией $(x, y)$, или, как говорят, функцией точки $B$:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = U(x, y). \tag{29}$$

Исследуем свойства этой функции. Оставив без изменения $y$, дадим приращение $\Delta x$ только переменной $x$. Мы получим:

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x+\Delta x,\ y)} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} P\,dx+Q\,dy.$$

Ввиду независимости интеграла от пути интегрирования, мы можем считать, что путь интегрирования в первом интеграле состоит из кривой $AB$ (черт. 67), соединяющей $A$ с $B$, той же самой, что и для второго интеграла, и отрезка прямой $BB'$. Интеграл по $AB$ сократится и останется:



Черт. 67.

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=$$
$$=\int\limits_{(x,\ y)}^{(x+\Delta x,\ y)} P\,dx+Q\,dy=$$
$$=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,\ y)\,dx,$$

ибо на прямой $BB'$ $y$ не меняется, и $dy=0$. Применяя теорему о среднем [I, 95], мы находим:

$$U(x+\Delta x,\ y)-U(x,\ y)=\Delta x P(x+\theta\,\Delta x,\ y) \qquad (0<\theta<1).$$

Разделив на $\Delta x$ и приближая $\Delta x$ к 0, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\,\Delta x,\ y)=P(x,\ y). \tag{30}$$

Таким же точно образом мы найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,\ y). \tag{31}$$

Соотношения (30) и (31) дают нам [I, 68]:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=P\,dx+Q\,dy.$$

Таким образом оказывается, что при выполнении условия (27) подинтегральное выражение

$$P\,dx+Q\,dy \tag{32}$$

является полным дифференциалом функции $U(x,\ y)$, определяемой по формуле (29). Нетрудно показать, что самое общее выражение

функции $U_1(x, y)$, от которой полный дифференциал равен (32), дается формулой

$$U_1(x, y) = U(x, y) + C, \tag{33}$$

где $C$ — произвольная постоянная. В самом деле, мы должны иметь

$$dU = P\,dx + Q\,dy,$$
$$dU_1 = P\,dx + Q\,dy,$$

откуда

$$d(U_1 - U) = 0.$$

Но если дифференциал некоторой функции равен тождественно нулю, то частные производные этой функции по всем независимым переменным равны нулю, и, следовательно, сама функция есть постоянная, т. е.

$$U_1 - U = C,$$

что и требовалось доказать.

Отметим очевидное равенство, которое будет иметь место при соблюдении условия (27):

$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(A)}^{(B)} dU_1 = U_1(B) - U_1(A). \tag{34}$$

Обратно, пусть существует такая функция $U_1$, что

$$dU_1 = P\,dx + Q\,dy. \tag{35}$$

Покажем, что необходимо должно быть

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

и что функция $U_1$ определяется по формуле

$$U_1(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy + C.$$

В самом деле, соотношение (35) можно переписать в виде

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial U_1}{\partial x}dx + \frac{\partial U_1}{\partial y}dy,$$

и так как величины $dx$ и $dy$, как дифференциалы независимых переменных, совершенно произвольны [I, 68], то это равенство может иметь место только при условии, что равны коэффициенты при $dx$ и $dy$ в обеих частях равенства, т. е.

$$P = \frac{\partial U_1}{\partial x}; \quad Q = \frac{\partial U_1}{\partial y},$$

откуда уже ясно, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Итак, при этом выполнено условие (27), а тогда, в силу предыдущих рассуждений, интеграл

$$U(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy$$

зависит только от $(x, y)$ и обладает свойством

$$dU=P\,dx+Q\,dy=dU_1,$$

откуда следует

$$U_1=U+C,$$

что и требовалось доказать. Итак, *необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение* $P\,dx+Q\,dy$ *было полным дифференциалом некоторой функции* $U_1$, *заключается в том, чтобы существовало тождество*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

*при выполнении которого функция* $U_1$ *определяется по формуле*

$$U_1(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy+C. \qquad (36)$$

**72. Случай многосвязной области.** Доказательство того, что условие (27) является необходимым и достаточным для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} P\,dx+Q\,dy$$

не зависел от пути, существенным образом основано на следующих двух обстоятельствах:

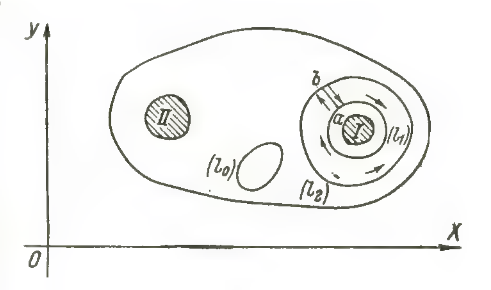
1) Функции $P$ и $Q$ и их частные производные первого порядка непрерывны в рассматриваемой области изменения $(x, y)$.

2) Если в данной области начерчен какой-либо замкнутый контур $(l)$, то вся часть плоскости, заключенная внутри $(l)$, принадлежит той области, где выполнены условия непрерывности и условие (27).

Первое условие важно потому, что упомянутые в нем функции входят под знак интеграла при доказательстве. Второе существенно для применения формулы Грина, т. е. для преобразования криволиней-

ного интеграла к двукратному. Оно равносильно тому, что всякий замкнутый контур, начерченный в области, может быть непрерывным сужением приведен к точке, не выходя из области, или проще говоря, это условие равносильно тому, что область не имеет дыр.

Положим теперь, что функции $P$ и $Q$ непрерывны со своими производными и условие (27) выполнено в некоторой области $(\sigma)$, имеющей две дыры (черт. 68). Если в такой области взять замкнутый контур $(l_0)$, внутри которого нет дыр, то к такому контуру и области, им ограниченной, приложима формула Грина (18), и в силу условия (27) интеграл по такому замкнутому контуру $(l_0)$ будет нуль. Возьмем теперь замкнутый контур $(l_1)$, обходящий вокруг дыры (I). Здесь формула (18) неприменима, и интеграл (28) по $(l_1)$, вообще говоря, окажется отличным от нуля. Покажем, что величина этого интеграла не зависит от вида контура $(l_1)$, и важно лишь, что этот контур обходит вокруг одной дыры (I). Возьмем два контура $(l_1)$ и $(l_2)$, обходящих вокруг (I). Нам надо показать, что величины интеграла (28) по $(l_1)$ и $(l_2)$ одинаковы. Проведем вспомогательный контур $(ab)$, соединяющий $(l_1)$ с $(l_2)$. Кривые $(l_1)$, $(l_2)$ и $(ab)$ совместно являются контуром области, уже не имеющей дыр, причем этот контур должен обходиться в направлении, указанном стрелкой. К этому контуру, следовательно, приложима формула (18), и, в силу (27), интеграл по этому контуру будет нуль:



Черт. 68.

$$\oint_{(l_1)} + \int_{(ba)} + \oint_{(l_2)} + \int_{(ab)} = 0.$$

При этом интегралы по $(ba)$ и $(ab)$, взятые в противоположных направлениях, сокращаются, интегрирование по $(l_1)$ надо производить по часовой стрелке и по $(l_2)$ — против часовой стрелки. Меняя направление интегрирования по $(l_1)$ и знак при интеграле, что не меняет результата, получим:

$$\oint_{(l_2)} - \oint_{(l_1)} = 0$$

или окончательно:

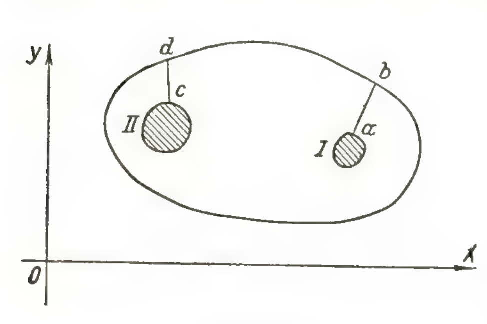
$$\oint_{(l_1)} P\,dx + Q\,dy = \oint_{(l_2)} P\,dx + Q\,dy,$$

т. е. действительно интегралы по $(l_1)$ и $(l_2)$, взятые оба, как всегда, против часовой стрелки, одинаковы по величине. Таким образом *дыре* (I) *соответствует определенная постоянная* $\omega_1$, *равная величине интеграла* (28), *взятого по любому замкнутому контуру, обходящему вокруг* (I). *Точно так же дыре* (II) *соответствует другая постоянная* $\omega_2$.

Если в области $(D)$ проведем два разреза $(ab)$ и $(cd)$ от дыр к внешнему контуру (черт. 69), то получится новая область, не имеющая уже внутри дыр, и в силу (27) в этой области можно построить однозначную функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy,$$

но, в силу предыдущего, значения этой функции на противоположных краях разреза $(ab)$ отличаются на постоянную $\omega_1$, а на $(cd)$ — на постоянную $\omega_2$. Если уничтожить разрезы и вернуться к исходной области $(D)$, то в ней *функция* $U(x, y)$ *будет многозначной*. Обход вокруг дыр будет придавать этой функции слагаемые $\omega_1$ и $\omega_2$, т. е. *функция* $U(x, y)$ *будет содержать неопределенное слагаемое вида* $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где $m_1$ и $m_2$ — *любые целые числа*. Все наши рассуждения очевидно годятся для любого числа дыр в области, причем дыры могут быть и точечными, т. е. состоять из одной лишь точки. Число дыр, увеличенное на единицу, называется обычно *степенью связности области* $(D)$, а сама область с дырами — *многосвязной областью*. Числа $\omega_1$ и $\omega_2$ называются *циркуляциями* выражения $P\,dx + Q\,dy$ или *циклическими постоянными функции* $U(x, y)$.




Черт. 69.

Пример. Рассмотрим функцию

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

определенную в области $(D)$, ограниченной двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат.

Определим $P$ и $Q$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ Q &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Эти функции непрерывны в $(D)$ со своими производными, и, как нетрудно проверить, удовлетворяют соотношению (27). Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

и возьмем его по окружности $(l_1)$ с центром в начале и радиусом $a$. Подставляя $x = a\cos\varphi$; $y = a\sin\varphi$, получим

$$\int\limits_{(l_1)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В данном случае область $(D)$ имеет одну дыру, и циклическая постоянная $\omega_1 = 2\pi$. Функция $U_1(x, y)$ является полярным углом:

$$U_1(x, y) = \int P\,dx + Q\,dy = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = \varphi$$

и при обходе вокруг дыры приобретает слагаемое $2\pi$. Заметим, что радиус внутренней окружности можно считать нулем, т. е. можно считать дыру точечной. Дело сведется к исключению точки $(0, 0)$. В этой точке функции $P$ и $Q$ (37) принимают неопределенную форму $\frac{0}{0}$.

**73. Независимость криволинейного интеграла от пути в пространстве.** Так же как и на плоскости, условие независимости криволинейного интеграла от пути в пространстве совпадает с условием, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (38)$$

Пользуясь формулой Стокса (22), можно доказать так же, как и в предыдущем, что *необходимые и достаточные условия независимости интеграла* (38) *от пути выражаются тремя тождествами*:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \qquad (39)$$

Если эти условия выполнены, то можно построить функцию точки $U(x, y, z)$

$$U(x, y, z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \qquad (40)$$

причем совершенно так же, как и раньше, можно показать, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \tag{41}$$

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU \tag{42}$$

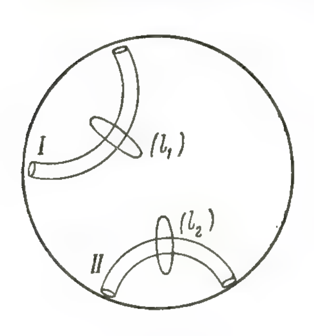
$$\int_{(A)}^{(B)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(B) - U(A). \tag{43}$$

Кроме того, условия (39) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ было полным дифференциалом некоторой функции $U_1$, и, если эти условия выполнены, то $U_1$ определяется по формуле

$$U_1 = \int_{(x_0,\ y_0,\ z_0)}^{(x,\ y,\ z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C,$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Понятие многосвязной области в пространстве представляет некоторые особенности. В качестве примера рассмотрим область $(D)$, образованную внутренностью сферы, из которой выделены две трубки (I) и (II), концами упирающиеся в поверхность сферы, как это указано на черт. 70. Если возьмем замкнутый контур $(l)$, обходящий вокруг трубки (I), то на него нельзя натянуть поверхность, которая бы заключалась в области $(D)$, и, следовательно, если даже в области $(D)$ условия (39) и выполнены, то все же нельзя к $(l_1)$ применять формулу Стокса, и величина интеграла (38) по $(l_1)$ будет, вообще говоря, отлична от нуля. Но эта величина не будет зависеть от вида $(l_1)$. Важно лишь, что $(l_1)$ есть замкнутый контур в $(D)$, обходящий вокруг одной трубки (I). Таким образом получится циклическая постоянная $\omega_1$ для трубки (I). Совершенно так же будем иметь вторую циклическую постоянную $\omega_2$ для второй трубки (II). Функция $U(x,\ y,\ z)$, определяемая по формуле (40), в этом случае есть многозначная функция и содержит неопределенное слагаемое $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где $m_1$ и $m_2$ — любые целые числа.



Черт. 70.

Заметим, что если область $(D)$ есть часть пространства между двумя концентрическими сферами, и в этой области выполнены условия (39), то никаких циклических постоянных не будет, и функция (40) будет однозначной. Действительно, геометрически ясно, что на всякий замкнутый контур, находящийся в $(D)$, можно в данном

случае натянуть поверхность, также находящуюся в $(D)$, а потому ко всякому замкнутому контуру в $(D)$ применима формула Стокса (22), и из условия (39) вытекает равенство нулю интеграла по такому контуру.

Пример. Рассмотрим угол $\varphi$, входящий в систему цилиндрических и сферических координат:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

и определим $P$ и $Q$ по формулам (37). Эти выражения принимают неопределенную форму $\frac{0}{0}$ вдоль всей оси $OZ$. При рассмотрении криволинейного интеграла в пространстве

$$\int\limits_{(l)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(l)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

придется исключить трубку, идущую вдоль оси $OZ$, и величина написанного интеграла по любому замкнутому контуру вокруг такой трубки даст циклическую постоянную $2\pi$.

**74. Установившееся течение жидкости.** Пусть в плоском установившемся течении несжимаемой жидкости $\mathbf{v}(x, y)$ — вектор скорости, а $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — его проекции на координатные оси. В примере 3 [**67**] мы видели, что условие отсутствия источников сводится к тому, что интеграл

$$\int\limits_{(l)} -v\,dx + u\,dy \tag{44}$$

по любому замкнутому контуру есть нуль или, что то же, что этот интеграл не зависит от пути. В силу (27) для этого необходимо и достаточно

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{45}$$

что и является характерным для несжимаемой жидкости. При выполнении условия (45) выражение

$$-v\,dx + u\,dy$$

оказывается полным дифференциалом некоторой функции $\psi(M)$, которая определяется соотношением

$$\psi(B) - \psi(A) = \int\limits_{(A)}^{(B)} -v\,dx + u\,dy. \tag{46}$$

Функция $\psi(M)$ называется *функцией тока* и имеет простое физическое значение: *разность* $\psi(B) - \psi(A)$ *дает количество жидкости, протекающей за единицу времени через произвольный контур, начало и конец которого находятся в точках* $A$ *и* $B$. Это вытекает непосредственно из формулы (10) [**67**] для количества протекающей жидкости.

Если в отдельных точках области находятся источники, то, исключая эти точки, получим область с дырами, в которых условие (45) выполнено. Циклическая постоянная для некоторой дыры, равная интегралу (44) по

замкнутому контуру вокруг этой дыры, даст, очевидно, количество жидкости $q$, даваемой соответственным источником в единицу времени. Функция типа $\psi(M)$ будет при этом многозначной. Если $q<0$, то источник будет отрицательной силы (сток).

Рассмотрим, кроме интеграла (44), еще интеграл

$$\int\limits_{(l)} u\,dx+v\,dy, \tag{47}$$

величина которого называется обычно циркуляцией скорости вдоль контура $(l)$. Предположим, что циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е. интеграл (47) не зависит от пути. Это выражают иначе, говоря, что течение незавихренное. Сделанное предположение равносильно существованию функции $\varphi(M)$:

$$\varphi=\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} u\,dx+v\,dy, \tag{48}$$

такой, что проекции $u$ и $v$ вектора скорости $\mathbf{v}$ суть частные производные

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{49}$$

Функция $\varphi$ называется потенциалом скорости. Если условие независимости интеграла (48) от пути выполнено в многосвязной области (области с дырами), то потенциал скорости $\varphi$ будет, вообще говоря, многозначной функцией, и циклическая постоянная интеграла (48) относительно какой-нибудь дыры будет давать напряженность вихря, соответствующего этой дыре.

Из равенства (46) вытекает [71]

$$-v=\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Сравнивая эти равенства с (49), получаем два уравнения, связывающих потенциал скорости $\varphi$ и функцию тока $\psi$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{50}$$

Эти уравнения, которые обычно называются *уравнениями Коши — Римана*, имеют основное значение в теории функций комплексной переменной, и их гидродинамическое значение, установленное выше, служит основанием тех обширных приложений, которые теория функций комплексной переменной имеет в плоской задаче гидродинамики.

В случае установившегося движения в пространстве вектор скорости $\mathbf{v}(x, y, z)$ имеет три составляющие: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, а вместо интеграла (48) надо рассматривать интеграл

$$\int\limits_{(l)} u\,dx+v\,dy+w\,dz,$$

и если выполнены условия независимости его от пути

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0;\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

то существует потенциал скорости

$$\varphi = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

причем

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Обобщение условия несжимаемости (45) на случай пространства мы приведем в следующей главе.

**75. Интегрирующий множитель.** Если выражение

$$P\,dx + Q\,dy \tag{51}$$

не есть полный дифференциал, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0,$$

то, как мы покажем, всегда можно найти такую функцию $\mu$, по умножении на которую выражение (51) обратится в полный дифференциал

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dU. \tag{52}$$

Всякая такая функция называется *интегрирующим множителем выражения* (51).

Для того чтобы функция $\mu$ была интегрирующим множителем выражения (51), в силу [**71**], необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = 0, \tag{53}$$

которое, будучи переписано в виде

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0, \tag{54}$$

может быть рассматриваемо как уравнение для определения множителя $\mu$. Фактически, вообще говоря, этим уравнением трудно пользоваться, так как оно является уравнением в частных производных, задача интегрирования которых еще более сложна, чем задача интегрирования обыкновенных уравнений.

Если выражение (51) есть полный дифференциал, то дифференциальное уравнение

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \tag{55}$$

называется *уравнением типа полного дифференциала.*

Оно может быть сразу проинтегрировано. В самом деле, пусть $U$ и есть та функция, для которой

$$dU = P\,dx + Q\,dy.$$

Функция эта при сделанном предположении, которое равносильно условию (27), может быть найдена всегда по формуле (29). Уравнение (55) равносильно равенству $dU=0$, т. е.

$$U=C, \tag{56}$$

каковое равенство и дает общий интеграл данного дифференциального уравнения (55).

Пусть теперь выражение (51) не есть полный дифференциал. Дифференциальное уравнение (55) всегда имеет, в силу теоремы существования [**51**], общий интеграл, который мы запишем в виде

$$F(x, y)=C.$$

Функция $F(x, y)$ должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

где $\frac{dy}{dx}$, в силу (55), мы должны заменить на $\left(-\frac{P}{Q}\right)$, т. е. должно иметь место тождество [**7**]:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Q}.$$

Обозначая через $\mu$ общую величину этих двух равных отношений, мы имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\mu P; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\mu Q,$$

т. е. $\mu$ есть интегрирующий множитель выражения (51).

Это рассуждение доказывает, что *всякое выражение $P\,dx+Q\,dy$ имеет интегрирующий множитель*.

Найдя интегрирующий множитель выражения (51) и по нему функцию $F$, можно сразу написать общий интеграл дифференциального уравнения (55):

$$F=C.$$

Примеры. 1. Линии тока установившегося плоского течения жидкости имеют дифференциальное уравнение [**52**]

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \quad \text{или} \quad -v\,dx+u\,dy=0, \tag{57}$$

где $u$ и $v$ — проекция вектора скорости $\mathbf{v}$ на координатные оси. Если жидкость несжимаема, то выполняется условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

которое показывает, что выражение

$$-v\,dx+u\,dy \tag{58}$$

есть полный дифференциал некоторой функции; действительно, в [**74**] мы видели, что

$$-v\,dx+u\,dy=d\psi,$$

где $\psi$ есть функция тока, и уравнение линий тока будет:

$$\psi = C,$$

что и дает общий интеграл уравнения

$$-v\,dx + u\,dy = 0.$$

**2.** В примере **4** [**67**] мы упоминали об элементарном тепловом процессе и дали выражение бесконечно малого количества тепла, получающегося при таком процессе, в зависимости от бесконечно малых изменений давления $p$, объема $v$ и температуры $T$.

Напишем три выражения для $dQ$ в зависимости от того, какие из трех величин $p$, $v$, $T$ считаются независимыми переменными:

$$dQ = \begin{cases} c_v\,dT + c_1\,dv & (T,\ v \text{ — независимые переменные}) \\ c_p\,dT + c_2\,dp & (T,\ p \text{ — } \quad " \quad\quad " \quad) \\ P\,dp + V\,dv & (p,\ v \text{ — } \quad " \quad\quad " \quad). \end{cases} \tag{59}$$

Величины $c_v$ и $c_p$ особенно важны и называются теплоемкостями вещества при постоянном объеме и постоянном давлении.

Если мы в (59) будем выражать одни независимые переменные через другие, то получим ряд соотношений между коэффициентами.

Так, в равенстве

$$c_p\,dT + c_2\,dp = c_v\,dT + c_1\,dv \tag{60}$$

будем считать независимыми переменными $T$ и $v$. Положим:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T}\,dT + \frac{\partial p}{\partial v}\,dv.$$

Подставив это выражение для $dp$ в (60) и приравняв коэффициенты при $dT$ и $dv$, имеем:

$$c_v = c_p + c_2\frac{\partial p}{\partial T} \tag{61}$$

$$c_1 = c_2\frac{\partial p}{\partial v}. \tag{62}$$

Таким же путем из равенства:

$$c_v\,dT + c_1\,dv = P\,dp + V\,dv$$

мы получим:

$$c_v = P\frac{\partial p}{\partial T} \tag{63}$$

$$c_1 = V + P\frac{\partial p}{\partial v}. \tag{64}$$

В случае идеального газа мы имеем уравнение состояния:

$$pv = RT,$$

откуда следует

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v};\quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v};\quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{v};\quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{p};\quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R};\quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R},$$

и тогда соотношения (61)—(64) дают:

$$c_v = c_p + c_2\frac{R}{v};\quad c_1 = -c_2\frac{p}{v};\quad c_v = P\frac{R}{v};\quad c_1 = -P\frac{p}{v} + V. \tag{65}$$

Эти равенства позволяют выразить величины $c_1$, $c_2$, $P$, $V$ через основные $c_v$ и $c_p$:

$$c_1 = (c_p - c_v)\frac{p}{R}; \quad c_2 = -(c_p - c_v)\frac{v}{R}; \quad P = c_v\frac{v}{R}; \quad V = c_p\frac{p}{R}. \qquad (66)$$

Выражение $dQ$, вообще говоря, не есть полный дифференциал. Но в силу двух основных начал термодинамики можно утверждать, что:

I. Разность между $dQ$ и элементарной работой давления $p\,dv$ есть полный дифференциал:

$$dQ - p\,dv = dU,$$

причем функция $U$ называется *внутренней энергией.*

II. Частное от деления $dQ$ на абсолютную температуру $T$ есть полный дифференциал, или, другими словами, $\frac{1}{T}$ есть интегрирующий множитель выражения $dQ$:

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

причем функция $S$ называется *энтропией.*

Начало I, в силу первой из формул (59), дает нам:

$$dU = dQ - p\,dv = c_v\,dT + (c_1 - p)\,dv,$$

откуда

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial (c_1 - p)}{\partial T}\right|_v. \qquad (67)$$

Значки $T$ и $v$ означают те переменные, которые считаются постоянными при указанном дифференцировании.

Точно так же начало II дает:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v}{T}\,dT + \frac{c_1}{T}\,dv,$$

откуда

$$\frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{c_1}{T}\right)\right|_v = \frac{1}{T}\left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T^2},$$

или

$$\left.\frac{\partial c_v}{\partial v}\right|_T = \left.\frac{\partial c_1}{\partial T}\right|_v - \frac{c_1}{T}. \qquad (68)$$

Сравнивая уравнения (67) и (68), находим:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{c_1}{T}. \qquad (69)$$

Переходя опять к случаю идеального газа, мы заключаем отсюда:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v} = \frac{c_1}{T}; \quad c_1 = \frac{RT}{v} = p. \qquad (70)$$

С другой стороны, уравнение (66) дает

$$c_1 = p = (c_p - c_v)\frac{p}{R}, \quad \text{т. е. } c_p - c_v = R. \qquad (71)$$

На основе экспериментальных данных считают, что:

III. Величина $c_p$ — теплоемкость идеального газа при постоянном давлении — есть величина постоянная, а потому и $c_v = c_p - R$ есть также величина постоянная.

Из (71) следует, что $c_p > c_v$ и, обозначив для краткости:

$$\frac{c_p}{c_v} = k,$$

где $k > 1$, мы без труда найдем окончательно, в силу формул (66) и (71):

$$c_1 = p; \quad c_2 = -v; \quad P = \frac{v}{k-1}; \quad V = p\frac{k}{k-1},$$

после чего формула (59) дает следующее выражение для $dQ$, $dU$ и $dS$:

$$dQ = \begin{cases} c_v\,dT + p\,dv \\ c_p\,dT - v\,dp \\ \dfrac{v\,dp + kp\,dv}{k-1} \end{cases} \tag{72}$$

$$dU = c_v\,dT \tag{73}$$

$$dS = c_v\frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\,dv = c_v\frac{dT}{T} + R\frac{dv}{v}. \tag{74}$$

При изотермическом процессе температура остается постоянной, т. е. $dT = 0$ и

$$dQ = p\,dv,$$

т. е. всё поглощаемое тепло идет на работу давления, и полное изменение количества поглощенного тепла при переходе от объема $v_1$ к объему $v_2$ будет

$$\int\limits_{(v_1)}^{(v_2)} p\,dv.$$

График процесса при постоянной температуре называется *изотермой*.

Адиабатическим процессом называется процесс, совершающийся без притока или утери тепла. Он характеризуется условием:

$$dQ = 0 \text{ или } dS = 0; \ S = \text{const},$$

или постоянством энтропии. Энтропию можно определить из формулы (74):

$$S = c_v \lg T + R \lg v + C,$$

так что адиабатический процесс характеризуется условием:

$$c_v \lg T + R \lg v = \text{const},$$

или, переходя от логарифмов к основаниям:

$$T^{c_v} v^R = T^{c_v} v^{c_p - c_v} = \text{const},$$

или, возвышая в степень $\dfrac{1}{c_v}$:

$$Tv^{k-1} = \text{const},$$

и так как $T = \dfrac{pv}{R}$, то окончательно:

$$pv^k = \text{const}. \tag{75}$$

Наконец, при постоянном объеме мы имеем $dv = 0$, и

$$dQ = c_v\,dT; \quad dQ = c_v\,(T_2 - T_1), \tag{76}$$

если газ переходит от температуры $T_1$ к температуре $T_2$.

**76. Уравнение в полных дифференциалах для случая трех переменных.** Обобщая уравнение (55) на три переменные, получим:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{77}$$

где $P$, $Q$ и $R$ — заданные функции $(x, y, z)$. Если выполнены условия (39), то левая часть уравнения (77) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, и общий интеграл уравнения (77) будет

$$U(x, y, z) = C, \tag{78}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Геометрически уравнение (78) дает семейство поверхностей в пространстве. Если левая часть (77) не есть полный дифференциал, то будем искать интегрирующий множитель, т. е. такую функцию $\mu(x, y, z)$, чтобы левая часть уравнения

$$\mu\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = 0 \tag{79}$$

была полным дифференциалом. Условия (39) дают при этом:

$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = 0,$$

что можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = Q\,\frac{\partial\mu}{\partial z} - R\,\frac{\partial\mu}{\partial y}; \qquad \mu\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = R\,\frac{\partial\mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial\mu}{\partial z} \\ &\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\,\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\,\frac{\partial\mu}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Умножая эти равенства почленно на $P$, $Q$, $R$, складывая и сокращая на $\mu$, получим соотношение между $P$, $Q$ и $R$:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{81}$$

Таким образом, предполагая существование интегрирующего множителя $\mu$, мы пришли к необходимому условию (81), которому должны удовлетворять коэффициенты $P$, $Q$, $R$. Можно показать (на чем мы не останавливаемся), что это условие и достаточно, т. е. *уравнение* (77) *не всегда имеет интегрирующий множитель, и равенство* (81) *дает необходимое и достаточное условие существования такого множителя.* Если $\mu$ существует, то левая часть уравнения (79) есть полный дифференциал некоторой функции $U$, и равенство (78) дает общий интеграл уравнений (79) и (77). Если же условие (81) не выполнено, то уравнение (77) не имеет общего интеграла вида (78).

Условие (81) называется иногда условием полной интегрируемости уравнения (77).

Выясним геометрический смысл уравнения (77) и его общего интеграла (78), если последний существует. Функции

$$P(x, y, z), \ Q(x, y, z), \ R(x, y, z)$$

определяют в каждой точке некоторый вектор $\mathbf{v}(x, y, z)$, проекциями которого на оси они и являются. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

определяет семейство некоторых линий $(L)$ в пространстве, в каждой точке которых соответствующий вектор $\mathbf{v}$ направлен по касательной. Совершенно аналогичную роль играли линии тока установившегося течения в [**52**]. Уравнение (77) равносильно условию перпендикулярности бесконечно малого перемещения с составляющими $dx$, $dy$, $dz$ к вектору $\mathbf{v}$, т. е. уравнение (77) определяет в каждой точке некоторый плоский элемент, перпендикулярный к $\mathbf{v}$ или, что то же, лежащий в нормальной плоскости к той из линий $(L)$, которая проходит через взятую точку. Общий интеграл (78) и дает семейство поверхностей, касательные плоскости которых в каждой точке удовлетворяют этому условию, т. е. нормальны к $\mathbf{v}$. Иначе говоря, поверхности (78) будут ортогональны к линиям $(L)$. Если задано семейство линий $(L)$, заполняющих пространство, то можно определить в каждой точке касательный к ним вектор $\mathbf{v}$, взяв его длину хотя бы равной единице, его составляющие $P$, $Q$, $R$ и построить уравнение (77). Равенство (81) дает при этом условие, чтобы заданное семейство линий $(L)$ было ортогонально к некоторому семейству поверхностей.

**77. Замена переменных в двойном интеграле.** В заключение настоящего параграфа дадим вывод формулы замены переменных в двойном интеграле, указанной нами в [**57**]. Пусть имеется преобразование переменных:

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \psi(u, v), \tag{82}$$

причем мы рассматриваем $(x, y)$ и $(u, v)$ как прямолинейные прямоугольные координаты точек на плоскости. Формулы (82) дают нам точечное преобразование плоскости, при котором точка $(u, v)$ переходит в точку $(x, y)$. Положим, что мы имеем на плоскости область $(\sigma_1)$ с контуром $(l_1)$ и область $(\sigma)$ с контуром $(l)$. Предположим, что: 1) функции (82) непрерывны вместе со своими производными первого порядка в области $(\sigma_1)$ вплоть до $(l_1)$; 2) формулы (82) дают биоднозначное соответствие области $(\sigma_1)$ с контуром $(l_1)$ и области $(\sigma)$ с контуром $(l)$, т. е. всякой точке $(u, v)$ из $(\sigma_1)$ соответствует

определенная точка $(x, y)$ из $(\sigma)$ и, наоборот, точкам $(l_1)$ — точки $(l)$; 3) функциональный определитель от функций (82) по переменным $(u, v)$:

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \tag{83}$$

сохраняет определенный знак в области $(\sigma_1)$.

Будем говорить, что *соответствие между* $(\sigma)$ *и* $(\sigma_1)$ *прямое*, если при обходе по $(l_1)$ против часовой стрелки соответствующая точка $(x, y)$ обходит $(l)$ тоже против часовой стрелки. В противном случае, когда обходу по $(l_1)$ соответствует обход в противоположном направлении по $(l)$, назовем соответствие *обратным*. Площадь $\sigma$ области $(\sigma)$ выражается интегралом **[68]**

$$\sigma = \int_{(l)} x\,dy,$$

где интегрирование совершается против часовой стрелки.

Вводя новые переменные по формулам (82), получим:

$$\sigma = \pm \int_{(l_1)} \varphi(u, v)\,d\psi(u, v) = \pm \int_{(l_1)} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u}\,du + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v}\,dv. \tag{84}$$

Мы уславливаемся интегрировать по $(l_1)$ против часовой стрелки. Если соответствие прямое, то в результате преобразования и получится именно это направление у $(l_1)$, а потому в формуле (84) надо брать знак $(+)$. Если же соответствие обратное, то на $(l)$ в результате преобразования получится противоположное направление, но, приписав знак $(-)$, мы можем опять интегрировать против часовой стрелки.

Применим к интегралу (84) формулу Грина (18), полагая $x = u$, $y = v$, $P = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u}$, $Q = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v}$. При этом получится:

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}, \tag{85}$$

и, следовательно:

$$\sigma = \pm \iint_{(\sigma_1)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\,du\,dv.$$

Применяя к двойному интегралу теорему о среднем **[61]**, получим:

$$\sigma = \pm \sigma_1 \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]_{(u_0, v_0)}, \tag{86}$$

где значение функционального определителя (83) берется в некоторой точке $(u_0, v_0)$, принадлежащей $(\sigma_1)$. Из последней формулы следует, между прочим, в силу положительности $\sigma$ и $\sigma_1$, что если

соответствие прямое, то определитель (83) имеет знак (+), а при обратном соответствии — знак (—).

Перейдем теперь к выводу формулы замены переменных. Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная в области $(\sigma)$. Разделим $(\sigma_1)$ на части: $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_n'$. Этим частям будет соответствовать, в силу (82), разбиение $(\sigma)$ на некоторые части $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Будем обозначать теми же буквами $\tau_k'$ и $\tau_k$ площади этих частей. По формуле (86) имеем:

$$\tau_k = \tau_k' \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)},$$

где $(u_k, v_k)$ — некоторая точка из $\tau_k'$. Ей соответствует некоторая точка $x_k = \varphi(u_k, v_k)$, $y_k = \psi(u_k, v_k)$, и мы можем написать:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\tau_k = \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(u_k, v_k), \psi(u_k, v_k)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_k, v_k)} \cdot \tau_k'.$$

Переходя к пределу, получим формулу замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du\,dv, \qquad (87)$$

которая совпадает с формулой (13) из [57].

Отметим одно следствие формулы (86). Положим, что область $(\sigma_1)$ беспредельно сжимается к точке $(u, v)$. При этом $(\sigma)$ будет беспредельно сжиматься к соответствующей точке $(x, y)$, и точка $(u_0, v_0)$, принадлежащая $(\sigma_1)$, будет стремиться к $(u, v)$. Переходя к пределу, получим из (86):

$$\left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| = \lim \frac{\sigma}{\sigma_1},$$

т. е. отношение площадей будет иметь своим пределом абсолютное значение функционального определителя в соответствующей точке, как мы об этом уже упоминали в [57]. Совершенно так же, если рассматривать функцию одной переменной $x = f(u)$, как точечное преобразование на прямой, при котором точка с абсциссой $u$ переходит в точку с абсциссой $x$, то абсолютное значение производной $|f'(u)|$ дает предел отношения соответствующих длин на упомянутой прямой, т. е., иными словами, дает коэффициент линейного искажения в данной точке с абсциссой $u$ при упомянутом точечном преобразовании.

Заметим, что при выводе формулы (85) нам приходится пользоваться второй производной $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}$ и ее независимостью от порядка дифференцирования. Таким образом, строго говоря, к сделанным

в начале настоящего номера предположениям надо добавить еще существование и непрерывность $\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$, откуда, как известно [I, 155], следует и ее независимость от порядка дифференцирования.

Если $(v)$ — область в пространстве, ограниченная поверхностью $(S)$, то, применяя формулу Остроградского [63], можем, полагая $P=Q=0$ и $R=z$, выразить объем $v$ этой области в виде интеграла по поверхности:

$$v=\int\limits_{(S)}\int z\cos(n,\ Z)\,dS.$$

Пользуясь этим выражением объема, можно доказать формулу замены переменных в тройном интеграле [60] приблизительно тем же путем, каким мы это сделали выше для двойного интеграла.

## § 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

**78. Интегрирование под знаком интеграла.** При вычислении кратных интегралов мы встретились с определенными интегралами, у которых подинтегральная функция и даже пределы интегрирования зависят от некоторого переменного параметра. Здесь мы остановимся несколько подробнее на таких интегралах.

Мы исследуем интеграл

$$I(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx,$$

в котором переменная интегрирования обозначена через $x$, подинтегральная же функция зависит не только от $x$, но и от параметра $y$, от которого зависят и пределы интегрирования $x_1$ и $x_2$. В этом случае очевидно и результат интегрирования $I(y)$ будет, вообще говоря, функцией от $y$. Формула (7) из [56]:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} I(y)\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,\ y)\,dy \qquad (1)$$

называется *формулой интегрирования определенного интеграла по параметру под знаком интеграла*. Она получает особенно простой вид, когда пределы $x_1$ и $x_2$ не зависят от $y$ и приводятся к постоянным числам $a$, $b$ [56]:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} I(y)\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy\int\limits_{a}^{b} f(x,\ y)\,dx=\int\limits_{a}^{b} dx\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\ y)\,dy. \qquad (2)$$

Во всех этих формулах подинтегральная функция $f(x, y)$ считается непрерывной функцией двух переменных в области интегрирования, а эта область считается конечной. В противном случае мы имеем дело с несобственным кратным интегралом. Такие интегралы мы будем рассматривать в дальнейшем.

Пример. Указанный выше прием применяется иногда для вычисления определенных интегралов от функций, для которых неопределенный интеграл неизвестен. Применим его для вычисления интеграла (интеграл Лапласа):

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \tag{3}$$

Пусть $(D')$ — четверть круга с центром в начале и радиусом $r$, лежащая в первом координатном углу, $(D'')$ — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$; $x = r$; $y = 0$; $y = r$ и, наконец, $(D''')$ — четверть круга с центром в начале и радиусом $r\sqrt{2}$ (черт. 71). Очевидно $(D')$ есть часть $(D'')$ и $(D'')$ — часть $(D''')$.

Черт. 71.

Возьмем двойной интеграл по этим областям от положительной функции $e^{-x^2-y^2}$. Имеем очевидные неравенства:

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint\limits_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint\limits_{(D''')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Вводя полярные координаты: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$, получим [56]:

$$\iint\limits_{(D')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=r} = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Заменяя $r$ на $r\sqrt{2}$, будем иметь:

$$\iint\limits_{(D''')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2r^2}\right).$$

Интегрирование по квадрату $(D'')$ даст:

$$\iint\limits_{(D'')} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^r e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^r e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

и написанное выше неравенство принимает вид:

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right) < \left(\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2r^2}\right).$$

При стремлении $r$ к бесконечности крайние члены неравенства стремятся к $\frac{\pi}{4}$, а следовательно, к тому же пределу должен стремиться и средний

член, откуда вытекает следующее значение для интеграла (3):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что [I, 96]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Если пользоваться несобственным интегралом по всему первому координатному углу, который мы обозначим через $(P)$, то результат получится непосредственно. Действительно:

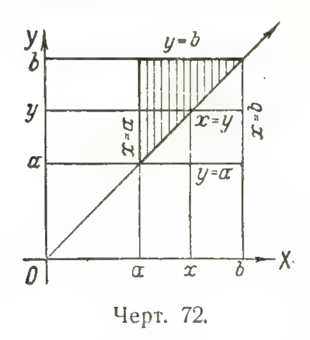
$$\iint_{(P)} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = I^2,$$

и вводя полярные координаты:

$$I^2 = \iint_{(P)} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = \frac{\pi}{4},$$

откуда $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, что и совпадает с полученным выше результатом.

**79. Формула Дирихле.** Задав в формуле (1) $x_1$ и $x_2$ как функции $y$ и промежуток $(\alpha, \beta)$ изменения $y$, мы тем самым определяем некоторую область $(\sigma)$ в плоскости $XY$. В приложениях часто встречается случай, когда эта область приводится к равнобедренному треугольнику, образованному тремя прямыми (черт. 72):



Черт. 72.

$$y = x; \quad x = a; \quad y = b.$$

Приводя двойной интеграл по площади этого треугольника к повторному и интегрируя в одном случае сначала по $x$, а потом по $y$, а в другом случае сначала по $y$ и потом по $x$, получим формулу:

$$\int_a^b dy\int_a^y f(x, y)\,dx = \int_a^b dx\int_x^b f(x, y)\,dy, \tag{6}$$

которая называется формулой Дирихле.

Пример. Задача Абеля. *Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущена без начальной скорости из любой точки кривой $M$ на высоте $h$* (черт. 73) *над самой низкой точкой кривой $O$, приходит в точку $O$ в течение времени $T$, которое есть данная функция от высоты $h$:*

$$T = \varphi(h).$$

Направим ось $OY$ вертикально вверх, ось $OX$ горизонтально, начало координат поместим в самую низкую точку искомой кривой, уравнение которой ищем в виде

$$x = f(y).$$

Положим:

$$ds = dy\sqrt{1+[f'(y)]^2} = u(y)\,dy; \qquad u(y) = \sqrt{1+[f'(y)]^2}. \tag{7}$$

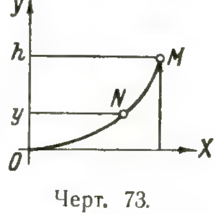
По закону живых сил приращение кинетической энергии при переходе точки из начального положения $M$ в $N$ будет равно работе силы тяжести, так как реакция кривой перпендикулярна перемещению точки и потому не дает работы, т. е.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-y); \qquad v = \frac{ds}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g(h-y)$$

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{-u(y)}{\sqrt{h-y}}\,dy,$$




Черт. 73.

причем мы берем знак (—), так как при увеличении $t$ высота $y$ точки убывает.

Время падения из точки $M$ в $O$ соответствует изменению $y$ от $h$ до 0, а потому

$$\varphi(h) = T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}. \tag{8}$$

Таким образом нам предстоит определить неизвестную функцию $u(y)$ из уравнения (8), которое называется *интегральным уравнением*, так как неизвестная функция $u(y)$ входит под знак интеграла.

Умножим обе части уравнения (8) на $\frac{1}{\sqrt{z-h}}$ и проинтегрируем по $h$ в пределах от 0 до $z$:

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)}{\sqrt{z-h}}\,dh = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Повторный интеграл, стоящий в правой части, можем преобразовать по формуле Дирихле следующим образом:

$$\int_0^z \frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^h \frac{(y)\,dy}{\sqrt{h-y}} = \int_0^z dy\int_y^z \frac{u(y)}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}\,dh =$$

$$= \int_0^z u(y)\,dy\int_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}. \tag{9}$$

Внутренний интеграл вычисляется без особого труда, если ввести новую переменную $t$ по формуле:

$$h = y + t(z-y).$$

Когда $h$ меняется от $y$ до $z$, переменная $t$ меняется от 0 до 1, и мы имеем:

$$z-h=(z-y)(1-t);\quad h-y=(z-y)t;\quad dh=(z-y)\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_y^z \frac{dh}{\sqrt{(z-h)(h-y)}}=\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=\arcsin(2t-1)\Big|_{t=0}^{t=1}=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

и окончательно получаем:

$$\frac{\pi}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^z u(y)\,dy=\int\limits_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}},$$

или

$$\int\limits_0^z u(y)\,dy=F(z),\tag{10}$$

где $F(z)$ есть известная функция от $z$, определяемая по формуле

$$F(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int\limits_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Дифференцируя соотношение (10) по $z$, находим:

$$u(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dz}\int\limits_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}},\tag{11}$$

что и дает решение задачи, так как, зная функцию $u(y)$, без труда найдем и $x=f(y)$ по формуле (7).

Мы проделаем это до конца для частного случая *таутохронной кривой*, для которой время падения в самую низкую точку вообще не зависит от высоты $h$, т. е.

$$\varphi(h)=\text{const}=c.$$

Мы имеем тогда:

$$F(z)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int\limits_0^z \frac{c\,dh}{\sqrt{z-h}}=\frac{c\sqrt{2g}}{\pi}2\sqrt{z},$$

$$u(z)=\frac{c\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{z}}.$$

Для определения $x=f(y)$ имеем теперь, в силу (7):

$$(dx)^2+(dy)^2=\frac{2gc^2}{\pi^2}\frac{(dy)^2}{y}=\frac{A}{y}(dy)^2\qquad\left(A=\frac{2gc^2}{\pi^2}\right).$$

Положим:

$$y = a(1 + \cos t); \quad dy = -a \sin t\, dt; \quad A = 2a.$$

Мы найдем:

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} \cdot (-a \sin t)\, dt = -2a \sin^2 \frac{t}{2}\, dt;$$

$$x = x_0 - a(t - \sin t),$$

где $x_0$ — постоянная интегрирования. Читатель легко покажет, что полученная кривая есть циклоида, но только расположенная не так, как циклоида [I, 79].

В дальнейшем мы покажем, как выполнить дифференцирование по $z$ в общей формуле (11).

Сделаем некоторые замечания по поводу полученного решения. Отметим, что мы получили решение (11) интегрального уравнения (8), предполагая, что такое решение существует. Строго говоря, мы должны еще проверить решение (11), т. е. подставить выражение (11) для $u(z)$ в уравнение (8), и показать совпадение левой и правой частей. Заметим еще, что двойной интеграл (9) является несобственным в том смысле, что его подинтегральная функция обращается в бесконечность. Из дальнейшего мы увидим, что он существует, и нетрудно показать, что формула (1), приводящая его к повторным интегралам, применима в данном случае.

**80. Дифференцирование под знаком интеграла.** Рассмотрим интеграл, зависящий от параметра $y$:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{12}$$

Пределы $a$ и $b$ будем считать пока независящими от $y$. Положим, что $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в прямоугольнике: $a \leqslant x \leqslant b$; $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. Покажем, что при этих предположениях существует производная $\frac{dI(y)}{dy}$, которую можно получить, *дифференцируя по $y$ под знаком интеграла*, т. е.

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{13}$$

Приращение $\Delta I(y)$ функции $I(y)$ определяется формулой:

$$\Delta I(y) = I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{14}$$

Применяя формулу конечных приращений, получим:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, y + \theta \Delta y)}{\partial y} \quad (0 < \theta < 1). \tag{15}$$

Принимая во внимание равномерную непрерывность функции $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в упомянутом выше прямоугольнике, можем написать

$$\frac{\partial f(x, y+\theta \Delta y)}{\partial y}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}+\eta(x, y, \Delta y) \tag{16}$$

и утверждать, что $\eta(x, y, \Delta y)$ равномерно по отношению к $x$ и $y$ стремится к нулю, когда $\Delta y \rightarrow 0$, т. е. при любом положительном $\varepsilon$ существует такое $\delta$, что $|\eta(x, y, \Delta y)|<\varepsilon$, если только $|\Delta y|<\delta$. Отсюда следует, между прочим, что

$$\left|\int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx\right| \leqslant \int_a^b \varepsilon\, dx=\varepsilon(b-a) \quad (|\Delta y|<\delta),$$

и ввиду произвольной малости $\varepsilon$ мы имеем:

$$\int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta y \rightarrow 0. \tag{17}$$

Вернемся к формуле (14). Пользуясь (15) и (16), можем написать, принимая во внимание, что $\Delta y$ не зависит от $x$:

$$\Delta I(y)=\Delta y \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx+\Delta y \int_a^b \eta(x, y, \Delta y)\, dx .$$

Деля на $\Delta y$ и переходя к пределу, получим, в силу (17):

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx,$$

т. е. формула (13) доказана. Заметим, что если предположить непрерывность только самой функции $f(x, y)$, то из формулы (14) и из того, что разность $[f(x, y+\Delta y)-f(x, y)]$ равномерно по отношению $x$ и $y$ стремится к нулю при $\Delta y \rightarrow 0$, вытекает уже, что $I(y)$ есть непрерывная функция от $y$.

Рассмотрим теперь при прежних предположениях относительно $f(x, y)$ интеграл

$$I_1(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx, \tag{18}$$

в котором и пределы интегрирования $x_1$ и $x_2$, принадлежащие промежутку $(a, b)$, зависят от $y$, причем мы предположим, что эти функции имеют производную по $y$, а тем самым и непрерывны.

Обозначим через $\Delta x_1$ и $\Delta x_2$ приращения, которые получают $x_1$ и $x_2$, когда $y$ получает приращение $\Delta y$.

Мы имеем:

$$\Delta I_1(y) = I_1(y+\Delta y) - I_1(y) = \int\limits_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx. \qquad (19)$$

Заметив, что [I, 94]:

$$\int\limits_{x_1+\Delta x_1}^{x_2+\Delta x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x_1},$$

мы можем переписать равенство (19) так:

$$\Delta I_1(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx + \int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x, y+\Delta y)\,dx. \qquad (20)$$

При этих вычислениях мы предполагаем, конечно, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет указанным выше условиям при $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и при всех значениях $x$, которые принадлежат промежуткам интегрирования в написанных интегралах.

По теореме о среднем [I, 95] можем написать:

$$\int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x, y+\Delta y)\,dx = \Delta x_1 f(x_1+\theta_1\Delta x_1, y+\Delta y) = \Delta x_1 [f(x_1, y)+\eta_1],$$

$$\int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f(x, y+\Delta y)\,dx = \Delta x_2 f(x_2+\theta_2\Delta x_2, y+\Delta y) = \Delta x_2 [f(x_2, y)+\eta_2]$$

$$(0 < \theta_1 \text{ и } \theta_2 < 1).$$

Если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x_1$, $\Delta x_2 \to 0$, и, в силу непрерывности $f(x, y)$ можем утверждать, что при этом $\eta_1$, $\eta_2 \to 0$.

Подставив эти выражения в формулу (20) и пользуясь формулами (15) и (16), получим, деля на $\Delta y$:

$$\frac{\Delta I_1(y)}{\Delta y} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx + [f(x_2, y)+\eta_2]\frac{\Delta x_2}{\Delta y} - [f(x_1, y)+\eta_1]\frac{\Delta x_1}{\Delta y} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \eta(x, y, \Delta y)\,dx.$$

Переходя к пределу, получим, в силу (17), следующую формулу для дифференцирования интеграла (18):

$$\frac{d}{dy}\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy + f(x_2, y)\frac{dx_2}{dy} - f(x_1, y)\frac{dx_1}{dy}. \quad (21)$$

Если $x_1$ и $x_2$ не зависят от $y$, то получается формула (13). Эта последняя формула справедлива и при дифференцировании кратного интеграла по параметру, если только область интегрирования $(B)$ не зависит от параметра. Если, например, в двукратном интеграле по области $(B)$ подинтегральная функция $f(M, t)$ зависит не только от переменной точки $M$, но и от параметра $t$, то

$$\frac{d}{dt}\iint_{(B)} f(M, t)\,d\sigma = \iint_{(B)}\frac{\partial f(M, t)}{\partial t}\,d\sigma. \quad (22)$$

При этом считается, что $f(M, t)$ и $\frac{\partial f(M, t)}{\partial t}$ суть непрерывные функции при изменении $M$ в области $(B)$, включая контур, и при изменении $t$ в некотором промежутке.

Заметим, что при доказательстве формул (13) и (22) существенно, что промежуток интегрирования конечен. В примерах мы будем применять формулу (13) и для бесконечного промежутка. В дальнейшем мы укажем условия законности такого применения.

Из предыдущих формул вытекает также, что если $f(x, y)$, $x_2(y)$ и $x_1(y)$ суть непрерывные функции, то и интеграл (18) есть непрерывная функция от $y$.

**81. Примеры. 1.** В [28] мы нашли частное решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = f(t),$$

удовлетворяющее условиям

$$y\Big|_{t=0} = \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \quad (23)$$

Оно имеет вид:

$$y = \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du.$$

Нетрудно проверить это непосредственным дифференцированием согласно правилу (21). Мы имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \int_0^t f(u)\cos k(t-u)\,du + \frac{1}{k}f(u)\sin k(t-u)\Big|_{u=t} = \int_0^t f(u)\cos k(t-u)\,du$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k\int_0^t f(u)\sin k(t-u)\,du + f(u)\cos k(t-u)\Big|_{u=t} = -k^2y + f(t),$$

т. е. действительно,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=f(t).$$

Равенства же (23) получаются непосредственно из предыдущих формул, если положить там $t=0$.

**2.** Пусть требуется вычислить интеграл [I, 110];

$$I_1=\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Введем параметр $\alpha$ и рассмотрим:

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx.$$

Непосредственно ясно, что

$$I(0)=0 \quad \text{и} \quad I(1)=I_1.$$

Формула (21), применительно к параметру $\alpha$, дает:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx+\frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

Разлагая рациональную дробь на простейшие, получим:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left[-\frac{\alpha}{1+\alpha x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha}{1+x^2}\right],$$

и, интегрируя по $x$:

$$\int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx=-\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Окончательно:

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}=\frac{\lg(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha+\int_0^\alpha \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha, \tag{24}$$

причем постоянного слагаемого мы не пишем, так как $I(0)=0$. Применяем ко второму слагаемому интегрирование по частям:

$$\int_0^\alpha \frac{\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha\, d\lg(1+\alpha^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\cdot\lg(1+\alpha^2)\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\alpha}-\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{\lg(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

и, следовательно, в силу (24):

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\alpha\cdot\lg(1+\alpha^2),$$

откуда при $\alpha=1$:

$$I_1=\int_0^1\frac{\lg(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\lg 2.$$

**3.** Вычислим интеграл

$$\int_0^\infty\frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

Вместо этого интеграла мы рассмотрим более сложный по внешнему виду

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\qquad(\alpha>0).\tag{25}$$

Дифференцируем по $\beta$:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)dx=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

Последний интеграл вычисляется без труда [**I, 201**]:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx=e^{-\alpha x}\frac{-\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда

$$I(\alpha,\beta)=\int\frac{\alpha\,d\beta}{\alpha^2+\beta^2}+C=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}+C.\tag{26}$$

Остается только определить постоянную интегрирования $C$, не зависящую от $\beta$. Для этого мы будем приближать $\beta$ к 0 в равенствах (25) и (26):

$$\lim_{\beta\to 0}I(\alpha,\beta)=I(\alpha,0)=0;\qquad I(\alpha,0)=\operatorname{arc\,tg}0+C=0,$$

откуда ясно, что $C=0$. Итак, мы имеем

$$I(\alpha,\beta)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Интеграл, который нам надо вычислить, получается из $I(\alpha,\beta)$ при $\alpha=0$, причем $\alpha$ надо приближать к нулю со стороны положительных чисел, т. е. $\alpha\to+0$. Если мы будем приближать $\alpha$ к 0 в предыдущем равенстве, то получим разные пределы, в зависимости от того, будут ли $\beta>0$ или $\beta<0$:

$$\lim_{\alpha\to+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } \beta>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{»} \quad \beta<0\\ 0 & \text{»} \quad \beta=0\end{cases}$$

и потому окончательно:[1])

$$I(\beta)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}\,dx=\begin{cases}\ \ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } \beta>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \ \ \text{»}\quad \beta<0\\ \ \ 0 & \ \ \text{»}\quad \beta=0.\end{cases}$$

Отметим, что интеграл, стоящий слева, дает нам разрывную функцию $I(\beta)$ от $\beta$. График этой разрывной функции, состоящий из двух полупрямых и точки, изображен на черт. 74.

4. Дифференцируя $k$ раз по $\alpha$ очевидное равенство

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\qquad (\alpha>0),$$

получим:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}x^k\,dx=\frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Черт. 74.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_n=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^n\,dx\qquad (\alpha>0).$$

Если $n$ есть число нечетное: $n=2k+1$, то $I_n$ вычисляется подстановкой $x^2=t$:

$$I_{2k+1}=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}x^{2k}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}t^k\,dt=\frac{1}{2}\frac{k!}{\alpha^{k+1}}.$$

Для рассмотрения случая четного $n$, введем в формуле (4) новую переменную интегрирования $x=\sqrt{\alpha t}$. Заменяя в полученном результате $t$ опять на $x$, будем иметь формулу:

$$I_0=\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

---

[1]) Предыдущие рассуждения не строги, так как предполагают равенства: $\lim\limits_{\beta\to 0} I(\alpha,\beta)=I(\alpha,0)$; $\lim\limits_{\alpha\to +0} I(\alpha,\beta)=I(0,\beta)$, которые могут считаться очевидными, если известно, что $I(\alpha,\beta)$ есть непрерывная функция как от $\beta$, так и от $\alpha$. Заметим, кроме того, что если бы мы не ввели под знаком интеграла множитель $e^{-\alpha x}$, то получили бы после дифференцирования по $\beta$ интеграл $\int\limits_0^\infty \cos\beta x\,dx$, не имеющий смысла. Строгое доказательство непрерывности $I(\alpha,\beta)$ будет дано в [85].

Дифференцируя ее $k$ раз по $\alpha$, находим:

$$\frac{d^k I_0}{d\alpha^k} = (-1)^k \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2k}\, dx,$$

откуда

$$I_{2k} = (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k\cdot\alpha^{k+\frac{1}{2}}}.$$

**5.** В интеграле

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx \qquad (\alpha > 0),$$

зависящем от двух параметров $\alpha$ и $\beta$, будем рассматривать $\alpha$ постоянным. Дифференцируем по $\beta$:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\cdot x\, dx = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty \sin\beta x\, de^{-\alpha x^2}.$$

Интегрируем по частям:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\,\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx = -\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx,$$

т. е.

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta).$$

В этом дифференциальном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dI(\beta)}{I(\beta)} = -\frac{\beta}{2\alpha}\,d\beta,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$I(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \tag{27}$$

где постоянная $C$ уже не зависит от $\beta$. Подставляя $\beta = 0$, будем иметь:

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

С другой стороны, в силу (27):

$$I(0) = C,$$

следовательно, $C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ и окончательно, подставляя это выражение $C$ в (27):

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Заменяя $\alpha$ на $\alpha^2$, получим результат, которым мы затем воспользуемся при исследовании уравнения распространения тепла:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

**82. Несобственные интегралы.** Мы неоднократно встречали интегралы, у которых либо подинтегральная функция, либо пределы интегрирования обращаются в бесконечность. В [I; **97**, **98**] мы условились приписывать таким интегралам определенный смысл, если выполнены некоторые условия. Теперь мы остановимся на этих интегралах подробнее.

1. Подинтегральная функция обращается в бесконечность. Пусть в интеграле

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad (b > a)$$

функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$, но обращается в бесконечность при $x = b$, или, точнее говоря, пусть $f(x)$ становится неограниченной при стремлении $x$ к $b$ от меньших значений. Мы принимаем тогда по определению [I, **97**]

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx,$$

если только предел, написанный в правой части равенства, существует. Выясним условия его существования. Согласно основному признаку Коши [I, **31**], необходимым и достаточным условием существования предела переменной является то, чтобы разность каких-либо двух значений этой переменной, начиная с некоторого момента ее изменения, была по абсолютному значению меньше любого наперед заданного положительного числа. В рассматриваемом случае эта разность будет:

$$\int_a^{b-\varepsilon''} f(x)\, dx - \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx = \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\, dx \qquad (\varepsilon'' < \varepsilon'),$$

и мы получим таким образом следующее общее условие: *для существования (сходимости) несобственного интеграла*

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

*у которого подинтегральная функция $f(x)$ обращается в бесконечность при $x = b - 0$, необходимо и достаточно, чтобы при заданном сколь угодно малом положительном числе $\delta$ существовало такое $\eta$, чтобы было:*

$$\left| \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx \right| < \delta \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon' \text{ и } \varepsilon'' < \eta.$$

Принимая во внимание известное неравенство [**I, 95**]

$$\left| \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} |f(x)|\,dx,$$

непосредственно заключаем, что из сходимости интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \tag{28}$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{29}$$

Обратное заключение — неправильно, т. е. из сходимости интеграла (29) не вытекает сходимость интеграла (28). Если интеграл (28) сходится, то интеграл (29) называется *абсолютно сходящимся* [ср. **I, 124**].

Из общего признака вытекает весьма важный для приложений признак Коши: *если подинтегральная функция $f(x)$, непрерывная при $a \leqslant x < b$, удовлетворяет при $x$, близких к $b$, условию*

$$|f(x)| < \frac{A}{(b-x)^p}, \tag{30}$$

*где $A$ и $p$ — положительные постоянные, причем $p < 1$, то несобственный интеграл* (29) *сходится и притом абсолютно.*

*Если же*

$$|f(x)| > \frac{A}{(b-x)^p} \quad \text{и} \quad p \geqslant 1, \tag{31}$$

*то интеграл* (29) *не существует.*

В самом деле, мы имеем в случае (30):

$$\left| \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} |f(x)|dx < A \int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon''} \frac{dx}{(b-x)^p} = A\,\frac{\varepsilon'^{1-p} - \varepsilon''^{1-p}}{1-p},$$

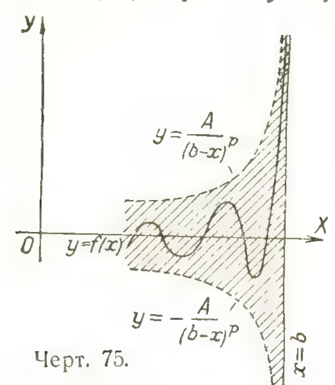
причем правая часть будет сколь угодно малой при достаточно малых $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$, так как показатель $(1-p)$ положителен $(p<1)$.

В случае же (31) мы можем прежде всего быть уверены в том, что в соседстве с точкой $x=b$ непрерывная функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак, так как, в силу (31), абсолютное значение $f(x)$ остается больше положительного числа, и, следовательно, $f(x)$ в нуль не обращается, а потому и не может переменить знака. Ограничиваясь случаем положительной функции $f(x)$, имеем:

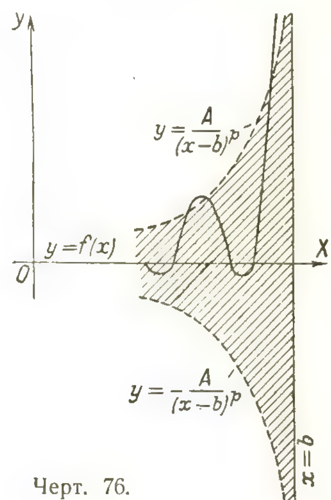
$$\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x)\,dx > A\int_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''}\frac{dx}{(b-x)^p}=\begin{cases} A\lg\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \text{ при } p=1 \\ A\frac{\varepsilon'^{1-p}-\varepsilon''^{1-p}}{1-p}, \end{cases}$$

причем правая часть может быть сделана сколь угодно большой при сколь угодно малых $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$, ибо по условию $1-p<0$.

Геометрически признак Коши совершенно нагляден, так как в случае (30) кривая $y=f(x)$



Черт. 75.



Черт. 76.

при $x$, близких к $b$, находится целиком внутри области, заключенной между двумя симметричными кривыми

$$y=\pm\frac{A}{(b-x)^p} \tag{32}$$

(черт. 75), которые при $p<1$ имеют конечную площадь, а потому и $f(x)$ имеет таковую. В случае же (31) кривая $y=f(x)$ в соседстве с точкой $x=b$ выйдет из указанной области, и так как кривые (32) при $p\geqslant 1$ не имеют конечной площади, то и кривая $y=f(x)$ также не будет ее иметь (черт. 76).

Совершенно аналогично можно рассмотреть те случаи, когда $f(x)$ обращается в бесконечность при нижнем пределе $x=a$ или в некоторой средней точке $x=c$ промежутка интегрирования [I, 97].

2. Бесконечные пределы интегрирования. Мы рассмотрим теперь случай $b=+\infty$, т. е. несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

в предположении, что $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$. Применяя признак Коши, как и в предыдущем случае, получим: *для существования (сходимости) несобственного интеграла*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{33}$$

*необходимо и достаточно, чтобы при заданном сколь угодно малом положительном числе* $\delta$ *существовало такое положительное число* $N$, *чтобы было*

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \delta \quad \text{при } b' \text{ и } b'' > N.$$

В частности, совершенно так же, как и в случае 1, докажем признак Коши: *если подинтегральная функция* $f(x)$ *непрерывна при* $x \geqslant a$ и

$$|f(x)| < \frac{A}{x^p} \quad \text{и} \quad p > 1, \tag{34}$$

*то несобственный интеграл* (33) *абсолютно сходящийся.*

*Если же*

$$|f(x)| > \frac{A}{x^p} \quad \text{и} \quad p \leqslant 1, \tag{35}$$

*то интеграл* (33) *не существует.*

Совершенно аналогичным путем можно рассмотреть несобственные интегралы [**I**, **98**]:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Укажем практически удобный способ применения признака Коши. Остановимся сначала на интеграле вида (33). Условие его сходимости (34) сводится к тому, что существует такое $p>1$, что произведение $f(x)\,x^p$ при $x\to+\infty$ остается ограниченным. Это условие наверно выполнено, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,x^p.$$

Точно так же условие расходимости (35) имеет место, если существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)\, x^p \qquad (p \leqslant 1),$$

отличный от нуля (конечный или бесконечный). Так, например, интеграл из примера **5** [**81**] будет абсолютно сходящимся, так как произведение $e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \cdot x^p$ при любом положительном $p$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Действительно, множитель $\cos \beta x$ не превышает единицы по абсолютной величине, а произведение $e^{-\alpha x^2} x^p \to 0$, как в этом нетрудно убедиться по правилу Лопиталя, положив, например, $p = 2$ [**I, 65**].

Интеграл вида

$$\int_0^\infty \frac{5x^2 + 1}{x^3 + 4}\, dx$$

будет расходящимся, так как

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + 1}{x^3 + 4}\, x = 5 \qquad (p = 1).$$

Вообще интеграл от рациональной дроби с одним или двумя бесконечными пределами будет сходиться только в том случае, если степень знаменателя по крайней мере на две единицы выше степени числителя. Кроме того, для сходимости такого интеграла необходимо, чтобы после возможных сокращений дроби знаменатель не обращался в нуль в промежутке интегрирования. Если этот промежуток $(-\infty, +\infty)$, то знаменатель не должен иметь вещественных корней.

Совершенно аналогично можно применять условия (30) и (31) сходимости и расходимости интеграла в случае обращения подинтегральной функции в бесконечность. Так, например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^m}\, dx$$

сходится при $m < 2$, ибо произведение $\frac{\sin x}{x^m} x^{m-1} = \frac{\sin x}{x}$ стремится к единице при $x \to +0$, и $p = m - 1 < 1$. Наоборот, предыдущий интеграл расходится при $m \geqslant 2$.

**83. Неабсолютно-сходящиеся интегралы.** Признак Коши дает лишь достаточное условие (30) или (34) сходимости несобственного интеграла. Например, он неприменим для неабсолютно-сходящихся интегралов, т. е. таких, что

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{или} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится, а интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{или} \quad \int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$$

не сходится. Приведем признак сходимости, применимый и для неабсолютно-сходящихся интегралов: *если интеграл*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (a>0)$$

*при беспредельном возрастании $x$ остается ограниченным, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^p}\,dx$$

*будет сходящимся при любом $p>0$.* Действительно, интегрируя по частям, получим:

$$\int_a^N \frac{f(x)}{x^p}\,dx=\int_a^N\frac{1}{x^p}\,dF(x)=\frac{F(x)}{x^p}\Big|_{x=a}^{x=N}+p\int_a^N\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx$$

или, принимая во внимание, что $F(a)=0$:

$$\int_a^N \frac{f(x)}{x^p}\,dx=\frac{F(N)}{N^p}+p\int_a^N\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx.$$

При беспредельном возрастании $N$ первое слагаемое правой части стремится к нулю, ибо $F(N)$ по условию остается ограниченным и $p>0$. Второе слагаемое представляется интегралом, сходящимся по признаку Коши, так как под интегралом числитель $F(x)$ по условию остается ограниченным при $x\to+\infty$, а в знаменателе степень $x$ выше единицы. Таким образом существует предел

$$\int_a^{\infty}\frac{f(x)}{x^p}\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^N\frac{f(x)}{x^p}\,dx=p\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{1+p}}\,dx.$$

Примеры. 1. Возьмем интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx, \tag{36}$$

рассмотренный нами в примере 3 [81]. Заметим, что при $x=0$ подинтегральная функция принимает конечное значение $\beta$, так что несобственный характер этого интеграла происходит только от бесконечного предела. Далее очевидно

$$\int_a^N \sin\beta x\,dx=\left[-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right]_{x=a}^{x=N},$$

откуда

$$\left| \int_a^N \sin \beta x \, dx \right| \leqslant \frac{2}{\beta} \qquad (\beta > 0),$$

т. е. интеграл $\int_a^N \sin \beta x \, dx$ при любых $a$ и $N$ остается ограниченным. Следовательно, к интегралу (36) применима доказанная теорема, и он сходится.

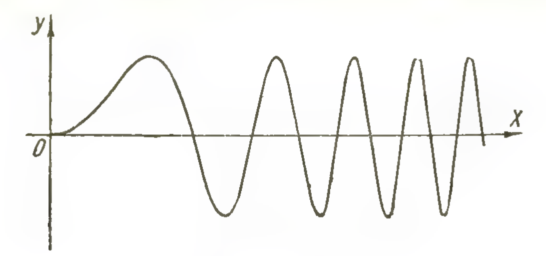
**2.** Рассмотрим еще интеграл

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx. \tag{37}$$

Совершая замену переменных $x = \sqrt{t}$, приведем его к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

и совершенно так же, как и в примере 1, докажем, что он сходится. Выясним несколько подробнее причины, обуславливающие сходимость интеграла (37). Подинтегральная функция $f(x) = \sin(x^2)$, график которой изображен




Черт. 77.

на черт. 77, даже не стремится к нулю при $x \to +\infty$, признак Коши, очевидно, не применим. Разобьем промежуток $(0, +\infty)$ на части:

$$(0, \sqrt{\pi}); \quad (\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}); \quad (\sqrt{2\pi}, \sqrt{3\pi}); \quad \ldots; \quad (\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}); \quad \ldots,$$

в каждой из которых функция $y = \sin(x^2)$ сохраняет неизменный знак: в первой (+), во второй (—), в третьей (+) и т. д. Положим

$$u_n = (-1)^n \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx.$$

Вводя вместо $x$ новую переменную $t$

$$x = \sqrt{t + n\pi},$$

получим:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t+n\pi}}\, dt,$$

откуда видно, что числа $u_n$ положительны и убывают при возрастании целого положительного числа $n$. Кроме того, из неравенства

$$u_n < \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

следует, что $u_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Из всего сказанного вытекает, что знакопеременный ряд

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots \tag{38}$$

будет сходящимся [**I, 123**].

Положим теперь, что

$$\sqrt{m\pi} \leqslant b \leqslant \sqrt{(m+1)\pi}, \tag{39}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^b \sin(x^2)\, dx = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, dx + \int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\, dx + \ldots + \int\limits_{\sqrt{(m-1)\pi}}^{\sqrt{m\pi}} \sin(x^2)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{m\pi}}^{b} \sin(x^2)\, dx = u_0 - u_1 + \ldots + (-1)^{m-1} u_{m-1} + \theta(-1)^m u_m, \tag{40}$$

где $0 \leqslant \theta < 1$, так как последний промежуток $(\sqrt{m\pi}, b)$ составляет лишь часть промежутка $(\sqrt{m\pi}, \sqrt{(m+1)\pi})$ или даже отсутствует при $b = \sqrt{m\pi}$. При $b \to \infty$ и целое число $m$, определяемое неравенством (39), стремится к $(+\infty)$, и из сходимости ряда (38) и равенства (40) вытекает существование несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^b \sin(x^2)\, dx = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$$

В настоящем случае существование несобственного интеграла обуславливается знакопеременностью подинтегральной функции, а также тем, что последовательные площади, находящиеся над и под осью $OX$, по мере удаления от начала по величине убывают и стремятся к нулю, причем последнее обстоятельство происходит не от того, что их высота стремится к нулю, но от беспредельного суживания этих площадей.

Совершенно так же можно рассмотреть и интеграл (36).

В томе III мы получим следующее значение для интеграла (37):

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Написанные интегралы называются интегралами Френеля или интегралами диффракции. Последнее название связано с тою ролью, которую играют эти интегралы в оптике.

**84. Равномерно-сходящиеся интегралы.**[1]) Если подинтегральная функция несобственного интеграла зависит от параметра $y$, то числа $\eta$ и $N$, о которых говорилось в общих признаках 1 и 2 из [82], вообще говоря, зависят от $y$. *Если при изменении $y$ в промежутке $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ числа $\eta$ и $N$ в условиях*

$$\left|\int\limits_{b-\varepsilon'}^{b-\varepsilon''} f(x, y)\,dx\right| < \delta \quad \text{при} \quad 0 < \varepsilon' \text{ и } \varepsilon'' < \eta \tag{41}$$

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \delta \quad \text{при} \quad b' \text{ и } b'' > N \tag{42}$$

*можно выбрать независимо от значений $y$, то несобственные интегралы*

$$\int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{43}$$

*называются равномерно-сходящимися относительно $y$.*

*В частности, интегралы, которые встречаются при применении признаков Коши, будут равномерно-сходящимися, если постоянные $A$ и $p$ не зависят от $y$.*

Всякий сходящийся несобственный интеграл мы можем представить в виде сходящегося ряда, каждый член которого есть уже обычный интеграл. Этим приемом мы уже пользовались в предыдущем. Обратимся к первому из интегралов (43). Задав ряд положительных, убывающих и стремящихся к нулю чисел

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \tag{44}$$

можем написать:

$$\int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{b-\varepsilon_1} f(x, y)\,dx + \int\limits_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} + \int\limits_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_3} + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}} + \ldots = u_0(y) + u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_n(y) + \ldots, \tag{45}$$

---

[1]) Перед чтением настоящего параграфа полезно вспомнить теорию равномерно-сходящихся рядов из тома I.

где

$$u_n(y) = \int\limits_{b-\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_{n+1}} f(x, y)\,dx. \tag{46}$$

В случае второго из интегралов (43), задав ряд беспредельно возрастающих чисел

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n, \ldots \tag{47}$$

будем иметь:

$$\int\limits_{a_n}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b_1} f(x, y)\,dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} + \int\limits_{b_2}^{b_3} + \ldots + \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} + \ldots =$$

$$= u_0(y) + u_1(y) + u_2(y) + \ldots + u_n(y) + \ldots \tag{48}$$

Из определения равномерной сходимости интеграла и ряда [I, 143] непосредственно вытекает, что если несобственный интеграл сходится равномерно, то и соответствующий ему ряд будет равномерно-сходящимся при любом выборе чисел (44) или (47). Действительно, например сумма далеких членов ряда (45) равна интегралу по отрезку, близкому к $b$, для которого соблюдено неравенство (41).

Свойства равномерно-сходящихся интегралов аналогичны свойствам равномерно-сходящихся рядов [I, 146]. Для определенности формулируем их для второго из интегралов (43), но сказанное применимо и для первого.

1) *Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x$ и при изменении $y$ в некотором конечном промежутке $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, и интеграл*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx \tag{49}$$

*равномерно сходится, то он есть непрерывная функция от $y$ при $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.*

2) *При тех же условиях имеет место и формула интегрирования под знаком интеграла:*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{a}^{\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x, y)\,dy. \tag{50}$$

3) *Если при непрерывности $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ интеграл (49) сходится, а интеграл*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \tag{51}$$

*сходится равномерно, то имеет место формула дифференцирования под знаком интеграла*:

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{52}$$

Докажем для примера свойства 1) и 3). Члены ряда (48):

$$u_n(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, y)\,dx, \tag{53}$$

по доказанному в [80], суть непрерывные функции, и, в силу равномерной сходимости интеграла, этот ряд сходится равномерно, и, следовательно, сумма ряда, т. е. интеграл (49), тоже есть непрерывная функция [I, 146].

Для доказательства 3) заметим, что из [80] следует, что интегралы (53) можно дифференцировать под знаком интеграла, т. е.

$$u_n'(y) = \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx.$$

Но, в силу равномерной сходимости интеграла (51), мы имеем равномерно-сходящийся ряд:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(y). \tag{54}$$

Итак, ряд (48) сходится, а ряд из производных сходится равномерно. Отсюда следует [I, 146], что сумма ряда (54) есть производная от суммы ряда (48), что и приводит к формуле (52).

Укажем простой признак абсолютной и равномерной сходимости несобственного интеграла, аналогичный признаку абсолютной и равномерной сходимости ряда [I, 147]. Сделаем это для второго из интегралов (43). Аналогичный признак имеет место и для первого интеграла.

Пусть, как всегда, $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x$ и $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$. *Если существует такая непрерывная при $a \leqslant x$ и положительная функция $\varphi(x)$, что $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ при $a \leqslant x$ и $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \tag{55}$$

*сходится, то интеграл* (49) *сходится абсолютно и равномерно* (*относительно* $y$). В силу сходимости (55) при любом заданном $\delta > 0$ существует $N$ такое, что

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x)\,dx < \delta \quad \text{при} \quad b' \text{ и } b'' > N,$$

причем это $N$ не зависит от $y$, так как $\varphi(x)$ не содержит $y$. Но из $|f(x, y)| \leqslant \varphi(y)$ вытекает:

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int_{b'}^{b''} \varphi(x)\,dx < \delta \text{ при } b' \text{ и } b'' > N,$$

т. е. то же самое $N$, не зависящее от $y$, годится и для интеграла (49) и даже для интеграла

$$\int_{a}^{+\infty} |f(x, y)|\,dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

**85. Примеры. 1.** Рассмотрим более подробно пример 3 из [**81**]:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx. \tag{56}$$

Считаем пока, что $\alpha$—фиксированное положительное число, и рассматриваем интеграл (56) как интеграл, зависящий от параметра $\beta$. Заметим, что отношение $\frac{\sin \beta x}{x}$ сохраняет непрерывность и при $x = 0$ и обращается при $x = 0$ в $\beta$, так что интеграл (56) является несобственным только вследствие бесконечного предела. При положительных $x > 1$ мы имеем $\left|\frac{\sin \beta x}{x}\right| < 1$ и следовательно

$$\left|e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\right| < e^{-\alpha x},$$

а интеграл

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha}$$

сходится, и, следовательно, по доказанному признаку, интеграл (56) сходится равномерно относительно $\beta$. Дифференцируя его по $\beta$ под знаком интеграла, получим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x\,dx,$$

который, в силу $|e^{-\alpha x}\cos\beta x| < e^{-\alpha x}$, также сходится равномерно. Отсюда вытекает, что интеграл (56) есть непрерывная функция от $\beta$ и что его можно дифференцировать под знаком интеграла. Для оправдания всех вычислений упомянутого примера остается еще доказать, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta)$, т. е. что интеграл (56) при фиксированном $\beta$ есть непрерывная функция от $\alpha$ справа от нуля. Мы докажем, что он есть непрерывная функция от $\alpha$ при $\alpha \geqslant 0$. Выше мы уже показали, что он сходится и при $\alpha = 0$.

Не ограничивая общности, можем считать $\beta > 0$, так как случай $\beta < 0$ приводится к случаю $\beta > 0$ простой переменой знака интеграла, в случае же $\beta = 0$ утверждение очевидно.

Будем поступать аналогично тому, как это мы делали в [83] с интегралом Френеля. Разобьем весь промежуток $(0, +\infty)$ на части:

$$\left(0, \frac{\pi}{\beta}\right),\ \left(\frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}\right), \ldots, \left(\frac{n\pi}{\beta}, \frac{(n+1)\pi}{\beta}\right), \ldots$$

такие, что в первой части подинтегральная функция

$$f(x) = e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x} \qquad (\alpha \geqslant 0 \text{ и } \beta > 0)$$

имеет знак $(+)$, во второй — знак $(-)$ и т. д. Положим

$$u_n(\alpha) = (-1)^n \int\limits_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx.$$

Вводя вместо $x$ новую переменную $t = x - \frac{n\pi}{\beta}$, получим:

$$u_n(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\alpha t - \frac{n\alpha\pi}{\beta}} \frac{\sin\beta t}{t + \frac{n\pi}{\beta}}\,dt,$$

откуда видно, что $u_n(\alpha)$ — положительные и убывают при возрастании $n$.

Кроме того, из неравенства:

$$|u_n(\alpha)| < \int\limits_0^{\frac{\pi}{\beta}} \frac{1}{\frac{n\pi}{\beta}}\,dt = \frac{1}{n} \tag{57}$$

следует, что $u_n(\alpha) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Итак, мы можем представить при $\alpha \geqslant 0$ наш интеграл в виде суммы знакопеременного ряда:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = u_0(\alpha) - u_1(\alpha) + u_2(\alpha) - \ldots + (-1)^n u_n(\alpha) + \ldots \tag{58}$$

Остаточный член этого ряда, в силу (57) и теоремы [**I, 123**], имеет оценку

$$|r_n(\alpha)| < |u_{n+1}(\alpha)| < \frac{1}{n+1},$$

не зависящую от $\alpha$, причем $\frac{1}{n+1} \to 0$ при $n \to +\infty$. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда при $\alpha \geqslant 0$ и, следовательно [**I, 146**], непрерывность его суммы, поскольку члены ряда $u_n(\alpha)$, в силу [**80**], суть, непрерывные функции.

Заметим, что из одной равномерной сходимости ряда (58) при $\alpha \geqslant 0$ без дополнительных рассуждений еще не следует равномерной сходимости интеграла. В данном случае можно доказать, что и интеграл равномерно сходится при $\alpha \geqslant 0$.

Заметим, что интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

равный $\frac{\pi}{2}$ при $\beta > 0$, $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ при $\beta < 0$ и нулю при $\beta = 0$, дает функцию от $\beta$, имеющую разрыв непрерывности при $\beta = 0$. Отсюда вытекает, что написанный интеграл не может сходиться равномерно относительно $\beta$ в промежутке изменения $\beta$, содержащем $\beta = 0$. Если мы возьмем этот промежуток правее нуля, то величина интеграла $\frac{\pi}{2}$ имеет производную по $\beta$, равную нулю, но интеграл нельзя дифференцировать по $\beta$ под знаком интеграла, так как после такого дифференцирования получается интеграл по промежутку $(0, \infty)$ от $\cos \beta x$, не имеющий смысла.

**2.** В примере 4 из [**81**] мы дифференцировали $k$ раз по $\alpha$ интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

под знаком интеграла. Для доказательства законности этой операции достаточно показать, что при целом положительном $k$ интегралы

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^k dx$$

сходятся равномерно во всяком промежутке $c \leqslant \alpha \leqslant d$, где $c > 0$. Так как в промежутке интегрирования $x \geqslant 0$, то очевидно $e^{-\alpha x} \leqslant e^{-cx}$ и $e^{-\alpha x} x^k \leqslant e^{-cx} x^k$, и в силу доказанного в [**84**] признака равномерной сходимости нам достаточно доказать сходимость интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-cx} x^k dx.$$

Но если обозначить $f(x) = e^{-cx} x^k$, то, применяя обычным образом правило Лопиталя [**I, 65**], убедимся, что $f(x) x^2 = e^{-cx} x^{k+2} \to 0$ при $x \to +\infty$, и по признаку, указанному в [**82**], видим, что написанный интеграл действительно сходится.

**3.** В [79] мы получили решение задачи Абеля в виде

$$u(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Покажем, как можно вычислить производную в правой части этого равенства. Обозначим:

$$I(z) = \int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Дифференцируя по $z$ под знаком интеграла, мы получили бы под знаком интеграла $(z-h)^{-\frac{3}{2}}$, что дало бы расходящийся интеграл [82], а потому надо поступать иначе. Преобразуем интеграл $I(z)$ интегрированием по частям, предполагая существование непрерывной и ограниченной в окрестности $h=0$ производной $\varphi'(h)$ при $h>0$:

$$\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = -2\int_0^z \varphi(h)\,d\sqrt{z-h} = -2\varphi(h)\sqrt{z-h}\,\Big|_{h=+0}^{h=z} +$$

$$+2\int_0^z \varphi'(h)\sqrt{z-h}\,dh = 2\varphi(+0)\sqrt{z} + 2\int_0^z \varphi'(h)\sqrt{z-h}\,dh.$$

Напомним, что $\varphi(+0) = \lim\limits_{h\to+0} \varphi(h)$. Это будет постоянная, которая будет, вообще говоря, отличной от нуля, тогда как по самому своему определению $\varphi(0)=0$. Дифференцируя написанную выше формулу, мы найдем, в силу (21), из [80]:

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\varphi(+0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{\varphi'(h)}{\sqrt{z-h}}\,dh. \tag{59}$$

Если $\varphi(h)$ есть постоянная, то $\varphi'(h)=0$, и мы имеем полученную уже ранее формулу. Если $\varphi(+0)=0$, то оказывается:

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = \int_0^z \frac{\varphi'(h)\,du}{\sqrt{z-h}}. \tag{59$_1$}$$

Мы не привели доказательства того, что для несобственного интеграла $I(z)$ применима формула (21) из [80]. Заметим, что если вместо $h$ ввести новую переменную интегрирования $u$ по формуле: $h=zu$, то для $I(z)$ получим интеграл с постоянными пределами:

$$I(z) = \sqrt{z}\int_0^1 \frac{\varphi(zu)\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

Предполагая, как и выше, существование непрерывной и ограниченной производной $\varphi'(h)$ при $h > 0$, можем, как нетрудно проверить, дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{dI(z)}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^1 \frac{\varphi'(zu)\,du}{\sqrt{1-u}} + \sqrt{z} \int_0^1 \frac{\varphi'(zu)\,u\,du}{\sqrt{1-u}}.$$

Производя в первом слагаемом интегрирование по частям и возвращаясь к прежней переменной $h$, получим опять формулу (59).

**86. Несобственные кратные интегралы.** Переходим теперь к рассмотрению несобственных кратных интегралов и начнем с двойных интегралов. Как и выше, несобственные интегралы могут быть двух типов: или подинтегральная функция становится неограниченной, или сама область интегрирования неограничена. Остановимся сначала на первом случае. Пусть $f(M)$ — непрерывна в конечной области $(\sigma)$ за исключением точки $C$, в окрестности которой $f(M)$ становится неограниченной. Исключим точку $C$ некоторой малой областью $(\Delta)$. В оставшейся области $(\sigma - \Delta)$ функция $f(M)$ непрерывна без исключения, и имеет смысл интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma.$$

Если при беспредельном сужении $\Delta$ к точке $C$ этот интеграл стремится к определенному пределу, не зависящему от того, каким именно образом $\Delta$ сужается к $C$, то этот предел и называют несобственным интегралом от функции $f(M)$ по области $(\sigma)$:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(M)\,d\sigma = \lim \iint\limits_{(\sigma-\Delta)} f(M)\,d\sigma. \tag{60}$$

Положим сначала, что $f(M)$ положительна, или, точнее говоря, неотрицательна в окрестности точки $C$. Положим, что $(\Delta')$ и $(\Delta'')$ — две малые области такие, что $(\Delta'')$ находится внутри $(\Delta')$. При этом интеграл по $(\sigma - \Delta'')$ отличается от интеграла по $(\sigma - \Delta')$ на положительную величину, равную интегралу по области $(\Delta' - \Delta'')$, в которой $f(M) \geqslant 0$. Отсюда непосредственно видно, что при беспредельном сжимании $(\Delta)$ к $C$ интеграл (60) увеличивается (если последующая область $(\Delta)$ часть предыдущей) и, следовательно, или стремится к пределу, или беспредельно увеличивается. Если при некотором определенном законе сужения $(\Delta)$ к $C$ имеется конечный предел, то и при любом другом законе сужения будет иметься тот же предел. Для этого случая существования предела характерным является тот факт, что интеграл по любой области, не содержащей $C$, но находящейся в окрестности точки $C$, где $f(M)$ положительна, останется меньше определенного положительного числа

(при этом интеграл будет стремиться к нулю, если окрестность стягивается к $C$). Если $f(M) \leqslant 0$ в окрестности $C$, то, вынося минус за знак интеграла, придем к предыдущему случаю. Положим теперь, что $f(M)$ в любой малой окрестности $C$ бывает разных знаков. В этом случае мы будем рассматривать только абсолютно-сходящиеся интегралы, т. е. такие интегралы, что

$$\iint_{(\sigma)} |f(M)|\, d\sigma \tag{61}$$

имеет смысл, т. е. сходится. В нем подинтегральная функция уже неотрицательна, и к нему применимы предыдущие замечания. В частности, из этих замечаний следует, что если $f_1(M)$ и $f_2(M)$ — две положительные функции, $f_1(M) \leqslant f_2(M)$, и интеграл от $f_2(M)$ сходится, то интеграл от $f_1(M)$ и подавно сходится. Нашу функцию $f(M)$ можно представить в виде разности двух положительных функций: $f(M) = |f(M)| - [|f(M)| - f(M)]$. Интеграл (61) по условию сходится. Тем самым сходится интеграл от функций $2|f(M)|$. Функция $[|f(M)| - f(M)]$ равна $2|f(M)|$ в тех точках, где $f(M) \leqslant 0$, и равна нулю, где $f(M) > 0$, т. е. положительная функция $|f(M)| - f(M) \leqslant 2|f(M)|$, и, следовательно, интеграл от нее тоже сходится. Но тогда сходится и интеграл от разности $|f(M)| - [|f(M)| - f(M)]$, т. е. от $f(M)$. Итак, *если интеграл* (61) *сходится, то сходится и интеграл от* $f(M)$.

Укажем одно достаточное условие сходимости интеграла (61): *если в окрестности точки $C$ функция удовлетворяет условию* $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, *где $r$ — расстояние от $C$ до переменной точки $M$, $A$ и $p$ — постоянные и $p < 2$, то интеграл* (61) *сходится*. Согласно сказанному выше, нам достаточно показать, что интеграл (61) по любой области $(\sigma')$, не содержащей $C$ и заключающейся в круге с центром $C$ и некоторым радиусом $r_0$, остается ограниченным. Вводя полярные координаты с началом в $C$ и принимая во внимание написанное выше неравенство для $|f(M)|$, получим:

$$\iint_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \iint_{(\sigma')} \frac{1}{r^p} r\, dr\, d\varphi = A \iint_{(\sigma')} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr\, d\varphi.$$

Область $(\sigma')$ обязательно содержится в некотором круговом кольце, ограниченном окружностями $r = \eta$ и $r = r_0$, причем $\eta$ может быть сколь угодно малой. Подинтегральная функция положительна, и, интегрируя по всему этому кольцу, мы можем только увеличить результат, т. е.

$$\iint_{(\sigma)} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\eta^{r_0} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr = \frac{2\pi A}{2-p} (r_0^{2-p} - \eta^{2-p}).$$

Принимая во внимание, что $2-p>0$, получим оценку для интеграла по $(\sigma')$:

$$\iint_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant \frac{2\pi A}{2-p} r_0^{2-p}, \tag{62}$$

что и доказывает высказанное выше утверждение.

Отметим, что при достаточно малом $r_0$ интеграл по $(\sigma')$ будет сколь угодно малым.

Совершенно аналогичным образом определяется несобственный трехкратный интеграл по конечной области $(v)$, если $f(M)$ становится неограниченной в окрестности некоторой точки $C$, и все предыдущие рассуждения годятся и для такого интеграла. Только высказанное выше достаточное условие абсолютной сходимости интеграла в данном случае формулируется так: *если в окрестности точки $C$ функция удовлетворяет условию $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, где $r$ — расстояние от $C$ до переменной точки $M$, $A$ и $p$ — постоянные и $p<3$, то интеграл*

$$\iiint_{(v)} f(M)\, dv$$

*абсолютно сходится.* В данном случае условие $p<2$ заменяется условием $p<3$, так как в полярных координатах в пространстве элемент объема имеет выражение $dv = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ ($r^2$ вместо $r$ в $d\sigma = r\, dr\, d\varphi$).

Рассмотрим теперь тот случай, когда область интегрирования $(\sigma)$ простирается в бесконечность во всех направлениях или просто неограничена. Пусть $(\sigma_1)$ — конечная область, содержащаяся в $(\sigma)$ и беспредельно расширяющаяся таким образом, что всякая точка $M$ области $(\sigma)$ попадает, начиная с некоторого этапа расширения, в $(\sigma_1)$. Считая $f(M)$ непрерывной в $(\sigma)$, может составить интеграл

$$\iint_{(\sigma_1)} f(M)\, d\sigma. \tag{63}$$

Если при беспредельном расширении $(\sigma_1)$ этот интеграл стремится к определенному пределу, не зависящему от того, каким образом $(\sigma_1)$ расширяется, то этот предел и называют интегралом от $f(M)$ по бесконечной области $(\sigma)$:

$$\iint_{(\sigma)} f(M)\, d\sigma = \lim \iint_{(\sigma_1)} f(M)\, d\sigma. \tag{64}$$

Если $f(M) \geqslant 0$ для всех достаточно далеких точек $M$, то интеграл (63) при расширении $(\sigma_1)$ или имеет определенный предел, или беспредельно возрастает. Для первого случая характерным является тот

факт, что интеграл по любой области или даже по конечному числу любых областей, принадлежащих $(\sigma)$ и лежащих вне круга с центром в начале и некоторым радиусом $r_0$, остается ограниченным (при этом он будет стремиться к нулю, если $r_0 \to \infty$). Обозначим через $(\sigma')$ совокупность вышеупомянутых областей. Отметим еще, что из определения несобственного интеграла следует, что, если сходится интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} |f(M)|\, d\sigma, \tag{65}$$

то интеграл (64) также сходится. Он называется в этом случае абсолютно сходящимся, и только такие интегралы мы и рассматриваем. Нетрудно доказать следующее достаточное условие сходимости: *если для всех достаточно удаленных точек $M$ функция удовлетворяет условию $|f(M)| \leqslant \frac{A}{r^p}$, где $r$ — расстояние от любой фиксированной точки (начала) до переменной точки $M$, $A$ и $p$ — постоянные и $p > 2$, то интеграл* (64) *сходится*. Пользуясь написанным неравенством и вводя полярные координаты, получим:

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \iint\limits_{(\sigma')} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr\, d\varphi.$$

Совокупность областей $(\sigma')$ обязательно содержится в кольце, ограниченном окружностями $r = r_0$ и $r = R$, где $R$ может быть сколь угодно большим. Интегрируя по всему этому кольцу, получим:

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant A \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_0}^{R} \frac{1}{r^{p-1}}\, dr = \frac{2\pi A}{p-2}\left(\frac{1}{r_0^{p-2}} - \frac{1}{R^{p-2}}\right).$$

Принимая во внимание, что $p - 2 > 0$, получим искомую оценку интеграла по $(\sigma')$;

$$\iint\limits_{(\sigma')} |f(M)|\, d\sigma \leqslant \frac{2\pi A}{p-2}\, \frac{1}{r_0^{p-2}},$$

что и доказывает высказанное выше утверждение. При достаточно большом $r_0$ интеграл по $(\sigma')$ будет сколь угодно малым.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл по бесконечной области. В последней теореме для тройного интеграла условие $p > 2$ надо заменить условием $p > 3$. Заметим еще, что сказанное выше о несобственных двойных интегралах в случае, когда $f(M)$ обращается в бесконечность, применимо и к несобственным интегралам, распространенным по поверхности. Такие интегралы сводятся, как мы видели, к интегралам по плоскости [**63**].

18 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

Несобственный абсолютно сходящийся интеграл приводится, как мы видели выше, к интегралам от неотрицательных функций $|f(M)|$ и $[|f(M)|-f(M)]$, а для таких интегралов неважно, каким образом $(\Delta)$ стягивается к точке $C$ или $(\sigma_1)$ расширяется. Всегда можно считать что $(\Delta)$ есть круг или сфера $(\Delta\rho)$ с центром $C$, радиус которой $\rho$ стремится к нулю, и что $(\sigma_1)$ есть часть $(\sigma)$, содержащаяся в некотором круге $(K_R)$ с центром в начале, радиус которого беспредельно растет. Пользуясь этим замечанием, нетрудно определить понятие равномерной сходимости несобственного кратного интеграла, зависящего от параметра. Например, *интеграл* (60), *подинтегральная функция которого зависит от параметра* $\alpha$, *назовем равномерно сходящимся относительно* $\alpha$, *если при любом положительном* $\delta$ *существует такое положительное* $\eta$, *не зависящее от* $\alpha$, *что*

$$\left|\iint\limits_{(\sigma')} f(M)\,d\sigma\right| < \delta,$$

*если* $(\sigma')$ — *любая часть* $(\sigma)$, *содержащаяся в круге* $(\Delta_\eta)$. Аналогично определяется равномерная сходимость и других несобственных интегралов. В частности из оценки (62) вытекает, что интеграл будет абсолютно и равномерно сходящимся, если числа $A$ и $p$ не зависят от $\alpha$.

Для равномерно сходящихся интегралов имеют место свойства и признак абсолютной и равномерной сходимости, указанные в [84].

Более сложными являются несобственные кратные интегралы, в которых подинтегральная функция становится неограниченной не в окрестности некоторой точки, а в окрестности некоторой линии $(l)$. При этом надо исключить эту линию некоторой областью $(\Delta)$ и затем суживать $(\Delta)$ к линии $(l)$.

Считая $f(M)$ положительной в окрестности $(l)$, можно утверждать, что интеграл по оставшейся области при этом будет стремиться или к конечному определенному пределу, или к бесконечности, причем это не зависит от того, каким способом $\Delta$ стягивается к $(l)$. Аналогично предыдущему определяются и абсолютно сходящиеся интегралы, которые мы только и рассматриваем.

**87. Примеры. 1.** Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \qquad (\alpha \neq 1),$$

где $(\sigma)$ — вся плоскость. Вводя полярные координаты и интегрируя по кругу $(K_R)$ с центром в начале и радиусом $R$, получим:

$$\iint\limits_{(K_R)} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1+r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}} - 1\right].$$

Если $\alpha < 1$, то при беспредельном возрастании $R$ правая часть беспредельно возрастает, и интеграл расходится. Если $\alpha > 1$, то правая часть имеет конечный предел $\frac{\pi}{\alpha - 1}$, т. е. интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{\alpha - 1}$. В последнем случае сходимость можно доказать, пользуясь достаточным условием, указанным в предыдущем номере.

**2.** Рассмотрим интеграл

$$\iint_{(\sigma)} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}},$$

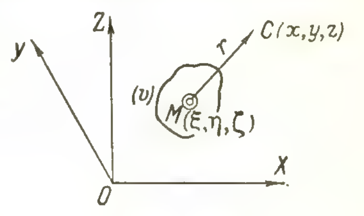
где $(\sigma)$ есть квадрат, ограниченный прямыми: $x = 0$, $x = 1$; $y = 0$; $y = 1$. Вдоль стороны $x = 0$ подинтегральная функция обращается в бесконечность. Выключаем эту сторону узенькой вертикальной полоской, т. е. интегрируем по прямоугольнику $(\sigma_\varepsilon)$, ограниченному прямыми: $x = \varepsilon$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ $(\varepsilon > 0)$:

$$\iint_{(\sigma_\varepsilon)} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_0^1 y\,dy \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\varepsilon},$$

и при $\varepsilon \to 0$ будем иметь предел, равный единице, т. е. наш интеграл сходится и равен единице.

**3.** *Притяжение, оказываемое массой на точку, расположенную вне или внутри нее* (черт. 78). Пусть масса притягиваемой точки $C(x, y, z)$ есть единица. Разобьем притягивающее тело $(v)$ на элементы массы $\Delta m$ и в каждом из них возьмем точку $M(\xi, \eta, \zeta)$. Обозначив через $r$ расстояние $CM$, мы получаем для величины притяжения точки $C$ элементом $\Delta m$ приближенное выражение (сосредоточив всю массу $\Delta m$ в точке $M$)

$$\frac{\Delta m}{r^2},$$



Черт. 78.

причем постоянную тяготения мы считаем равной единице. Так как указанная сила притяжения имеет направление отрезка $CM$, то проекции этого элементарного притяжения на координатные оси будут:

$$\frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\xi - x}{r}; \quad \frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\eta - y}{r}; \quad \frac{\Delta m}{r^2}\cdot\frac{\zeta - z}{r}.$$

Проекции же полного притяжения будут иметь приближенные выражения

$$X \sim \sum \frac{\xi - x}{r^3}\Delta m; \quad Y \sim \sum \frac{\eta - y}{r^3}\Delta m; \quad Z \sim \sum \frac{\zeta - z}{r^3}\Delta m.$$

Обозначив через $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ плотность массы в точке $M$, мы приближенно имеем

$$\Delta m \sim \mu\,\Delta v,$$

и окончательно, увеличивая число элементов и уменьшая беспредельно каждый из них:

$$X = \iiint_{(v)} \mu\frac{\xi - x}{r^3}\,dv; \quad Y = \iiint_{(v)} \mu\frac{\eta - y}{r^3}\,dv; \quad Z = \iiint_{(v)} \mu\frac{\zeta - z}{r^3}\,dv. \qquad (66)$$

Обращаем внимание на то, что в написанных интегралах переменными интегрирования являются координаты $(\xi, \eta, \zeta)$ переменной точки $M$ области $(v)$, и плотность $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ является функцией этих переменных. Координаты $(x, y, z)$ точки $C$ входят под знак интеграла как непосредственно в числители, так и через посредство

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

и являются параметрами, так что величины $X$, $Y$ и $Z$ суть функции $x$, $y$ и $z$.

Если точка $C$ находится вне притягивающей массы, величина $r$ никогда не обращается в нуль, и мы будем иметь дело с обыкновенными интегралами. Если же точка $C$ попадает внутрь массы, то подинтегральные функции в выражениях (66) обращаются в бесконечность при совпадении переменной точки интегрирования $M$ с $C$, и мы имеем дело с несобственными интегралами. Они, однако, наверно имеют смысл, если мы будем считать, что $\mu$ есть непрерывная функция, ибо, назвав через $\mu_0$ верхнюю границу значений функции $|\mu|$, мы получим:

$$\left|\mu \frac{\xi - x}{r^3}\right| = \left|\mu \frac{1}{r^2} \frac{\xi - x}{r}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}; \quad \left|\mu \frac{\eta - y}{r^3}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}; \quad \left|\mu \frac{\zeta - z}{r^3}\right| < \frac{\mu_0}{r^2}, \tag{67}$$

число $p$ предыдущего правила в данном случае равно 2 и $A = \mu_0$.

Тем более будет иметь смысл и интеграл

$$U = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu\, dv}{r}, \tag{68}$$

выражающий *потенциал* рассматриваемой массы в точке $C$. (С этим понятием мы познакомимся подробнее ниже.)

**4.** Мы имеем очевидные формулы

$$\frac{\xi - x}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\eta - y}{r} = -\frac{\partial r}{\partial y}; \quad \frac{\xi - z}{r} = -\frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\frac{\xi - x}{r^3} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{\xi - x}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\eta - y}{r^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right); \quad \frac{\xi - z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right),$$

а потому интегралы (66) можно переписать в виде:

$$X = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dv; \quad Y = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv;$$

$$Z = \iiint\limits_{(v)} \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

т. е. эти интегралы получаются путем дифференцирования интеграла (68) по $x$, $y$ и $z$ под знаком интеграла. Дифференцирование производится по координатам точки $(x, y, z)$, в которой подинтегральная функция терпит разрыв, и рассматриваемый случай не подходит под тот случай, для которого были установлены выше [**84**] теоремы, касающиеся непрерывности и возможности дифференцирования под знаком интеграла. Дальше [**200**] мы увидим, что при условии непрерывности $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ интегралы $X$, $Y$, $Z$ суть непрерывные функции $(x, y, z)$ во всем пространстве, $U$ — непрерывная функция с непрерывными частными производными первого порядка, и эти производные могут быть получены дифференцированием интеграла (68) под знаком

интеграла, т. е.

$$X=\frac{\partial u}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial u}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Дифференцируя потенциал $U$ второй раз по $x$, $y$ и $z$ под знаком интеграла и помня, что $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ не зависит от $(x, y, z)$, получим:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv;\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv;\\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)dv.\end{gathered}\right\}\tag{69}$$

Эти формулы справедливы только в том случае, если точка $C(x, y, z)$ находится вне притягивающих масс, т. е. вне $(v)$. При этом все интегралы — собственные. Если же $C$ внутри $(v)$, то двукратное дифференцирование $\frac{1}{r}$ даст, как нетрудно проверить непосредственным дифференцированием:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\eta-y)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3(\zeta-z)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\end{gathered}\right\}\tag{70}$$

и к интегралам (69) не будет уже применим признак сходимости из [**87**], т. е если $C$ внутри $(v)$, то вторые производные от потенциала $U$ нельзя определять, два раза дифференцируя под знаком интеграла.

Складывая равенства (70), будем иметь:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{3[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0,$$

и, следовательно, складывая равенства (69), справедливые, если $C$ вне $(v)$, получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.\tag{71}$$

Итак: *потенциал объемных масс $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению* (71) *в точках $C(x, y, z)$, находящихся вне этих масс.* В дальнейшем мы выясним, как надо изменить это уравнение, если точка $C$ находится внутри масс.

**5.** Рассмотрим случай однородного шара радиуса $a$ ($\mu$ — постоянно). Направим ось $OZ$ по прямой $OC$, где $O$ — центр шара (черт. 79), и введем сферические координаты $(\rho, \theta, \varphi)$:

$$U=\iiint\limits_{(v)}\mu\frac{dv}{r}=\mu\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{\rho^2\sin\theta}{r}\,d\varphi\,d\theta\,d\rho.\tag{72}$$

Но очевидно

$$r^2=\rho^2+z^2-2\rho z\cos\theta.\tag{73}$$

Мы выполним сперва интегрирование по $\theta$:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{r}.$$

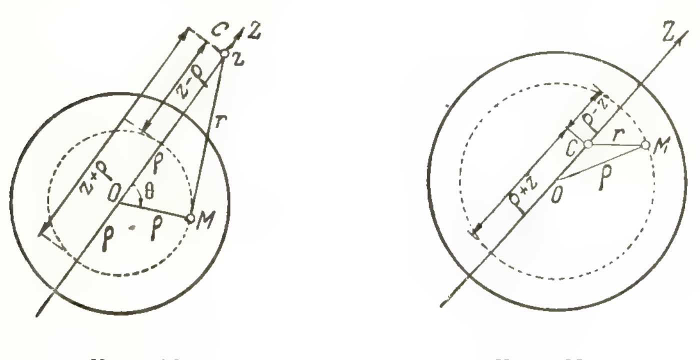
Введем вместо $\theta$ переменную $r$, причем $\rho$ и $\varphi$ считаются постоянными. Здесь придется различать два случая: если $z > \rho$, то при постоянных $\rho$ и $\varphi$ и при изменении $\theta$ от 0 до $\pi$ величина $r$ меняется от $(z - \rho)$ до $(z + \rho)$. Если же $z < \rho$, то $r$ меняется от $(\rho - z)$ до $(\rho + z)$ (черт. 80). Сверх того, в силу (73) при постоянных $\rho$ и $\varphi$:

$$r\,dr = \rho z \sin\theta\,d\theta; \qquad \frac{\sin\theta\,d\theta}{r} = \frac{dr}{\rho z}.$$

Итак, оказывается:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{r} = \begin{cases} \displaystyle\int_{z-\rho}^{z+\rho} \frac{dr}{\rho z} = \frac{2}{z} & (z > \rho) \\ \displaystyle\int_{\rho-z}^{\rho+z} \frac{dz}{\rho z} = \frac{2}{\rho} & (z < \rho). \end{cases}$$

Подставляя это в (72), мы должны различить два случая:




Черт. 79. Черт. 80.

1) Точка $C$ находится вне сферы или на ее поверхности; тогда $a \leqslant z$, и в промежутке $(0, a)$ все значения $\rho \leqslant z$; в этом случае мы имеем:

$$U = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} \frac{2\rho^2\,d\rho}{z} = \frac{4\pi a^3 \mu}{3z} = \frac{m}{z}, \tag{74}$$

где $m$ есть полная масса шара.

2) Точка $C$ находится внутри сферы (черт. 80); здесь промежуток $(0, a)$ нужно разбить на два: $(0, z)$ и $(z, a)$, и мы получим:

$$U = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \int_0^{z} \frac{2\rho^2\,d\rho}{z} + \int_z^{a} \frac{2\rho^2\,d\rho}{\rho} \right] = 2\pi\mu \left( a^2 - \frac{1}{3} z^2 \right); \tag{75}$$

при $z = a$, т. е. когда точка находится на поверхности шара, обе формулы (74) и (75) дают одинаковую величину для $U$, что доказывает непрерывность функции $U$.

Переходим к вычислению притяжения. В силу симметрии, оно должно быть направлено по оси $OZ$, так что нужно вычислить только

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Когда точка $C$ находится вне шара, мы пользуемся формулой (74):

$$Z = -\frac{m}{z^2}; \tag{76}$$

когда же точка $C$ находится внутри шара, применяем формулу (75):

$$Z = -\frac{4}{3}\pi\mu z. \tag{77}$$

При $z = a$ обе формулы (57) и (58) совпадают, что доказывает непрерывность притяжения $Z$.

Формулы (74), (76), (77) показывают, что *потенциал и притяжение однородного шара в точке вне шара можно получить, сосредоточив всю массу шара в его центре. Притяжение же в точке внутри шара пропорционально расстоянию притягиваемой точки от центра шара.*

Для простоты вычислений мы выбрали оси координат специальным образом, направив ось $OZ$ в точку $C$, так что в предыдущих формулах $z$ есть расстояние точки $C$ до центра сферы. При любом расположении координатных осей с началом в центре сферы надо заменить $z$ на $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где $(x, y, z)$, как всегда, координаты $C$. Формулы (74) и (75) дадут:

$$U = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (C \text{ вне сферы});$$

$$U = 2\pi\mu\left[a^2 - \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\right] \quad (C \text{ внутри сферы}).$$

Первое из выражений для $U$ очевидно удовлетворяет уравнению (71). Дифференцируя второе выражение два раза по $x$, $y$ и $z$, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\mu \quad (C \text{ внутри сферы}). \tag{78}$$

Как мы увидим в дальнейшем, это уравнение оказывается справедливым и для любого объема $(v)$ с переменной плотностью, если $C$ находится внутри $(v)$.

**6.** Положим, что притягивающие массы распределены по поверхности $(S)$ с поверхностной плотностью $\mu(M)$, которая является функцией переменной точки $M$ поверхности $(S)$. Обозначая, как и выше, через $C(x, y, z)$ притягиваемую точку с массой единица и через $r$ расстояние $|CM|$, получим для потенциала $U$ выражение

$$U = \iint\limits_{(S)} \frac{\mu(M)}{r}\, dS \tag{79}$$

и для проекций притяжения:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \iint\limits_{(S)} \mu(M) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \iint\limits_{(S)} \mu(M) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) dS;$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \iint\limits_{(S)} \mu(M) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS.$$

Потенциал (79) называется обычно *потенциалом простого слоя.* В настоящем примере мы рассматриваем лишь тот случай, когда $C$ находится вне поверхности ($S$), так что все интегралы — собственные. При этом потенциал (79) удовлетворяет, как и выше, уравнению (71).

## § 9. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

**88. Предварительные понятия.** При изложении теории кратных интегралов мы исходили из интуитивного представления площади и объема. В настоящем параграфе мы дадим обоснование этих понятий и строгое изложение основ теории кратных интегралов. Мы начнем с установления некоторых понятий и доказательства теорем, касающихся множества точек, которые нам будут нужны в дальнейшем. Мы будем вести изложение для случая плоскости. Все сказанное легко будет распространить и на случай пространства.

Рассмотрим плоскость, отнесенную к прямолинейным прямоугольным осям $XY$. Назовем *$\varepsilon$-окрестностью точки $M$* круг с центром $M$ и радиусом $\varepsilon$. Мы будем рассматривать всевозможные *множества точек* на нашей плоскости, которые могут состоять из конечного или бесконечного числа точек. Пусть имеется некоторое множество точек ($P$). Точка $M$ называется *предельной точкой множества* ($P$), если любой $\varepsilon$-окрестности точки $M$ принадлежит бесчисленное множество точек из ($P$). Сама точка $M$ может или принадлежать, или не принадлежать ($P$). Если все предельные точки ($P$) принадлежат ($P$), то множество ($P$) называется *замкнутым.* Точка $M$, принадлежащая ($P$), называется *внутренней точкой* ($P$), если множеству ($P$) принадлежат все точки некоторой $\varepsilon$-окрестности точки $M$.

Рассмотрим, например, множество ($P$) всех точек, находящихся внутри квадрата: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. В данном случае все точки суть внутренние точки множества. Все они будут и предельными точками множества. Кроме того, предельными точками будут и все точки, принадлежащие границе квадрата, т. е. его сторонам. Поскольку мы их не причисляем к ($P$), это множество незамкнуто.

Назовем *открытым множеством* или *областью* множество, все точки которого суть внутренние точки. Назовем *связной областью* такое открытое множество ($P$), что любые две точки из ($P$) можно соединить ломаной линией, все точки которой принадлежат ($P$). При таком определении внутренние точки квадрата образуют связную область, но внутренние точки двух отдельно лежащих квадратов уже не образуют связной области. Иногда то, что мы выше назвали областью, называют открытой областью. *Назовем границей области* ($P$) множество ($l$) точек $M'$, обладающих следующим свойством: сама точка $M'$ не принадлежит ($P$), но в любой ее $\varepsilon$-окрестности лежат точки, принадлежащие ($P$). Поскольку ($P$) состоит из внутренних точек, можно утверждать, что в любой $\varepsilon$-окрестности $M'$ лежит бесчисленное множество точек ($P$), и можно определить контур ($l$) области, как множество тех предельных точек ($P$), которые не принадлежат ($P$). Нетрудно видеть, что ($l$) *есть замкнутое множество.* Действительно, пусть $N$ — предельная точка ($l$). Покажем, что она принадлежит ($l$). По определению предельной точки в любой $\varepsilon$-окрестности точки $N$ находятся точки $M'$ из ($l$), и точка $N$ не может принадлежать ($P$), ибо все точки ($P$) — внутренние точки. Но в любой $\varepsilon$-окрестности точек $M'$ находятся точки области ($P$) (по определению границы), и, следовательно, в любой $\varepsilon$-окрестности $N$ находятся точки ($P$), т. е. $N$ действительно принадлежит ($l$). Если мы причисляем к области ($P$) ее границу ($l$), то получается замкнутое множество ($\overline{P}$), которое называют иногда *замкнутой областью.* Действительно, если в любой $\varepsilon$-окрестности некоторой точки $M$ находятся точки ($\overline{P}$), и $M$ не принадлежит ($P$), то

в любой $\varepsilon$-окрестности $M$ находятся точки $(l)$, и, в силу замкнутости $(l)$, отсюда следует, что $M$ принадлежит $(l)$, а следовательно, принадлежит $(\overline{P})$. Если $M$ принадлежит $(P)$, то тем более она принадлежит $(\overline{P})$. Из сказанного и следует, что $(\overline{P})$ — замкнутое множество. Заметим, что после причисления точек границы $(l)$ к области $(P)$ точки контура могут стать внутренними точками нового множества $(\overline{P})$. Если, например, $(P)$ есть квадрат с надрезом внутри, то точки надреза суть точки $(l)$, но после причисления $(l)$ к $(P)$ эти точки становятся внутренними точками $(P)$.

Введем теперь некоторые понятия, связанные не с областью, а с любым множеством $(P)$ точек плоскости. Назовем *производным множеством* $(P')$ *множества* $(P)$ совокупность всех предельных точек множества $(P)$. Совершенно так же, как мы доказали замкнутость $(l)$, можно доказать, что *всякое производное множество — замкнуто*. Пусть $(P_1)$ — множество всех точек плоскости, не принадлежащих $(P)$. Оно называется обычно *дополнительным для* $(P)$. *Границей* $(l)$ *множества* $(P)$ называется множество точек, принадлежащих одному из множества $(P)$ или $(P_1)$ и производной другого множества, т. е. принадлежащих $(P)$ и $(P_1')$ или $(P')$ и $(P_1)$. Для области это будет прежнее определение границы. Можно дать и другое определение границы, равносильное приведенному выше. Назовем точку $M$ из $(P)$ *изолированной точкой* этого множества, если существует $\varepsilon$-окрестность точки $M$, не содержащая точек $(P)$, кроме самой точки $M$. Нетрудно видеть, что граница множества $(P)$ состоит из изолированных точек $(P)$ и из тех предельных точек $(P)$, которые не являются внутренними точками $(P)$. Можно, как и выше, показать, что $(l)$ есть замкнутое множество. В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с областями.

Заметим, что все сказанное выше применимо и к множествам точек на прямой, которую можно принять за ось $OX$. При этом $\varepsilon$-окрестностью точки $x = c$ называется промежуток $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, т. е. промежуток длины $2\varepsilon$, имеющий середину в данной точке.

**89. Основные теоремы теории множеств.** Множество $(P)$ называется *ограниченным*, если все его точки находятся в ограниченной части плоскости. Эту ограниченную часть плоскости всегда можно считать квадратом, со сторонами, параллельными осям. Можно поэтому сказать, что множество $(P)$ ограничено, если все его точки принадлежат некоторому квадрату со сторонами, параллельными осям.

Теорема I. *Всякое бесконечное, ограниченное множество точек* $(P)$ *имеет по крайней мере одну предельную точку*. Докажем эту теорему сначала для того случая, когда точки $(P)$ лежат на одной прямой, например, на оси $OX$. Множество $(P)$ по условию бесконечно, т. е. этих точек бесчисленное множество, и, в силу ограниченности $(P)$, все они принадлежат некоторому конечному промежутку $(a, b)$. Разделим $(a, b)$ пополам. По крайней мере одна из половинок $(a_1, b_1)$ будет содержать бесчисленное множество точек $(P)$. Разделим $(a_1, b_1)$ опять пополам. По крайней мере одна из новых половинок $(a_2, b_2)$ будет содержать бесчисленное множество точек $(P)$ и т. д. Получаем последовательность промежутков

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots,$$

из которых каждый следующий есть половина предыдущего, и все промежутки $(a_n, b_n)$ содержат бесчисленное множество точек из $(P)$. Мы знаем, что $a_n$ и $b_n$ имеют некоторый общий предел $p$ [I, 42]. При любом $\varepsilon > 0$ промежуток $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ содержит все $(a_n, b_n)$, начиная с некоторого $n$, следовательно, содержит бесчисленное множество точек из $(P)$, т. е. $p$ есть предельная точка $(P)$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы в случае плоскости. В силу ограниченности $(P)$ все точки этого множества принадлежат некоторому квадрату: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, который мы будем обозначать символом $[a, b; c, d]$. Разделим этот квадрат на четыре равные части. По крайней мере одна из них $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ содержит бесчисленное множество точек $(P)$. Новый квадрат опять разделим на четыре равные части. По крайней мере одна из них $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ содержит бесчисленное множество точек $(P)$ и т. д. Имеем две последовательности промежутков

$$(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \ldots$$
$$(c, d), (c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots, (c_n, d_n), \ldots,$$

и в каждой из них следующий промежуток есть половина предыдущего. Таким образом $a_n$ и $b_n$ имеют некоторый общий предел $p$, а $c_n$ и $d_n$ — некоторый общий предел $q$. По построению всякая $\varepsilon$-окрестность точки $(p, q)$ содержит все квадраты $[a_n, b_n; c_n, d_n]$, начиная с некоторого $n$ и, следовательно, содержит бесчисленное множество точек $(P)$, т. е. $(p, q)$ есть предельная точка $(P)$, что и требовалось доказать.

Возьмем какую-нибудь последовательность $\varepsilon$-окрестностей точки $(p, q)$, где $\varepsilon$ принимает убывающую последовательность значений: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, стремящуюся к нулю. Выбираем в $\varepsilon_1$-окрестности точки $(p, q)$ некоторую точку $M_1$, принадлежащую $(P)$. Далее в $\varepsilon_2$-окрестности выбираем некоторую точку $M_2$, принадлежащую $(P)$ и отличную от $M_1$. В $\varepsilon_3$-окрестности выбираем точку $M_3$, принадлежащую $(P)$ и отличную от $M_1$ и $M_2$, и т. д. Таким образом получаем некоторую последовательность точек $M_n$, которая будет стремиться к точке $M(p, q)$, т. е. расстояние $M_nM$ будет стремиться к нулю, или, что то же, координаты $(x_n, y_n)$ точек $M_n$ будут стремиться к пределам: $x_n \to p$, $y_n \to q$. Иначе говоря: *из бесконечного ограниченного множества точек $(P)$ можно выбрать последовательность точек, стремящуюся к пределу.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные множества и не будем этого специально оговаривать. Пусть $(P)$ и $(Q)$ — два каких-нибудь множества. Берем всевозможные расстояния $MN$ любой точки $M$ из $(P)$ до любой точки $N$ из $(Q)$. Мы получаем таким образом совокупность неотрицательных чисел $MN$, которая должна иметь некоторую точную нижнюю границу $\delta$ [**I, 42**]. Это неотрицательное число $\delta$ называется *расстоянием между множествами* $(P)$ и $(Q)$.

Теорема II. *Если $(P)$ и $(Q)$ — замкнутые множества без общих точек, то расстояние $\delta$ между ними положительно.*

Доказываем от обратного. Пусть $\delta = 0$. Множества $(P)$ и $(Q)$ — без общих точек, а потому не может быть, чтобы $MN = 0$. Но из определения точной нижней границы следует, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие точки $M$ из $(P)$ и $N$ из $(Q)$, что $MN < \varepsilon$. Мы можем, таким образом, выбрать такую последовательность точек $M_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ из $(P)$ и $N_n$ из $(Q)$, что $M_nN_n \to 0$. По поводу точек $M_n$ можно мыслить два случая: или среди точек $M_n$ есть бесчисленное множество одинаковых, или это не так. В первом случае оставим только те пары $M_nN_n$, куда входят одинаковые $M_n$ (какие-нибудь, если таких бесконечных групп одинаковых точек несколько), и пронумеруем эти пары целыми числами. Во втором случае бесконечное ограниченное множество точек $M_n$ наверно имеет хоть одну предельную точку $M$, и, по предыдущему, мы можем выбрать такую подпоследовательность из $M_n$, которая стремится к $M$. Оставим только те пары $M_nN_n$, куда входит эта подпоследовательность, и пронумеруем их целыми числами. Проделав это с $M_n$, то же самое проделаем и с $N_n$. После этого у нас останутся такие пары точек $M_n$ и $N_n$, что: 1) $M_nN_n \to 0$; 2) $M_n$ стремится к точке $M$ (или совпадает с $M$ при всех $n$) и $N_n$ стремится к некоторой точке $N$ (или совпадает с $N$ при всех $n$). Переходя к пределу, получим $MN = 0$, т. е. $M$ и $N$ совпадают. С другой стороны, $M$, как предельная точка для $M_n$, принадлежащих

к $(P)$, будет предельной точкой и для $(P)$ и, в силу замкнутости $(P)$, должна принадлежать $(P)$. Точно так же $N$ должна принадлежать $(Q)$. Но $M$ и $N$ совпадают, т. е. $(P)$ и $(Q)$ имеют общую точку, что противоречит условию теоремы, и, следовательно, предположение $\delta = 0$ неправильно, что и требовалось доказать.

Мы привели доказательство для того случая, когда $M_n$ и $N_n$ не совпадают с $M$ и $N$. Если, например, $M_n$ совпадает с $M$ при всех $n$, а $N_n$ не совпадает с $N$, то мы имеем $MN_n \to 0$, причем $M$ принадлежит $(P)$. В пределе опять $MN = 0$, и доказательство остается прежним. Случай, когда $M_n$ совпадает с $M$ и $N_n$ с $N$ явно противоречит предположению, что $(P)$ и $(Q)$ не имеют общих точек.

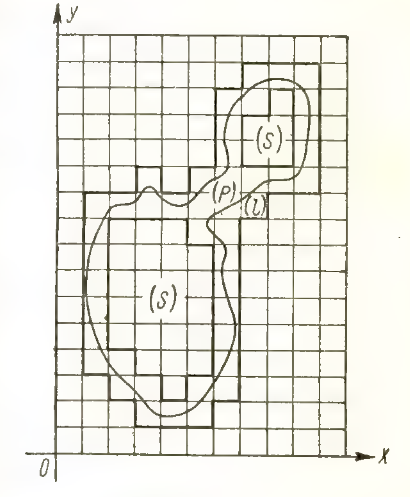
Повторив предыдущее доказательство, мы могли бы доказать и такую теорему: *если $(P)$ и $(Q)$ — замкнутые множества, то найдется по крайней мере одна такая пара точек $M$ из $(P)$ и $N$ из $(Q)$, что $MN = \delta$.*

Введем еще одно понятие. Пусть $(P)$ — некоторое множество. Возьмем всевозможные расстояния $M'M''$, где $M'$ и $M''$ — любые две точки из $(P)$. Совокупность неотрицательных чисел $M'M''$ ограничена сверху, в силу ограниченности множества $(P)$, и, следовательно [**I, 42**], имеет точную верхнюю границу $d$, которая называется *диаметром множества* $(P)$. *Если* $(P)$ — *замкнутое множество*, то как и выше, можно показать, что *найдется по крайней мере одна пара точек* $M'$, $M''$ из $(P)$ *такая, что* $M'M'' = d$.

Все сказанное справедливо и для трехмерного пространства, отнесенного к осям $XYZ$. При этом под $\varepsilon$-окрестностью точки $M$ надо понимать сферу с центром $M$ и радиусом $\varepsilon$, и вместо квадрата $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ надо рассматривать куб $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $e \leqslant z \leqslant f$.

В случае оси $OX$ квадрат надо заменить промежутком.

**90. Внутренняя и внешняя площади.** За основу измерения площадей мы примем, что площадь квадрата со сторонами, параллельными осям, равна квадрату длины его стороны. Проводя прямые, параллельные осям, покроем плоскость сеткой равных квадратов. Назовем областью типа $(\alpha)$ замкнутую область, составленную из конечного числа квадратов нашей сетки.




Черт. 81.

Площадью такой области назовем сумму площадей составляющих ее квадратов. Проводя прямые, параллельные осям, всякую область типа $(\alpha)$ можно бесчисленным множеством способов разбить на квадраты со сторонами, параллельными осям. Нетрудно показать, на чем мы не останавливаемся, что сумма площадей этих квадратов для данной области типа $(\alpha)$ всегда одна и та же. Кроме того, если одна или несколько областей типа $(\alpha)$ без общих внутренних точек находятся внутри области $(A)$ типа $(\alpha)$, то сумма площадей этих областей меньше площади $(A)$. Заметим еще, что в дальнейшем под квадратом мы разумеем квадрат вместе с его границей.

Пусть $(P)$ — какое-либо ограниченное множество точек. Покроем плоскость сеткой равных квадратов, и пусть $(S)$ — совокупность тех квадратов этой сетки, все точки которых (включая и точки их границ) суть внутренние точки $(P)$.

Тою же буквой $S$ обозначим сумму площадей этих квадратов. Очевидно, что $(S)$ есть область типа $(\alpha)$ (черт. 81). Пусть, далее, $(S+S')$ — совокупность квадратов нашей сетки, имеющих общие точки с $(P)$. Обозначим через $S+S'$ сумму площадей этих квадратов. Очевидно, что $(S+S')$ имеет ту же структуру, что $(S)$, и $(S)$ есть часть $(S+S')$. Последнее множество, кроме квадратов, входящих в $(S)$, содержит совокупность $(S')$ тех квадратов, которые имеют общие точки с $(l)$.

Беря всевозможные сетки равных квадратов, получим бесконечную совокупность чисел $S$. Все эти числа будут меньше площади того квадрата, внутри которого находится ограниченное множество $(P)$. *Верхняя граница совокупности чисел $S$ называется внутренней площадью множества* $(P)$. Обозначим ее через $a$. Точно так же совокупность положительных чисел $(S+S')$ имеет точную нижнюю границу, которую мы назовем *внешней площадью* $(P)$ и обозначим через $A$. Наконец, обозначим через $r$ длины сторон квадратов сетки. Докажем следующую основную теорему [ср. **I, 115**]:

Теорема. Если $r\to 0$, то $S\to a$ и $S+S'\to A$, т. е. *при беспредельном измельчании сетки $S$ стремится к внутренней площади и $S+S'$ — к внешней площади.*

По определению точной нижней границы всегда $S+S'\geqslant A$. Нам надо показать, что при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое положительное $\eta$, что $S+S'<A+\varepsilon$, если $r<\eta$. По определению точной нижней границы существует такая сетка квадратов, что соответствующая ей сумма $S+S'$, которую мы обозначим через $S_0+S_0'$, меньше $A+\varepsilon$, т. е. $S_0+S_0'<A+\varepsilon$. Обозначим через $r_0$ длину стороны крадратов этой сетки. Граница $(S+S_0)$ состоит из конечного числа прямых, параллельных осям. Мы можем окаймить $(S_0+S_0')$ квадратами со стороной $\frac{r_0}{n}$, где $n$ — целое положительное число, так, чтобы получилась область $(S_1)$ типа $(\alpha)$, которая образована квадратами со стороною $\frac{r_0}{n}$ и содержит $(S_0+S_0')$ строго внутри себя. Если мы возьмем $n$ достаточно большим, то площадь $S_1$ области $(S_1)$ будет сколь-угодно мало отличаться от $S_0+S_0'$, так что мы можем считать, что $S_1<A+\varepsilon$.

Пусть $(l_1)$ — граница $(S_1)$ и $(l)$ — граница $(P)$. Замкнутые множества $(l_1)$ и $(l)$ не имеют общих точек, и пусть $\delta$ есть расстояние между этими множествами. Это есть некоторое положительное число. Если мы возьмем $r<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$, то все квадраты сетки, имеющие общие точки с $(P)$, будут, очевидно, лежать внутри $(S_1)$ и, следовательно, при $r<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ мы будем иметь $S+S'<S_1<A+\varepsilon$. Таким образом, число $\eta$, о котором мы говорили выше, можно взять равным $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ и доказано, что $S+S'\to A$ при $r\to 0$. Совершенно аналогично можно доказать, что $S\to a$ при $r\to 0$.

Следствие. $(S)$ есть часть $(S+S')$, и, следовательно, $S<S+S'$. При $r\to 0$ мы получаем $a\leqslant A$, т. е. *внутренняя площадь не больше внешней.*

Если $(P)$ не имеет внутренних точек, то $S=0$ для любой сетки квадратов, и внутренняя площадь равна нулю. Если внутренние точки имеются, то в некоторой $\varepsilon$-окрестности внутренней точки $(P)$ будет существовать квадрат со сторонами, параллельными осям, все точки которого будут

внутренними точками $(P)$. Для соответствующей сетки мы будем иметь $S > 0$, и, следовательно, внутренняя площадь $(P)$ будет больше нуля.

Если у $(P)$ внешняя площадь равна нулю, то внутренняя и подавно равна нулю, и, следовательно, в этом случае $(P)$ не имеет внутренних точек. В дальнейшем для нас будут иметь важное значение множества с внешней площадью нуль. Из предыдущего следует, что это суть те множества $(P)$, для которых сумма площадей квадратов (замкнутых) сетки, имеющих общие точки с $(P)$, стремится к нулю при $r \to 0$.

Можно показать, что существуют такие замкнутые кривые, которые не пересекают сами себя и имеют параметрическое уравнение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, и у которых внешняя площадь больше нуля. Такие кривые, как можно показать, являются границей некоторой связной области, и у этой области внутренняя площадь меньше внешней площади.

**91. Квадрируемые множества.** Множество $(P)$ *называется квадрируемым, если* $a = A$, т. е. *если его внутренняя и внешняя площади равны*. Общая величина $a$ и $A$ называется при этом *площадью множества* $(P)$. Отметим, что если внешняя площадь равна нулю ($A = 0$), то, как мы видели, и $a = 0$, т. е. множество квадрируемо, и его площадь равна нулю. Наоборот, если множество квадрируемо и его площадь равна нулю, то, очевидно, $A = 0$.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости состоит, очевидно, в том, что $S$ и $S + S'$ имеют одинаковый предел при $r \to 0$, т. е. в том, что $S' \to 0$ при $r \to 0$. Иначе говоря: при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое положительное $\eta$, что $S' < \varepsilon$, если $r < \eta$.

Если граница $(l)$ множества $(P)$ имеет площадь нуль, то $S' \to 0$ при $r \to 0$, ибо все квадраты (замкнутые), входящие в состав $(S')$, имеют с $(l)$ общие точки. Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение, т. е. если $S' \to 0$ при $r \to 0$, то площадь $(l)$ равна нулю. Покажем это. Квадраты любой сетки, имеющие общие точки с $(l)$, могут не входить в состав $(S')$ только в том случае, если они имеют общие с $(l)$ точки только на своей границе, ибо если точки $(l)$ лежат внутри квадрата, то там же лежат и точки $(P)$, т. е. такой квадрат входит в $(S')$. Но могут иметься и такие квадраты сетки (их конечное число), которые имеют общие с $(l)$ точки только на границе, не содержат точек $(P)$ и тем самым не входят в $(S')$. Но по крайней мере в одном из восьми квадратов, прилегающих к такому квадрату, имеются точки $(P)$. Поэтому, если мы присоединим ко всем квадратам, входящим в состав $(S')$, все прилегающие к ним квадраты, то получим во всяком случае все квадраты, имеющие общие точки с $(l)$. Площадь всех полученных так квадратов не больше $9S'$ и, поскольку по условию $S' \to 0$ при $r \to 0$, мы можем утверждать, что внешняя площадь $(l)$ равна нулю, т. е. что просто площадь $(l)$ равна нулю. Из сказанного вытекает следующее важное утверждение.

Теорема. *Для квадрируемости множества $(P)$ необходимо и достаточно, чтобы площадь границы $(l)$ этого множества была равна нулю,* т. е. *необходимо и достаточно, чтобы сумма площадей квадратов сетки, имеющих общие точки с $(l)$, стремилась к нулю при $r \to 0$.*

Замечание. В силу теоремы из [90] можно указанное выше необходимое и достаточное условие сформулировать следующим образом: *при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такая сетка квадратов, что сумма площадей квадратов этой сетки, имеющих общие точки с $(l)$, меньше $\varepsilon$.*

Если для некоторого множества внешняя площадь $A = 0$, то для части этого множества и подавно $A = 0$, т. е. всякая часть множества с площадью нуль имеет также площадь, равную нулю.

Отметим еще одно свойство множеств с площадью нуль. Пользуясь использованным выше методом окружения квадрата прилегающими квадра-

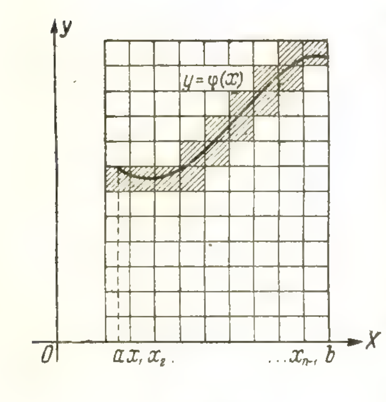
тами, легко показать, что при любом заданном положительном $\varepsilon$ множество с площадью нуль можно заключить строго внутри области типа ($\alpha$), площадь которой меньше $\varepsilon$.

Рассмотрим теперь случай не любых множеств, а областей.

Положим, что квадрируемая область $(P)$ разбита на две области $(P_1)$ и $(P_2)$ при помощи некоторого множества $(\lambda)$ (линии), имеющего внешнюю площадь, равную нулю. Это значит, что внутренние точки $(P_1)$ и $(P_2)$ суть внутренние точки $(P)$, не принадлежащие $(\lambda)$. Из предыдущего вытекает, что $(P_1)$ и $(P_2)$ — квадрируемы и что сумма их площадей равна площади $(P)$. То же самое справедливо и при разбиении $(P)$ на любое конечное число областей. Наоборот, если мы объединяем конечное число квадрируемых замкнутых областей (или множеств) $(P_k)$ без общих внутренних точек в одно множество, то это новое множество $(P)$ квадрируемо, и его площадь равна сумме площадей объединяемых множеств. При таком объединении некоторые точки границ $(P_k)$ могут стать внутренними точками. Если квадрируемая область (или множество) $(Q_1)$ есть часть квадрируемой области (множества) $(Q_2)$, т. е. всякая точка $(Q_1)$ принадлежит $(Q_2)$, то площадь $(Q_1)$ не превосходит площади $(Q_2)$. Все это непосредственно вытекает из предыдущих определений и последней теоремы.

В дальнейшем при разбиении квадрируемой области на части мы всегда будем подразумевать, что это разбиение производится при помощи множества точек с внешней площадью, равной нулю.

Дадим теперь простой пример кривой $(\lambda)$, имеющей внешнюю площадь равной нулю, т. е. такой, что сумма площадей квадратов сетки, имеющих общие точки с $(\lambda)$, стремится к нулю вместе с $r$, а именно положим, что кривая $(\lambda)$ имеет явное уравнение: $y = \varphi(x)$, причем $x$ изменяется в конечном промежутке $(a, b)$ и $\varphi(x)$ — непрерывная функция в этом промежутке. В силу равномерной непрерывности при заданном положительном $\varepsilon$ существует такое $\delta$, что $|\varphi(x'') - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, если $x'$ и $x''$ из $(a, b)$ и $|x'' - x'| < \delta$ [I,43]. Выберем число $r$ так, чтобы оно было меньше $\delta$ и меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. При построении сетки квадратов промежуток $(a, b)$ разобьется на части $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, причем длины $(x_k - x_{k-1})$ средних частей равны $r$, а длины $(x_1 - a)$ и $(b - x_{n-1})$ могут быть и меньше $r$ (черт. 82). Возьмем те квадраты сетки, которые находятся в полосе между $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. В силу того, что $x_k - x_{k-1} < \delta$, можно утверждать, что разность $\omega_k$ между наибольшим и наименьшим значением $\varphi(x)$ в промежутке $(x_{k-1}, x_k)$ (т. е. колебание $\varphi(x)$ в этом промежутке) меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.




Черт. 82.

Квадрат, имеющий общую точку с самой нижней точкой кривой $y = \varphi(x)$, может еще идти вниз самое большее на $r$ (длина стороны квадрата), а квадрат, имеющий общую точку с самой верхней точкой кривой, может идти наверх еще самое большее на $r$. Таким образом сумма высот квадратов сетки, имеющих общие точки с $(\lambda)$ и содержащихся в полосе $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, меньше $\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + 2r$, или, в силу того, что

$r < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$, эта сумма высот меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$, а сумма площадей этих квадратов меньше $\frac{\varepsilon}{a-b}(x_k - x_{k-1})$. Суммируя по $k$ от $k=1$ до $k=n$, видим, что сумма площадей квадратов, имеющих общие точки с $(\lambda)$, меньше $\varepsilon$, и, ввиду произвольности $\varepsilon$, отсюда следует, что внешняя площадь кривой $(\lambda)$ равна нулю. Совершенно так же можно показать, что кривая, имеющая явное уравнение $x = \psi(y)$, где $\psi(y)$ — непрерывная в некотором конечном промежутке функция, также имеет внешнюю площадь, равную нулю. Назовем *простой кривой* всякую кривую, которая может быть разбита на конечное число частей так, чтобы каждая часть имела уравнение $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, где $\varphi(x)$ или $\psi(y)$ — непрерывные функции в соответствующем конечном промежутке изменения независимой переменной. Из предыдущего вытекает, что *внешняя площадь простой кривой равна нулю.* Отсюда вытекает достаточный признак квадрируемости области.

Теорема. *Если граница области (или множества) $(P)$ есть простая кривая, то $(P)$ — квадрируема.*

Из предыдущих рассуждений вытекает, что если мы квадрируемую область разобьем на конечное число областей при помощи простой кривой (или, что то же, конечного числа простых кривых), то каждая новая область также будет квадрируема, и сумма площадей новых областей будет равна площади прежней области. Напомним, что только что сказанное имеет место и при разбиении любого квадрируемого множества на конечное число квадрируемых частей.

Нетрудно показать, что определенный интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ дает площадь, в указанном выше смысле, области, ограниченной кривой $y = \varphi(x)$, осью $OX$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, причем мы считаем $\varphi(x) > 0$.

**92. Независимость от выбора осей.** Определение площадей (внутренней и внешней) тесно связано с выбором осей, поскольку мы производим все измерения при помощи сетки квадратов со сторонами, параллельными осям. Параллельный перенос координатных осей при таком измерении не играет, конечно, роли, но при повороте осей вокруг начала картина существенно меняется, так как нам приходится покрывать $(P)$ другими сетками квадратов. Вместо того, чтобы поворачивать координатные оси на угол $\varphi$ против часовой стрелки, можно оставить оси и повернуть $(P)$ вокруг начала на угол $(-\varphi)$. Отсюда видно, что независимость площади от выбора осей сводится к тому, что площадь не меняется, если мы будем двигать $(P)$, как целое, по плоскости. При параллельном переносе это очевидно, а при повороте вокруг начала это требует доказательства.

Нетрудно доказать следующую теорему, аналогичную теореме из [90].

Теорема I. *Пусть вся плоскость разбита на квадрируемые области $(\Delta_\nu)$, диаметры которых не превышают некоторого числа $d$ и такие, что всякая ограниченная часть плоскости имеет общие точки лишь с конечным числом таких областей. Обозначим через $\Sigma$ сумму площадей тех из этих областей, все точки которых, включая точки их границы, суть внутренние точки $(P)$, и через $\Sigma + \Sigma'$ — сумму площадей тех из этих областей, которые имеют хоть одну общую точку с $(P)$. При этом, если $d \to 0$, то $\Sigma$ стремится к внутренней площади $(P)$, а $\Sigma + \Sigma'$ — к внешней площади $(P)$.*

Смысл этой теоремы состоит в том, что при вычислении внутренней и внешней площадей мы можем вместо сетки квадратов со сторонами, параллельными осям, пользоваться любой сеткой квадрируемых областей при условии, что $d \to 0$.

Отметим, что граница квадрата, расположенного любым образом относительно осей координат, есть простая кривая, и, следовательно, квадрат есть квадратируемая область. Указанную теорему мы используем лишь в том случае, когда плоскость разбита на сетку равных квадратов, и из этой теоремы непосредственно вытекает, что при измерении площади области мы могли бы пользоваться, например, сеткой квадратов со сторонами, не параллельными осям, лишь бы стороны квадратов стремились к нулю. Но при этом нам надо знать, чему равна площадь квадрата со сторонами, не параллельными осям. Остается, строго говоря, неясным, что площадь квадрата со сторонами, не параллельными осям, равна квадрату его стороны, ибо в основу теории измерения площадей мы положили площадь квадрата со сторонами, параллельными осям. Если мы докажем, что площадь любого квадрата равна квадрату его стороны, то, в силу сказанного выше, мы можем утверждать, что свойство квадрируемости и величина площади не зависят от выбора направления осей и что площадь не меняется при движении.

Итак, все сводится к доказательству теоремы II.

Теорема II. *Если повернуть квадрат со сторонами, параллельными осям, вокруг начала, то площадь его остается прежней*. Напомним прежде всего, что граница любого квадрата есть простая кривая, и, следовательно, квадрат есть квадрируемая область. Пусть $(q)$ — исходный квадрат со стороной $r$ и $(q_1)$ — квадрат, полученный после поворота. Такими же буквами будем обозначать их площади и положим $\frac{q_1}{q} = s$. При помощи параллельного переноса, не меняющего площади, мы можем совместить $(q)$ с любым параллельным квадратом со стороною $r$ и, следовательно, для всех квадратов со стороной $r$ отношение $\frac{q_1}{q}$ при данном повороте плоскости будет одно и то же. Совершим теперь над плоскостью преобразование подобия с центром в начале, при котором длины всех радиусов-векторов, выходящих из начала, умножаются на некоторое положительное число $k$. Такое преобразование сводится к переходу точки $(x, y)$ в точку с координатами $(kx, ky)$ [3]. При этом преобразовании все линейные размеры умножаются на $k$. Всякий квадрат со сторонами, параллельными осям, переходит в такой же квадрат, но длины его сторон умножаются на $k$. Отсюда следует, что площади (внутренние и внешние) при этом умножаются на $k^2$. Обозначим через $(q')$ и $(q_1')$ те квадраты, которые получаются из $(q)$ и $(q_1)$ при помощи указанного преобразования подобия. Очевидно, что $(q_1')$ получается из $(q')$ при помощи того же вращения, при помощи которого $(q_1)$ получается из $(q)$. Но $q_1' = k^2 q_1$ и $q' = k^2 q$, и, следовательно, $\frac{q_1'}{q'} = s$. Но, подбирая соответственным образом число $k$, мы можем перевести квадрат $q$ в квадрат с любой длиной стороны. Таким образом мы видим, что отношение $\frac{q_1}{q} = s$ при данном повороте плоскости имеет одну и ту же величину для всех исходных квадратов $q$. Покажем теперь, что $s = 1$. Рассмотрим круг $x^2 + y^2 < 1$ с центром в начале и радиусом единица, покрытый сеткой квадратов со сторонами, параллельными осям. Этот круг есть, очевидно, квадрируемая область.

При повороте вокруг начала площадь квадрата получит множитель $s$, и в силу определения площади и доказанной выше теоремы, площадь круга также должна умножаться на $s$. Но при упомянутом повороте круг перейдет сам в себя, и его площадь не должна измениться, т. е. $s = 1$, что и требовалось доказать.

**93. Случай любого числа измерений.** Вся теория площадей переносится и на трехмерное пространство, и мы получаем таким образом понятия внутреннего и внешнего объема и квадрируемой трехмерной области или множества. Роль квадратов играют кубы.

Можно построить совершенно аналогичную теорию измерения „площадей" или теорию меры для любого $n$-мерного пространства. Точкой такого пространства назовем $n$ вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, расположенных в определенном порядке. Расстояние между двумя точками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ будем выражать формулой:

$$r = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (y_s - x_s)^2}\ .$$

Сферой с центром $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и радиусом $\rho$ назовем совокупность точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s - a_s)^2 \leqslant \rho^2.$$

Наконец, кубом с ребром $r$ назовем совокупность точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_s \leqslant x_s \leqslant b_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где $b_s - a_s = r$. Мерой куба будем считать число $r^n$. Все эти определения дают нам возможность повторить всю предыдущую теорию для $n$-мерного пространства и установить понятия внутренней и внешней меры области или вообще множества и при их совпадении говорить, что область (или множество) измерима (на плоскости — квадрируема). Все доказанные теоремы будут справедливы и для $n$-мерного пространства. Параллельный перенос в $n$-мерном пространстве выражается формулами преобразования: $x'_s = x_s + a_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, а поворот вокруг начала выражается некоторым линейным преобразованием, при котором расстояние точки до начала остается неизменным. Более подробно об этих преобразованиях мы будем говорить в томе III.

При определении связной области мы пользовались понятием ломаной линии, т. е. линии, состоящей из конечного числа отрезков прямых. В $n$-мерном пространстве прямой мы назовем линию (т. е. множество точек), имеющую параметрическое уравнение $x_s = \varphi_s(t)$, где $\varphi_s(t)$ — полиномы первой степени. Примерами областей в $n$-мерном пространстве являются множества внутренних точек сферы или куба. Обычно область $n$-мерного пространства определяется некоторыми неравенствами, которым должны удовлетворять координаты точек этой области. Заметим, что при $n = 1$, т. е. на прямой, связная область есть обязательно множество внутренних точек некоторого промежутка. То, что мы говорили о простых кривых, можно обобщить на $n$-мерное пространство. В частности, если в трехмерном пространстве имеется поверхность с явным уравнением $z = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция в некоторой ограниченной замкнутой области плоскости $XY$, то такая поверхность есть измеримое множество, и ее мера равна нулю. Далее легко, как и в **[91]**, построить понятие простой поверхности, и всякая область, ограниченная простой поверхностью, будет измеримой.

**94. Теорема Дарбу.** Установив понятие площади, мы перейдем к теории двукратных интегралов. Все наши рассуждения будут иметь место и для трехкратных интегралов. При этом мы будем вести эти рассуждения по той же схеме, как это мы делали в первом томе по отношению к обыкновенным интегралам и будем пропускать подробные рассуждения в тех случаях, когда они совершенно аналогичны рассуждениям из тома I.

19 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

Пусть $(\sigma)$ — некоторая квадрируемая область плоскости и $f(N)$ — ограниченная функция, определенная во всех точках замкнутой области $(\sigma)$. Разделим $(\sigma)$ на конечное число квадрируемых областей $(\sigma_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и, как всегда, обозначим через $\sigma$ и $\sigma_k$ площади соответственных областей, так что $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$. Положим, что диаметры всех $(\sigma_k)$ меньше некоторого числа $d$. Пусть, далее, $N_k$ — любая точка, принадлежащая замкнутой области $(\sigma_k)$.

Составим сумму произведений:

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\sigma_k. \tag{1}$$

В дальнейшем мы выясним, для каких функций $f(N)$ эта сумма имеет определенный предел при $d \to 0$. Пусть $M_k$ и $m_k$ — точные верхняя и нижняя границы значений $f(N)$ в замкнутой области $(\sigma_k)$. Наряду с суммой (1) составим суммы:

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k\sigma_k \tag{2}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k\sigma_k. \tag{3}$$

Как и в [I, 115], имеем неравенства

$$s \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\sigma_k \leqslant S, \tag{4}$$

и можем утверждать, что при всяком разбиении $(\sigma)$ на части $S$ и $s$ лежат между границами $m\sigma$ и $M\sigma$, где $M$ и $m$ — точные верхняя и нижняя границы значений $f(N)$ в замкнутой области $(\sigma)$.

Далее более подробно рассмотрим сумму $S$, считая все значения $f(N)$ положительными. Пусть внутри области $(\sigma_k)$ находятся три квадрируемые области $(\sigma_k^{(1)})$, $(\sigma_k^{(2)})$ и $(\sigma_k^{(3)})$, не имеющие общих внутренних точек, и пусть $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, $M_k^{(3)}$ — точные верхние границы значений $f(N)$ в замкнутых областях $(\sigma_k^{(1)})$, $(\sigma_k^{(2)})$, $(\sigma_k^{(3)})$. Принимая во внимание, что $M_k^{(1)}, M_k^{(2)}, M_k^{(3)} \leqslant M_k$, $\sigma_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} + \sigma_k^{(3)} \leqslant \sigma_k$, и все значения $f(N)$ — положительны, можем утверждать, что

$$M_k^{(1)}\sigma_k^{(1)} + M_k^{(2)}\sigma_k^{(2)} + M_k^{(3)}\sigma_k^{(3)} \leqslant M_k\sigma_k. \tag{5}$$

Пусть $L$ — точная нижняя граница всевозможных значений $S$. Покажем, что $S \to L$ при $d \to 0$. Для этого достаточно показать, что при любом положительном $\varepsilon$ существует такое положительное $\eta$, что $S < L + \varepsilon$, если только $d < \eta$. По определению $L$ существует такой вполне определенный закон (I) разбиения $(\sigma)$ на части $(\sigma_k')$, что существующее этому закону значение $S$, которое мы обозначим через $S'$, меньше $L + \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $(\lambda_0)$—замкнутое множество точек, состоящее из точек границы $(\sigma)$ и границ всех областей $(\sigma_k')$. По определению квадрируемости площадь $(\lambda_0)$ равна нулю, и мы можем заключить $(\lambda_0)$ строго внутрь конечного числа квадратов, сумма площадей

которых меньше $\frac{\varepsilon}{2M}$. Эти квадраты образуют замкнутую область $(Q_0)$ и пусть $(l_0)$ — граница $(Q_0)$. Пусть $\delta$ — положительное расстояние между замкнутыми множествами $(\lambda_0)$ и $(l_0)$ без общих точек. Покажем, что достаточно взять $\eta = \frac{1}{2}\delta$. Действительно, пусть разбиение $(\sigma)$ на части имеет $d < \frac{1}{2}\delta$. Разобьем эти части на два класса. К первому отнесем те, которые не имеют общих точек с $(\lambda_0)$, а ко второму классу — остальные. Первые части обозначим через $(\sigma_l)$, а вторые — через $(\tau_m)$. Сумма $S$ разобьется на две суммы: $S = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \sum \mu_l \sigma_l; \qquad S_2 = \sum \nu_m \tau_m,$$

где $\mu_l$ и $\nu_m$ — точные верхние границы значений $f(N)$ в замкнутых областях $(\sigma_l)$ и $(\tau_m)$.

Всякая область $(\sigma_l)$ лежит внутри некоторой области $(\sigma'_k)$ из первого закона (I) разбиения $(\sigma)$, и в силу (5) сумма тех слагаемых сумм $S_1$, у которых $(\sigma_l)$ лежит внутри $(\sigma'_k)$, не больше $M_k \sigma'_k$ и, следовательно, $S_1 \leqslant S'$, т. е., в силу $S' < L + \frac{\varepsilon}{2}$, имеем $S_1 < L + \frac{\varepsilon}{2}$. Обращаемся к сумме $S_2$. Области $(\tau_m)$ имеют общие точки с $(\lambda_0)$ и их диаметры меньше $\frac{1}{2}\delta$. Следовательно, все эти области находятся внутри квадратов, образующих $(Q_0)$. Поэтому $\sum \tau_m$ не превосходит суммы площадей этих квадратов, т. е. $\sum \tau_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$. Множители $\nu_m \leqslant M$, и, следовательно,

$$S_2 = \sum \nu_m \tau_m \leqslant M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из неравенств $S_1 < L + \frac{\varepsilon}{2}$ и $S_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и вытекает требуемое неравенство $S < L + \varepsilon$ при $d < \eta$. Наше утверждение о том, что $S \to L$, доказано для положительных функций. Повторяя рассуждение из [I, 115], убедимся, что оно имеет место для любых ограниченных функций. Точно так же доказывается, что $s$ при $d \to 0$ стремится к $l$, где $l$ — точная верхняя граница значений $s$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема Дарбу. *При беспредельном уменьшении наибольшего из диаметров частных областей $(\sigma_k)$ суммы $s$ и $S$ стремятся к определенным пределам $l$ и $L$, причем $l \leqslant L$.*

Все предыдущие рассуждения дословно применимы и в том случае, когда $(\sigma)$ и $(\sigma_k)$ суть любые квадрируемые множества. Теорема Дарбу остается справедливой.

**95. Интегрируемые функции.** Функция $f(N)$ называется интегрируемой по $(\sigma)$, если существует определенный предел сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\sigma_k \tag{6}$$

при стремлении к нулю наибольшего из диаметров $d$ областей (множеств) $(\sigma_k)$. Этот предел и называется двойным интегралом от функции $f(N)$ по

области (множеству) ($\sigma$):

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \lim \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\sigma_k.$$

Как и в [I, 116] *можно показать*, что *необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(N)$ заключается в совпадении пределов $l$ и $L$ сумм $s$ и $S$*, т. е. *в том, чтобы разность этих сумм*

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\,\sigma_k \qquad (7)$$

*стремилась к нулю при $d \to 0$.* При этом общий предел сумм $s$ и $S$ равен величине интеграла.

Если $f(N) = 1$, то сумма (6) всегда равна площади $\sigma$ области (множества) ($\sigma$), т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma = \sigma.$$

Отметим еще, что, в силу теоремы Дарбу, указанное выше условие интегрируемости можно сформулировать следующим образом: *при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое подразделение* ($\sigma$) *на квадрируемые части, для которого выражение* (7) *меньше* $\varepsilon$. Используя указанное условие интегрируемости, можно выяснить некоторые классы интегрируемых функций.

1. *Если $f(N)$ непрерывна в замкнутой области (множестве)* ($\sigma$), *то она интегрируема.* Это доказывается совершенно так же, как и в [I, 116].

2. Пусть теперь $f(N)$ попрежнему ограничена в замкнутой области ($\sigma$), но имеет точки разрыва. Положим, что площадь множества ($R_0$) этих точек разрыва равна нулю. Покажем, что при этом $f(N)$ — интегрируема.

Положим сначала, что ($\sigma$) есть квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и будем производить его разбиение тоже на квадраты. Случай любых квадрируемых областей мы рассмотрим в следующем параграфе. Пусть $\varepsilon$ — заданное положительное число. Можно разбить ($\sigma$) на равные квадраты так, что все точки ($R_0$) будут находиться строго внутри области типа ($\alpha$), площадь которой меньше $\frac{\varepsilon}{2\mu}$, где $\mu = M - m$ [ср. 91]. В оставшейся области типа ($\alpha$) функция $f(N)$ будет равномерно непрерывна, так как эта замкнутая область не содержит точек ($R_0$). Пусть ($E$) и ($F$) — эти области. В силу равномерной непрерывности $f(N)$ в замкнутой области ($\bar{F}$) мы можем подразделить эту область на столь мелкие части, чтобы слагаемые суммы (7), относящиеся к этим частям, имели сумму меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Принимая во внимание, что $M_k - m_k \leqslant M - m = \mu$ и что площадь $(E) < \frac{\varepsilon}{2\mu}$, можем утверждать, что слагаемые суммы (7), относящиеся к ($E$), которое мы можем и не подразделять, меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, а следовательно, вся сумма (7) меньше $\varepsilon$, откуда и следует, что $f(N)$ — интегрируема.

Итак, *если множество точек разрыва ограниченной функции $f(N)$ имеет площадь нуль, то $f(N)$ интегрируема. Условие это, наверно, будет выполнено, если $f(N)$ имеет конечное число точек разрыва или если точки разрыва находятся на конечном числе простых кривых.*

**96. Свойства интегрируемых функций.** Укажем вкратце основные свойства интегрируемых функций, как это мы делали в **[I, 117]** для простых интегралов.

I. *Если $f(N)$ интегрируема в квадрируемой области* $(\sigma)$ *и мы изменим значение $f(N)$ во множестве $(R_0)$ точек, имеющем площадь нуль, сохраняя ограниченность функции, то новая функция будет также интегрируема, а величина интеграла от этого не изменится.*

Для того случая, когда $(\sigma)$ есть квадрат со сторонами, параллельными осям координат, доказательство совершенно аналогично доказательству конца предыдущего номера. Попрежнему выделяются области $(E)$ и $(F)$ типа $(\alpha)$. В области $(F)$ значения $f(N)$ не изменились, и, в силу интегрируемости $f(N)$, слагаемые суммы (7), относящиеся к подразделениям $(F)$ при достаточном измельчании этих подразделений, дадут сумму меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Слагаемое, относящееся к $(E)$, будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу малости площади $(E)$, и, как и выше, отсюда следует интегрируемость новой функции. Далее, множество $(R_0)$ не имеет внутренних точек, и при разбиении $(\sigma)$ на части $(\sigma_k)$ в каждой части найдется точка $N_k$, в которой значение $f(N)$ осталось неизменным. Пользуясь такими точками при составлении суммы (6), мы убеждаемся в том, что величина интеграла не изменилась.

II. *Если $f(N)$ интегрируема в квадрируемой области* $(\sigma)$ *и эта область разбита на конечное число квадрируемых областей* $(\sigma_1), (\sigma_2), \ldots, (\sigma_n)$, *то $f(N)$ интегрируема в каждой области* $(\sigma_k)$ *и интеграл по* $(\sigma)$ *равен сумме интегралов по* $(\sigma_k)$.

Будем разбивать $(\sigma)$ на части путем подразделения областей $(\sigma_k)$. При этом, в силу интегрируемости $f(N)$, сумма (7), состоящая из неотрицательных слагаемых, будет стремиться к нулю. Тем более будут стремиться к нулю суммы слагаемых, относящихся к каждой области $(\sigma_k)$, т. е. $f(N)$ интегрируема по $(\sigma_k)$. Вторая часть нашего утверждения непосредственно следует, если в сумме (6) производить переход к пределу для каждой отдельной суммы слагаемых, относящихся к областям $(\sigma_k)$. Наоборот, очевидно, что из *интегрируемости* по $(\sigma_k)$ *следует интегрируемость* по $(\sigma)$. Остаются справедливыми и остальные свойства интеграла, указанные в **[I, 117]** и относящиеся к вынесению постоянного множителя за знак интеграла, к интегрируемости суммы, произведения и частного интегрируемых функций, а также абсолютного значения интегрируемой функции. Теорема о среднем доказывается так же, как и для простого интеграла **[I, 95]**.

Перейдем теперь к доказательству второго из условий интегрируемости **[95]** и первого свойства настоящего параграфа для любой квадрируемой области $(\sigma)$. Пусть в этой области и на ее границе задана ограниченная функция $f(N)$, причем множество $(R_0)$ точек разрыва этой функции имеет площадь нуль. Построим квадрат $(Q)$ со сторонами, параллельными осям, содержащий замкнутую область $(\sigma)$ строго внутри себя, и введем новую функцию $f_1(N)$, определенную в замкнутом квадрате $(Q)$ следующим образом: $f_1(N) = f(N)$ в замкнутой области $(\sigma)$ и $f_1(N) = 0$ в остальных точках $(Q)$. Точки $(Q)$, не принадлежащие замкнутой области $(\sigma)$ и границе $(Q)$, образуют, как легко видеть, открытое множество (область), которое мы обозначим через $(\sigma_1)$. Граничные точки $(\sigma_1)$ находятся на границе $(l)$ области $(\sigma)$ и на границе $(Q)$. Поскольку $(\sigma)$ — квадрируема, площадь $(l)$ равна нулю, и то же можно сказать и о границе $(Q)$.

Следовательно, граница области $(\sigma_1)$ имеет также площадь нуль, т. е. $(\sigma_1)$ — квадрируема. Точки разрыва $f_1(N)$ в $(Q)$ суть точки $(R_0)$ и, может быть, еще точки, лежащие на $(l)$. Во всяком случае площадь множества точек разрыва $f_1(N)$ в $(Q)$ равна нулю, и поэтому $f_1(N)$ интегрируема по квадрату $(Q)$ **[95]**. Тем самым $f_1(N)$ интегрируема по $(\sigma)$ и $(\sigma_1)$.

Но $f_1(N) = f(N)$ в замкнутой области $(\sigma)$, и, следовательно, $f(N)$ интегрируема по $(\sigma)$, что мы и хотели доказать. Аналогично доказывается для $f(N)$ и первое свойство интегрируемых функций, доказанное выше для квадрата.

Вернемся к функции $f_1(N)$. Она равна нулю во внутренних точках $(\sigma)$, и нетрудно видеть, что интеграл от нее по $(\sigma_1)$ равен нулю, откуда следует:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(Q)} f_1(N)\,d\sigma.$$

Отметим еще, что, поскольку граница $(l)$ квадрируемой области $(\sigma)$ имеет площадь нуль, значения ограниченной функции $f(N)$ на $l$ не влияют на величину интеграла.

**97. Вычисление двойного интеграла.** Установим теперь формулу, которая приводит вычисление двойного интеграла к двум квадратурам. Рассмотрим сначала случай прямоугольника $(R)$ со сторонами:

$$x = a;\quad x = b;\quad y = c;\quad y = d, \tag{8}$$

параллельными осям. Положим, что $f(N) = f(x, y)$ — интегрируема по $(R)$, т. е. существует интеграл

$$\iint\limits_{(R)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{9}$$

Положим, кроме того, что при всяком $x$ из промежутка $(a, b)$ существует интеграл

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{10}$$

и повторный интеграл:

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{11}$$

Разобьем $(R)$ на части при помощи промежуточных точек деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

и пусть $(R_{ik})$ — частичный прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = x_i$, $x = x_{i+1}$; $y = y_k$; $y = y_{k+1}$. Пусть далее, $m_{ik}$, $M_{ik}$ — точные нижняя и верхняя границы значений $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике $(R_{ik})$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Интегрируя неравенство

$$m_{ik} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ik} \qquad [(x, y) \text{ из } (R_{ik})]$$

по промежутку $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$, получим

$$m_{ik}\,\Delta y_k \leqslant \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\,dy \leqslant M_{ik}\,\Delta y_k \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}),$$

причем $(y_k, y_{k+1})$ есть часть $(c, d)$, и написанный интеграл существует в силу существования интеграла (10) [**I, 117**]. Складывая эти неравенства,

получим:

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\,\Delta y_k \leqslant \int_c^d f(x, y)\,dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\,\Delta y_k.$$

Интегрируем по промежутку $(x_i, x_{i+1})$:

$$\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i;$$

написанный интеграл существует в силу существования интеграла (11). Суммируем последнее неравенство по $i$:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i \leqslant \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} M_{ik}\,\Delta y_k\,\Delta x_i.$$

Принимая во внимание, что произведение $\Delta y_k\,\Delta x_i$ выражает площадь $(R_{ik})$, можем утверждать, что крайние члены неравенства при беспредельном измельчании прямоугольников стремятся к интегралу (9), что и приводит к требуемой формуле:

$$\iint\limits_{(R)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx, \qquad (12)$$

т. е. *если существуют двойной интеграл* (9) *и повторный интеграл* (11), *то имеет место формула* (12), т. е. *эти интегралы равны.*

Заметим, что существование интеграла (11) предполагает существование интеграла (10). Если $f(N)$ — непрерывная функция в замкнутом прямоугольнике $(R)$, то интегралы (9) и (10), очевидно, существуют ([**95**] и [**I, 116**]). При этом, как мы видели [**80**], формула (10) дает непрерывную функцию от $x$, и, следовательно, интеграл (11) также существует. Рассмотрим теперь область $(\sigma)$, ограниченную двумя кривыми $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (черт. 83). Положим, что существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (13)$$

Черт. 83.

простые интегралы

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \qquad (14)$$

и повторный интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx. \qquad (15)$$

Пусть $(R)$ — прямоугольник, образованный прямыми (8), причем мы выбираем $c$ и $d$ так, чтобы при всех $x$ из $(a, b)$ мы имели $c < \varphi_1(x)$, а $d > \varphi_2(x)$, т. е. $(\sigma)$ составляет часть $(R)$. Определяем в $(R)$ функцию $f_1(N) = f_1(x, y)$, которая равна $f(N)$ в точках области $(\sigma)$ и равна нулю в тех точках $(R)$, которые не принадлежат $(\sigma)$. Кривые $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ разбивают $(R)$ на три части: $(\sigma)$ и области (I) и (II), лежащие под и над $(\sigma)$ (черт. 83). Функция $f_1(N)$ интегрируема по $(\sigma)$, так как там она совпадает с $f(N)$ и интегрируема по (I) и (II), так как во внутренних точках этих областей она равна нулю.

Следовательно $f_1(N)$ интегрируема по $(R)$, [96] и

$$\iint\limits_{(R)} f_1(N)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(N)\, d\sigma. \tag{16}$$

Точно так же существуют при всяком $x$ из промежутка $(a, b)$ интеграл

$$F(x) = \int\limits_c^d f_1(x, y)\, dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \tag{17}$$

и интеграл (15). Следовательно к функции $f_1(N)$ применима формула (12) и, в силу (16) и (17), эта формула дает формулу приведения двойного интеграла по $(\sigma)$ к повторному:

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx. \tag{18}$$

При этом выводе мы предполагали *существование интегралов* (13), (14) и (15). Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $(\sigma)$, то, как и выше, интегралы (13) и (14) существуют. Кроме того, в силу [80], формула (14) определяет непрерывную функцию от $x$, и, следовательно, интеграл (15) также существует. Совершенно аналогично можно доказать и формулу приведения трехкратного интеграла к повторному интегралу, содержащему три квадратуры [58].

**93. $n$-кратные интегралы.** Все сказанное в [94] и [95] переносится непосредственно на случай $n$-мерного пространства и приводит к понятию интеграла от ограниченной функции по ограниченной измеримой $n$-мерной области, к указанному выше условию интегрируемости и к обычным свойствам интегралов. Точно так же, аналогично [97], имеет место формула приведения $n$-кратного интеграла к повторному, содержащему $n$ квадратур. Формулу эту можно доказать путем индукции, изменяя $n$ на единицу. Пределы в кратном интеграле вычисляются из тех неравенств, которыми определяется область интегрирования. Пусть $f(N) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в замкнутой квадрируемой области $(P_n)$ $n$-мерного пространства, внутренние точки которой определяются условиями: точки $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ суть внутренние точки некоторой измеримой области $Q_{n-1}$ $(n-1)$-мерного пространства и $x_n$ удовлетворяет неравенствам:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) < x_n < \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — непрерывные функции в $Q_{n-1}$. При этом $n$-кратный интеграл выразится квадратурой по $x_n$ и $(n-1)$-крат-

ным интегралом по $(Q_{n-1})$:

$$\int\int\limits_{(P_n)}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int\int\limits_{(Q_{n-1})}\ldots\int\left[\int\limits_{\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n\right]dx_1\ldots dx_{n-1}. \qquad (19)$$

Обобщением прямоугольника плоскости со сторонами, параллельными осям, является призматоид $(R_n)$ $n$-мерного пространства, определяемый неравенствами:

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1;\ \ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2;\ \ldots;\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n. \qquad (20)$$

Интегрирование по этому призматоиду приводится к повторному интегралу, все пределы которого постоянны:

$$\int\int\limits_{(R_n)}\ldots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1\ldots\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1}\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n,$$

и можно менять произвольно порядок интегрирования, оставляя по каждой переменной прежние пределы.

Для читателя, знакомого с понятием определителя, укажем и формулу замены переменных в $n$-кратном интеграле. Положим, что вместо переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вводятся новые переменные $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, и пусть

$$x_i = \varphi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (21)$$

— формулы, выражающие старые переменные через новые.

Введем в рассмотрение так называемый функциональный определитель системы функций (21):

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1'}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2'}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n'} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1'}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2'}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1'}, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2'}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n'} \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Формула замены переменных имеет вид

$$\int\int\limits_{(P_n)}\ldots\int f\,dx_1\ldots dx_n = \int\int\limits_{(P_n')}\ldots\int f\,|D|\,dx_1'\ldots dx_n', \qquad (23)$$

где неравенства, определяющие новую область интегрирования $(P_n')$, получаются из неравенств, определяющих $(P_n)$, если там заменить $x_i$ их выражениями (21). Условия применимости формулы (23) те же, которые были указаны для двойного интеграла в [**77**]. Несобственные $n$-кратные интегралы определяются так же, как и несобственные двойные и тройные интегралы [**86**]. Перейдем теперь к примерам.

**99. Примеры.** 1. Тетраэдр $n$-мерного пространства, ограниченный гиперплоскостями:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 0; \ldots ;\ x_n = 0;\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \quad (a > 0),$$

определяется неравенствами:

$$x_1 > 0;\quad x_2 > 0; \ldots ;\ x_n > 0;\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n < a. \tag{24}$$

При $n = 3$ получается обычный тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = a$. Введем новые переменные, положив:

$$x_1' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;\qquad x_2' = \frac{a(x_2 + \ldots + x_n)}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

$$x_3' = \frac{a(x_3 + \ldots + x_n)}{x_2 + \ldots + x_n};\ \ldots;\quad x_n' = \frac{ax_n}{x_{n-1} + x_n},$$

откуда следует

$$x_1 + \ldots + x_n = x_1';\quad a(x_2 + \ldots + x_n) = x_1'x_2';$$

$$a^2(x_3 + \ldots + x_n) = x_1'x_2'x_3';\ \ldots;\qquad a^{n-1}x_n = x_1'x_2'\ldots x_n'.$$

Наоборот, старые переменные выражаются через новые по формулам:

$$x_1 = \frac{x_1'(a - x_2')}{a};\qquad x_2 = \frac{x_1'x_2'(a - x_3')}{a^2};\ \ldots;$$

$$x_{n-1} = \frac{x_1'x_2'\ldots x_{n-1}'(a - x_n')}{a^{n-1}};\quad x_n = \frac{x_1'x_2'\ldots x_n'}{a^{n-1}}.$$

Из этих формул непосредственно вытекает, что тетраэдр (24) можно заменить $n$-мерным кубом:

$$0 < x_1' < a;\ 0 < x_2' < a; \ldots ;\ 0 < x_n' < a. \tag{25}$$

2. Определим меру (объем) $n$-мерного шара с центром в начале и радиусом $r$, определяемого неравенством:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2. \tag{26}$$

Если совершить преобразование подобия с коэффициентом подобия $k$, то объем всякого куба умножится на $k^n$, а радиус $r$ умножится на $k$. Отсюда непосредственно следует, что искомая мера $v_n$, являющаяся функцией одного $r$, должна иметь вид

$$v_n = C_n r^n, \tag{27}$$

где $C_n$ — численная постоянная, различная для различных $n$. Если пересечь шар (26) плоскостью постоянного $x_1$, то, как это видно из формулы (26), получится $(n-1)$-мерный шар, квадрат радиуса которого равен $(r^2 - x_1^2)$. В силу (27) мера этого шара будет $C_{n-1}(r^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Часть $n$-мерного шара, заключенная между плоскостями $x_1$ и $(x_1 + dx_1)$, будет иметь меру

$C_{n-1}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_1$, откуда вытекает следующее выражение для $v_n$:

$$v_n = C_n r^n = C_{n-1}\int_{-r}^{+r}(r^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx_1,$$

или, совершая подстановку $x_1 = r\cos\varphi$, получим следующую связь между $C_n$ и $C_{n-1}$:

$$C_n = C_{n-1}\int_0^{\pi}\sin^n\varphi\,d\varphi = 2C_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi, \tag{28}$$

где, как известно [I, 100],

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{при четном } n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 3} \quad \text{при нечетном } n.$$

Заменяя в (28) $n$ на $(n-1)$, получим:

$$C_{n-1} = 2C_{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,d\varphi.$$

Из написанных равенств вытекает при любом целом $n$:

$$C_n = C_{n-2}\,\frac{2\pi}{n}. \tag{29}$$

Но, как известно, $C_2 = \pi$ и $C_3 = \frac{4}{3}\pi$. Применяя формулу (29), получим отсюда:

$$C_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\ldots 2} \quad \text{при четном } n,$$

$$C_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\ldots 1} \quad \text{при нечетном } n.$$

ГЛАВА IV

# ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

## § 10. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

**100. Сложение и вычитание векторов.** Настоящая глава будет посвящена главным образом изложению векторного анализа. В настоящее время имеется большое число специальных курсов векторного анализа, и мы, не вдаваясь в подробности, выясним лишь основные понятия и факты, непосредственно связанные с предшествующим материалом и необходимые нам для изложения основ математической физики.

При рассмотрении физических явлений мы встречаемся с величинами двух родов — скалярными и векторными.

*Скалярной величиной или просто скаляром называется величина, которая при определенном выборе единицы меры вполне характеризуется числом, ее измеряющим.*

Так например, если в пространстве имеется нагретое тело, то температура в каждой точке этого тела характеризуется определенным числом, и мы можем сказать поэтому, что температура есть величина скалярная. Плотность, энергия, потенциал представляют собою также скалярные величины.

В качестве примера векторной величины рассмотрим скорость. Чтобы вполне охарактеризовать скорость, недостаточно знать число, измеряющее величину скорости, но необходимо указать и ее направление. Мы можем охарактеризовать скорость, строя вектор — отрезок, имеющий в данном масштабе длину, равную величине скорости, и направление, совпадающее с направлением скорости. Таким образом *вектор вполне определяется своей длиной и направлением.* Сила, ускорение, импульс представляют собой также векторные величины.

Вернемся к примеру нагретого тела. Температура $u$ в каждой точке этого тела характеризуется определенным числом или, как говорят, есть функция точки в пространстве, занятом телом. Относя пространство к системе прямоугольных координат $XYZ$, мы можем сказать, что скаляр $u$ есть функция независимых переменных $(x, y, z)$, определенная в той области пространства, которая занята нагретым

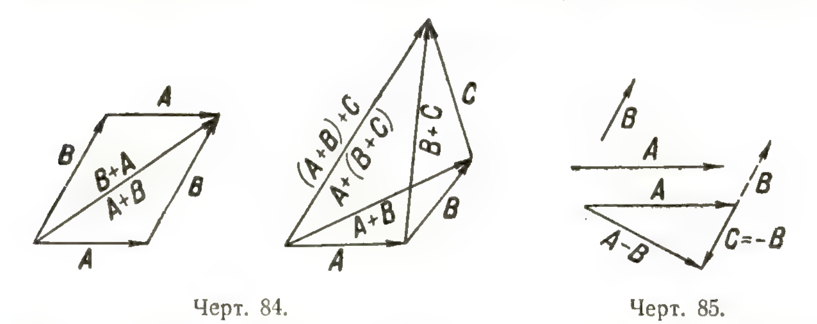
телом. Здесь мы имеем пример так называемого поля скалярной величины, или скалярного поля.

Если же в каждой точке некоторой области определен вектор, то мы имеем векторное поле. Таков пример элетромагнитного поля, в каждой точке которого имеется определенная электрическая и магнитная сила.

В некоторых случаях бывает важно знать точку приложения вектора, т. е. ту точку пространства, с которой совпадает начало вектора. В этом случае мы имеем дело со связанными векторами. Однако в дальнейшем мы будем иметь дело преимущественно со свободными векторами, т. е. такими, для которых точка приложения может лежать где угодно. Поэтому мы будем считать равными два вектора, если они равны по величине (длине) и имеют одинаковое направление.

Векторы в дальнейшем мы будем обозначать полужирным шрифтом **A**, **B**, ..., их величины (длины) — соответственно символами $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, ..., скаляры же — обычными буквами латинского алфавита.

Пусть имеются несколько векторов **A**, **B**, **C**. *Из некоторой точки O построим вектор* **A**, *из его конца построим вектор* **B**, *из конца*




Черт. 84. Черт. 85.

*этого вектора — вектор* **C**. *Вектор* **S**, *который имеет начало в начале первого вектора, а конец в конце последнего вектора, называется суммой данных векторов*:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Сумма векторов обладает основными свойствами обыкновенной суммы, а именно — свойствами переместительным и сочетательным, выражающимися формулами (черт. 84)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

*Если из конца вектора* **A** *построим вектор* **C**, *по величине равный, а по направлению противоположный вектору* **B**, *то вектор* **M**, *имеющий начало в начале вектора* **A**, *а конец в конце вектора* **C**, *называется разностью векторов* **A** *и* **B** (черт. 85):

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Нетрудно видеть, что этот вектор вполне определяется соотношением:

$$\mathbf{B} + \mathbf{M} = \mathbf{A}.$$

Обозначим, вообще, через $(-\mathbf{N})$ вектор, по величине равный, а по направлению противоположный вектору $\mathbf{N}$. Тогда разность векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно определить, как сумму $\mathbf{A}$ и $(-\mathbf{B})$, т. е.

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Нетрудно показать, что определенные таким образом понятия о сумме и разности векторов подчиняются тем же правилам, что и обыкновенные алгебраические сумма и разность, на чем мы останавливаться не будем.

Правило сложения векторов имеет много приложений в механике и физике. Если, например, точка участвует в нескольких движениях, то ее окончательная скорость получается по правилу сложения из тех скоростей, которые она имеет в отдельных движениях. По тому же правилу получается равнодействующая нескольких сил, действующих на одну и ту же точку.

Заметим, что если при сложении конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого, т. е. если построенная по указанному выше правилу ломаная линия будет замкнутой, то говорят, что сумма рассматриваемых векторов равна нулю

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0.$$

В частности, очевидно, что

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0.$$

Вообще, вектор называется равным нулю, если его величина равна нулю. В этом случае о его направлении говорить не приходится.

**101. Умножение вектора на скаляр. Компланарность векторов.** *Если имеем вектор* $\mathbf{A}$ *и веществнннoе число* $a$, *то произведением* $a\mathbf{A}$ *или* $\mathbf{A}a$ *называется вектор, по величине равный* $|a| \cdot |\mathbf{A}|$, *а по направлению совпадающий с* $\mathbf{A}$, *если* $a > 0$, *или противоположный* $\mathbf{A}$, *если* $a < 0$. *В случае* $a = 0$ *произведение* $a\mathbf{A}$ *также равно нулю.*

Таким образом, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — два вектора, имеющих одинаковые или противоположные направления, то между ними существует соотношение:

$$\mathbf{B} = n\mathbf{A},$$

которое можно написать в более симметричном виде:

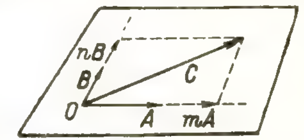
$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} = 0,$$

положив $n = -\frac{a}{b}$.

Наоборот, наличие написанного соотношения указывает на то, что векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковые или противоположные направления.

Пусть теперь даны два каких-нибудь вектора **A** и **B**, направления которых не совпадают и не противоположны. Через произвольную точку $O$ (черт. 86) проведем две прямые, параллельные данным векторам. Они определят плоскость, параллельную не только векторам **A** и **B**, но и всем векторам вида $m\mathbf{A}$ и $n\mathbf{B}$ при произвольных значениях чисел $m$ и $n$, а в силу правила сложения — также и их сумме

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}.$$




Черт. 86.

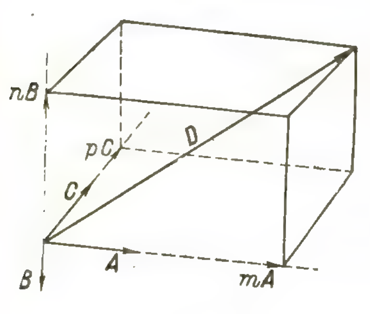
Обратно, всякий вектор **C**, параллельный построенной плоскости, можно представить в виде $m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно отложить этот вектор от точки $O$ и представить его, как диагональ параллелограмма, стороны которого параллельны **A** и **B**. Написанное выше соотношение можно переписать в более симметричном виде:

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0,$$

и оно выражает условие компланарности трех векторов, т. е. того обстоятельства, что эти три вектора параллельны одной и той же плоскости. Если **A** и **B** имеют одинаковые или противоположные направления, то векторы **A** и **B** компланарны с любым вектором **C**, и в предыдущем соотношении надо считать $c = 0$.

**102. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.** Предположим теперь, что имеются три некомпланарных вектора **A**, **B** и **C**. Всякий вектор можно представить как диагональ параллелепипеда, три ребра которого параллельны векторам **A**, **B** и **C**. Таким образом всякий вектор может быть выражен через три некомпланарных вектора в виде (черт. 87):

$$\mathbf{D} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C}.$$




Черт. 87.

Отсюда следует, что между всякими четырьмя векторами существует соотношение вида:

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + d\mathbf{D} = 0.$$

Если три первых вектора компланарны, то надо считать лишь $d = 0$.

Особенно важный частный случай предыдущего правила разложения вектора по трем векторам мы имеем тогда, когда пространство отнесено к прямоугольной системе координат $XYZ$, векторы же **A**, **B**, **C** по длине равны единице (такие векторы мы будем называть вообще

единичными) и имеют направление осей $OX$, $OY$, $OZ$. В этом случае они называются *основными векторами* или *ортами* и обозначаются буквами **i**, **j**, **k**.

Всякий вектор **A** можно представить в виде

$$\mathbf{A} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}. \qquad (1)$$

Если отложить вектор **A** от начала координат, то числа $m$, $n$, $p$ дадут координаты его конца и выразят проекции вектора **A** на координатные оси. Эти проекции мы в дальнейшем будем обозначать через $A_x$, $A_y$, $A_z$ и называть *слагающими* или *составляющими вектора* **A** по координатным осям. Предыдущее соотношение может быть тогда переписано в виде:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}. \qquad (2)$$

Если $n$ — любое направление в пространстве, то проекция вектора **A** на это направление будет

$$A_n = |\mathbf{A}| \cos(n, \mathbf{A})$$

или, принимая во внимание выражение для косинуса угла между двумя направлениями, известное из аналитической геометрии:

$$A_n = |\mathbf{A}| [\cos(n, X)\cos(\mathbf{A}, X) + \cos(n, Y)\cos(\mathbf{A}, Y) + \\ + \cos(n, Z)\cos(\mathbf{A}, Z)] = A_x\cos(n, X) + A_y\cos(n, Y) + A_z\cos(n, Z).$$

При сложении векторов составляющие их, очевидно, складываются (проекция замыкающей равна сумме проекций составляющих).

**103. Скалярное произведение.** *Скалярным произведением двух векторов* **A** *и* **B** *называется скаляр, величина которого равна произведению величин этих векторов, умноженному на косинус угла, образованного ими.*

*Скалярное произведение обозначают символом* **A** · **B**, *так что*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \qquad (3)$$

Из этого определения непосредственно следует, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

т. е. для скалярного произведения имеет место *переместительный закон*.

Если векторы **A** и **B** образуют прямой угол, то, очевидно

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

В частности, для основных векторов будем иметь:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Если векторы **A** и **B** имеют одно и то же направление, то

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$$

а если их направления противоположны, то

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-|\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

В частности,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2 \qquad (4)$$

и

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1. \qquad (5)$$

Скалярное произведение выражается через слагающие векторов следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{B})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\,[\cos(\mathbf{A},\ X)\cos(\mathbf{B},\ X)+\\&\quad+\cos(\mathbf{A},\ Y)\cos(\mathbf{B},\ Y)+\cos(\mathbf{A},\ Z)\cos(\mathbf{B},Z)]=\\&=|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ X)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ X)+|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ Y)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ Y)+\\&\quad+|\mathbf{A}|\cos(\mathbf{A},\ Z)|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{B},\ Z)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,\end{aligned}\right\}(6)$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих слагающих этих векторов.*

Заметим, что левая часть написанного равенства не зависит от выбора координатных осей, а потому и правая часть также не зависит от выбора координатных осей, что по виду этой части не очевидно.

При выборе формулы (6) мы воспользовались известной из аналитической геометрии формулой для угла между двумя направлениями [**102**].

Нетрудно показать, что для скалярного произведения имеет место и распределительный закон, т. е. соотношение

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}. \qquad (7)$$

Действительно, пользуясь только что выведенным выражением скалярного произведения, можем написать:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}&=(A_x+B_x)C_x+(A_y+B_y)C_y+(A_z+B_z)C_z=\\&=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)+(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z)=\\&=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}.\end{aligned}$$

Из распределительного свойства непосредственно вытекает и более общая формула

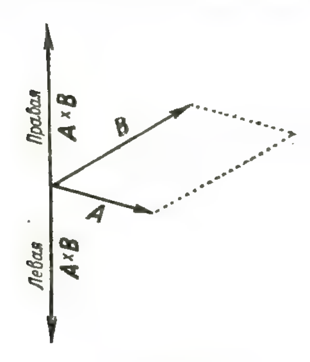
$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1)\cdot(\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{A}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{B}_2, \qquad (8)$$

выражающая обычное правило раскрытия скобок при перемножении многочленов.

**104. Векторное произведение.** Из какой-либо точки $O$ пространства проведем векторы **A** и **B** и построим на них параллелограмм. Перпендикуляр в точке $O$ к плоскости построенного параллелограмма

имеет два противоположных направления. Одно из этих направлений обладает тем свойством, что для наблюдателя, стоящего вдоль него, направление вектора **A** может быть переведено в направление вектора **B** вращением на угол, меньший $\pi$, в ту же сторону, в какую для наблюдателя, стоящего вдоль оси $OZ$, положительное направление оси $OX$ может быть переведено в направление оси $OY$ вращением на угол $\frac{\pi}{2}$. На черт. 88 изображено это направление перпендикуляра в случае право- и левовращающейся системы координат.

*Векторным произведением вектора* **A** *на вектор* **B** *называется вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на этих векторах, и по направлению совпадающий с вышеуказанным направлением перпендикуляра к плоскости этого параллелограмма.*




Черт. 88.

Векторное произведение вектора **A** на вектор **B** обычно обозначают символом $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Его величина, согласно предыдущему определению, равна

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A},\ \mathbf{B}). \tag{9}$$

Его направление зависит от ориентировки координатной системы и при перемене ориентировки переходит в противоположное.

Если векторы **A** и **B** имеют одинаковые или противоположные направления, то векторное произведение равно нулю. В частности, очевидно,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0.$$

Рассмотрим теперь векторное произведение вектора **B** на вектор **A**. Его величина будет, очевидно, такой же, как и в случае произведения **A** на **B**, направление же противоположно, так как, при перестановке векторов **A** и **B** между собой, придется вращать не вектор **A**, а вектор **B**, и притом в обратную сторону. Таким образом

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \tag{10}$$

откуда видно, что переместительный закон в случае векторного произведения не имеет места *и при перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак.*

Для основных векторов имеем очевидные соотношения:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}. \tag{11}$$

Найдем теперь выражение составляющих векторного произведения $\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ через составляющие векторов **A** и **B**. Принимая во внимание перпендикулярность вектора $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ векторам **A** и **B**,

можем написать

$$P_xA_x + P_yA_y + P_zA_z = 0, \quad P_xB_x + P_yB_y + P_zB_z = 0.$$

Воспользуемся теперь следующей элементарной леммой из алгебры.

Лемма. *Решения двух однородных уравнений с тремя переменными*

$$ax + by + cz = 0; \quad a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

*имеют вид*

$$x = \lambda(bc_1 - cb_1); \quad y = \lambda(ca_1 - ac_1); \quad z = \lambda(ab_1 - ba_1),$$

*где $\lambda$ — произвольный множитель. При этом считается, что хоть одна из написанных разностей отлична от нуля.*

Доказательство этой простой леммы предоставляем читателю. Применяя эту лемму, получим [1]):

$$P_x = \lambda(A_yB_z - A_zB_y); \; P_y = \lambda(A_zB_x - A_xB_z); \; P_z = \lambda(A_xB_y - A_yB_x),$$

где $\lambda$ — коэффициент пропорциональности, который надо еще определить.

Воспользуемся для этого важным вспомогательным тождеством, которое называется обычно *тождеством Лагранжа*:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 =$$
$$= (bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2, \qquad (12)$$

справедливость которого нетрудно проверить, раскрывая скобки в его обеих частях. Отметим далее, что $(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)$ есть квадрат длины вектора $\mathbf{P}$, т. е.

$$\lambda^2[(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2] = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

Применяя к левой части тождество Лагранжа, можем переписать это равенство так:

$$\lambda^2([A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)^2] =$$
$$= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

или, принимая во внимание (4) и (6):

$$\lambda^2[|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\cos^2(\mathbf{A}, \mathbf{B})] = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2\sin^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

откуда непосредственно следует, что $\lambda = \pm 1$.

Докажем, наконец, что $\lambda = +1$. Подвергнем векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ непрерывной деформации, которая привела бы вектор $\mathbf{A}$ к совпадению

[1]) Заметим, что если все три написанные разности равны нулю, то векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ образуют угол 0 или $\pi$, и $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, т. е. $P_x = P_y = P_z = 0$.

с основным вектором **i**, а вектор **B** — к совпадению с основным вектором **j**. Деформацию можно производить так, что векторы **A** и **B** в нуль не обращаются и не бывают параллельны между собой. Тогда векторное произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, не обращаясь в нуль, также будет непрерывно изменяться и в результате обратится в

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},$$

так как **A** совпадает с **i** и **B** с **j**.

Принимая во внимание непрерывность изменения, а также то обстоятельство, что $\lambda$ может иметь лишь два значения ($\pm 1$), можем утверждать, что $\lambda$ вообще не будет меняться при указанной деформации и что, следовательно, значение $\lambda$ после деформации будет таким же, каким оно было и до нее. Но после деформации мы будем иметь:

$$A_x=1;\quad A_y=A_z=0;\quad B_y=1;\quad B_x=B_z=0;\quad P_z=1;\quad P_x=P_y=0,$$

и из соотношения

$$P_z=\lambda(A_xB_y-A_yB_x)$$

мы можем заключить, что $\lambda=+1$.

Мы получаем, таким образом, следующие выражения слагающих векторного произведения $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$:

$$A_yB_z-A_zB_y;\quad A_zB_x-A_xB_z;\quad A_xB_y-A_yB_x. \tag{13}$$

Пользуясь этими выражениями, читатель без труда проверит справедливость распределительного закона для векторного произведения, т. е. соотношение

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}. \tag{14}$$

С помощью формулы (10) без труда получим отсюда

$$\mathbf{C}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{C}\times\mathbf{A}+\mathbf{C}\times\mathbf{B},$$

а затем и более общую формулу:

$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=$$
$$=\mathbf{A}_1\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_1\times\mathbf{B}_2+\mathbf{A}_2\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\times\mathbf{B}_2, \tag{15}$$

вполне аналогичную формуле (8) для скалярного произведения.

**105. Соотношения между скалярным и векторным произведениями.** Составим скалярное произведение вектора **A** на векторное произведение $\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}).$$

Величина векторного произведения $\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{N}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах **B** и **C**. Но

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{N}|\cos(\mathbf{A},\ \mathbf{N}),$$

и, следовательно, это произведение можно рассматривать как произведение площади $|\mathbf{N}|$ упомянутого параллелограмма на проекцию вектора **A** на направление **N**, перпендикулярное к этой площади, т. е. *скалярное произведение* $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ *выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах* **A**, **B** *и* **C**. Его знак зависит от ориентировки координатных осей. Нетрудно видеть, что если совокупность векторов **B**, **C**, **A** или, что то же, **A**, **B**, **C** имеет ту же ориентировку, что и оси координат, то мы будем иметь знак (+). В этом можно убедиться тем же методом непрерывной деформации, которым мы уже пользовались выше [1]).

При вычислении объема параллелепипеда мы за основание его принимали параллелограмм, построенный на векторах **B** и **C**. Но точно так же мы могли бы принимать за основание параллелограмм, построенный на векторах **C** и **A** или **A** и **B**. Мы получаем, таким образом, следующие соотношения:

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}). \qquad (16)$$

Следует только обратить внимание на знаки этих трех скалярных произведений. Они будут одинаковы, так как совокупность векторов (**A**, **B**, **C**), (**B**, **C**, **A**) и (**C**, **A**, **B**) имеет одинаковую ориентировку. Две последние совокупности получаются из первой путем круговой перестановки. При другом порядке векторов знак перейдет в обратный, т. е., например,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C}). \qquad (17)$$

Если три вектора **A**, **B**, **C** компланарны, то объем параллелепипеда будет равен нулю, т. е. в этом случае

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=0. \qquad (18)$$

*Это равенство есть необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов* **A**, **B** *и* **C**.

Рассмотрим теперь векторное произведение **A** на векторное произведение $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, т. е.

$$\mathbf{D}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}).$$

Так как вектор **D** перпендикулярен вектору $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, то он компланарен с **B** и **C**, а поэтому [**101**]:

$$\mathbf{D}=m\mathbf{B}+n\mathbf{C}; \qquad (19)$$

[1]) Зависимость знака произведения $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ от ориентировки координатных осей происходит оттого, что множитель $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ зависит от ориентировки осей. Таким образом, рассматриваемая величина $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ не есть обычный скаляр, величина которого не должна зависеть от выбора координатных осей. Вообще величины, зависимость которых от координатных осей заключается лишь в изменении знака при перемене ориентировки осей, называются *псевдоскалярами*.

но $\mathbf{D}$ перпендикулярен и к $\mathbf{A}$, а потому [103]

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=m\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+n\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=0,$$

откуда

$$m=\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{C};\qquad n=-\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},$$

после чего оказывается

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{D}=\mu\{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\},$$

и остается только определить коэффициент пропорциональности $\mu$. Для этого достаточно сравнить слагающие по какой-нибудь из координатных осей векторов в левой и правой частях предыдущей формулы. Направим ось $OX$ параллельно $\mathbf{A}$ и вычислим слагающие по оси $OZ$. Заметив, что при сделанном выборе осей

$$A_x=|\mathbf{A}|=a;\qquad A_y=A_z=0,$$

мы имеем для левой части [104]

$$D_z=A_x(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_y=a(B_zC_x-B_xC_z),$$

а для правой [103]

$$\mu(aC_xB_z-aB_xC_z),$$

отсюда, сравнивая, получим, что $\mu=1$.

Это приводит нас к следующей формуле:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}.\tag{20}$$

Как следствие из этой формулы, выведем *разложение вектора* $\mathbf{B}$ *по двум направлениям: параллельному и перпендикулярному к данному вектору* $\mathbf{A}$. Положив в формуле (20) $\mathbf{C}=\mathbf{A}$, перепишем ее в виде:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

или

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}'+\mathbf{B}'',\tag{21}$$

где

$$\mathbf{B}'=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A};\qquad \mathbf{B}''=-\frac{\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}},$$

что и дает искомое разложение, так как очевидно, что вектор $\mathbf{B}'$ параллелен, вектор же $\mathbf{B}''$ перпендикулярен вектору $\mathbf{A}$.

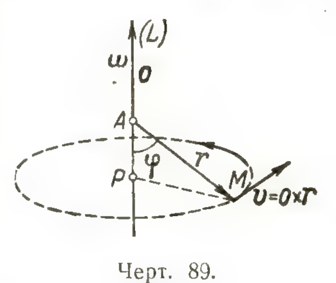
**106. Распределение скоростей при вращении твердого тела; момент вектора.** Понятие о векторном произведении имеет важные приложения в механике, и прежде всего при *исследовании движения* твердого тела[1]).

Рассмотрим сперва твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $(L)$. При этом вращении всякая точка $M$ тела будет иметь скорость $\mathbf{v}$, по

---

[1]) В дальнейшем мы пользуемся правовращающейся системой осей.

величине равную произведению расстояния $PM$ точки $M$ от оси вращения (черт. 89) на угловую скорость вращения $\omega$, по направлению же перпендикулярную к плоскости, проходящей через ось вращения и точку $M$. Эту скорость $\mathbf{v}$ геометрически можно представить следующим образом. Выберем на оси $(L)$ то из двух ее направлений, по отношению к которому вращение совершается против часовой стрелки, и будем считать его положительным. Отложив от произвольной точки $A$ оси в указанном направлении отрезок, длина которого равна $\omega$, мы будем иметь вектор $\mathbf{o}$, который называется вектором угловой скорости. Обозначив далее через $\mathbf{r}$ вектор, определенный отрезком $\overline{AM}$, и вспомнив определение векторного произведения, получим без труда следующее выражение для скорости $\mathbf{v}$:



Черт. 89.

$$\mathbf{v} = \mathbf{o} \times \mathbf{r},$$

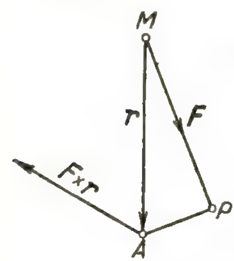
ибо величина векторного произведения $\mathbf{o} \times \mathbf{r}$ равна

$$|\mathbf{r}|\ |\mathbf{o}| \sin(\mathbf{r}, \mathbf{o}) = \omega \cdot |\overrightarrow{MA}| \cdot \sin\varphi = \omega \cdot |MP| = |\mathbf{v}|,$$

а направление совпадает с направлением $\mathbf{v}$.

Как известно из кинематики, при любом движении твердого тела, имеющего неподвижную точку $O$, скорости точек тела в каждый данный момент таковы, как будто бы тело вращалось вокруг некоторой оси, проходящей через точку $O$ (мгновенная ось) с некоторой угловой скоростью $\omega$ (мгновенная угловая скорость); положение оси вращения и величина $\omega$, вообще говоря, будут меняться с течением времени. Согласно сказанному выше, *в каждый данный момент скорость точки твердого тела определяется векторным произведением вектора мгновенной угловой скорости на вектор* $\overrightarrow{OM}$.

Рассмотрим другой пример. Пусть к точке $M$ приложена сила, изображенная вектором $\mathbf{F}$, и пусть $A$ есть некоторая точка пространства (черт. 90). *Моментом силы* $\mathbf{F}$ *относительно точки* $A$ *называется векторное произведение* $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$, *где* $\mathbf{r}$ *есть вектор, имеющий начало в точке* $M$ *и конец в точке* $A$.



Черт. 90.

Опустим из точки $A$ перпендикуляр $AP$ на прямую, на которой лежит сила $\mathbf{F}$. Из прямоугольного треугольника $AMP$ получим:

$$|\overrightarrow{AP}| = |\mathbf{r}|\ |\sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})|$$

и, следовательно, *величина момента силы* $\mathbf{F}$ относительно точки $A$ будет

$$|\mathbf{r}|\ |\mathbf{F}| \sin(\mathbf{r}, \mathbf{F})| = |\mathbf{F}|\ |\overrightarrow{AP}|,$$

т. е. *равна произведению из величины силы на расстояние точки* $A$ *до прямой, на которой лежит сила.* Направление момента определяется по вышеуказанному правилу определения направления векторного произведения.

Из сказанного вытекает, между прочим, что момент силы не меняется при перемещении точки ее приложения $M$ по прямой, на которой лежит сила. Определение момента силы относительно точки можно, очевидно, обобщить на случай любого вектора.

Выведем выражения слагающих момента. Пусть $(a, b, c)$ — координаты точки $A$ и $(x, y, z)$ — координаты точки $M$. Слагающие вектора $\mathbf{r}$ будут:

$$a - x, \quad b - y, \quad c - z.$$

Пользуясь выражением слагающих векторного произведения [104], получим следующие слагающие момента:

$$(y - b) F_z - (z - c) F_y; \quad (z - c) F_x - (x - a) F_z; \quad (x - a) F_y - (y - b) F_x.$$

Возвращаясь к примеру вращения твердого тела вокруг оси, можем сказать, что скорость точки $M$ твердого тела равна моменту вектора угловой скорости относительно точки $M$. Обозначая через $(x, y, z)$ координаты этой точки, через $(x_0, y_0, z_0)$ — координаты начала вектора угловой скорости и через $O_x$, $O_y$, $O_z$ — слагающие этого вектора, получим следующие выражения слагающих скорости точки $M$:

$$(z - z_0) O_y - (y - y_0) O_z; (x - x_0) O_z - (z - z_0) O_x; (y - y_0) O_x - (x - x_0) O_y.$$

Определим теперь момент вектора относительно оси. Пусть в пространстве имеется некоторая прямая $\Delta$, которой придано определенное направление (ось).

*Моментом вектора* $\mathbf{F}$ *относительно оси* $\Delta$ *называется алгебраическая величина проекции на эту ось момента вектора* $\mathbf{F}$ *относительно какой-либо точки* $A$ *оси* $\Delta$ [1]).

Чтобы доказать законность этого определения, выясним независимость указанной в определении проекции от положения точки $A$ на оси $\Delta$. Примем ось $\Delta$ за ось $OZ$ и пусть $(0, 0, c)$ — координаты точки $A$ и $(x, y, z)$ — координаты начала $M$ вектора $\mathbf{F}$. При таком выборе координатных осей проекция на ось $\Delta$ момента вектора $\mathbf{F}$ относительно точки $A$ совпадает со слагающей его по оси $OZ$ и, в силу предыдущих формул, будет равна

$$xF_y - yF_x,$$

так как $a = b = 0$. Эта разность не зависит от $c$, т. е. от положения точки $A$ на оси $\Delta$.

## § 11. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

**107. Дифференцирование вектора.** Обобщим понятие дифференцирования на случай переменного вектора $\mathbf{A}(\tau)$, зависящего от некоторого численного параметра $\tau$. Будем откладывать вектор от некоторой определенной точки — например начала координат $O$ (черт. 91). При изменении параметра $\tau$ конец переменного вектора $\mathbf{A}(\tau)$ опишет некоторую кривую $(L)$. Пусть $OM_1$ и $OM$ — положения переменного вектора при значениях $(\tau + \Delta\tau)$ и $\tau$ параметра. Отрезку $MM_1$ соответствует разность $\mathbf{A}(\tau + \Delta\tau) - A(\tau)$, и отношение

$$\frac{\mathbf{A}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{A}(\tau)}{\Delta\tau}$$

дает некоторый вектор, параллельный отрезку $MM_1$. Предельное положение этого вектора при $\Delta\tau \to 0$, если оно существует, и будет

[1]) Таким образом вектором будет только момент вектора относительно точки, но не относительно оси.

представлять собою производную

$$\frac{d\mathbf{A}((\tau)}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\mathbf{A}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{A}(\tau)}{\Delta\tau}. \tag{22}$$

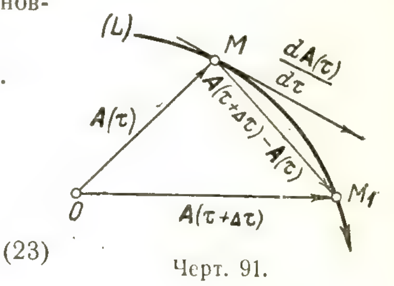
Эта производная есть очевидно вектор, направленный по касательной к кривой $(L)$ в точке $M$. Он также зависит от $\tau$, и его производная по $\tau$ дает вторую производную $\frac{d^2\mathbf{A}(\tau)}{d\tau^2}$ и т. д.

Разложим вектор $A(\tau)$ по трем основным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{A}(\tau) = A_x(\tau)\mathbf{i} + A_y(\tau)\mathbf{j} + A_z(\tau)\mathbf{k}.$$

Определение (22) даст тогда

$$\frac{d\mathbf{A}(\tau)}{a\tau} = \frac{dA_x(\tau)}{d\tau}\mathbf{i} + \frac{dA_y(\tau)}{d\tau}\mathbf{j} + \frac{dA_z(\tau)}{d\tau}\mathbf{k} \tag{23}$$




Черт. 91.

и вообще

$$\frac{d^m\mathbf{A}(\tau)}{d\tau^m} = \frac{d^mA_x(\tau)}{d\tau^m}\mathbf{i} + \frac{d^mA_y(\tau)}{d\tau^m}\mathbf{j} + \frac{d^mA_z(\tau)}{d\tau^m}\mathbf{k}, \tag{$23_1$}$$

т. е. *дифференцирование вектора сводится к дифференцированию слагающих этого вектора.*

Известное правило дифференцирования произведения обобщается на случай произведения скаляра на вектор, а также и на случай скалярного и векторного произведений, так что имеют место формулы:

$$\frac{d}{d\tau}\{f(\tau)\mathbf{A}(\tau)\} = \frac{df(\tau)}{d\tau}\mathbf{A}(\tau) + f(\tau)\frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau} \tag{24}$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{A}(\tau)\cdot\mathbf{B}(\tau) = \frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau}\cdot\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{A}(\tau)\cdot\frac{d\mathbf{B}(\tau)}{d\tau} \tag{$24_1$}$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{A}(\tau)\times\mathbf{B}(\tau) = \frac{d\mathbf{A}(\tau)}{d\tau}\times\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{A}(\tau)\times\frac{d\mathbf{B}(\tau)}{d\tau}, \tag{$24_2$}$$

где $f(\tau)$ — скаляр, $\mathbf{A}(\tau)$ и $\mathbf{B}(\tau)$ — векторы, зависящие от $(\tau)$. Проверим, например, формулу $(24_1)$. Левая часть ее представляется в виде

$$\frac{d}{d\tau}\{A_x(\tau)B_x(\tau) + A_y(\tau)B_y(\tau) + A_z(\tau)B_z(\tau)\} =$$

$$= \frac{dA_x(\tau)}{d\tau}B_x(\tau) + \frac{dA_y(\tau)}{d\tau}B_y(\tau) + \frac{dA_z(\tau)}{d\tau}B_z(\tau) + A_x(\tau)\frac{dB_x(\tau)}{d\tau} +$$

$$+ A_y(\tau)\frac{dB_y(\tau)}{d\tau} + A_z(\tau)\frac{dB_z(\tau)}{d\tau}.$$

Тот же результат получим, как нетрудно видеть, и для правой части. Считается, конечно, что производные, о которых идет речь, существуют. В формулах (24), ($24_1$), ($24_2$) из существования производных от сомножителей вытекает существование производных и у произведения [ср. **I, 47**]. Совершенно элементарно доказывается обычное правило дифференцирования суммы векторов. Если точка $M$ движется по некоторой кривой ($L$), то радиус-вектор $\mathbf{r}$ этой точки есть функция времени $t$. Дифференцируя радиус-вектор по $t$, получим вектор скорости движущейся точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{25}$$

Длина этого вектора будет равна производной от пути $s$ по времени $t$, а направление будет касательно кривой ($L$). Полученный вектор скорости также зависит от времени и, дифференцируя его, получим вектор ускорения $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Если мы примем за независимую переменную длину кривой $s$, *то производная от* $\mathbf{r}$ *по* $s$ *будет представляться единичным вектором касательной* $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, т. е. вектором длины единица, направленным по касательной. Действительно в [**I, 70**] мы имели $\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \to 1$, т. е. отношение длины хорды к длине соответствующей дуги стремится к единице. То же справедливо, очевидно, и для кривых в пространстве [**I, 160**]. Из этого факта и определения (22) при $\tau = s$ непосредственно вытекает, что длина упомянутого выше вектора касательной действительно равна единице.

**108. Скалярное поле и его градиент.** Если некоторая физическая величина имеет определенное значение в каждой точке пространства или части пространства, то таким путем определяется поле этой величины. Если данная величина есть скаляр (температура, давление, электростатический потенциал), то и поле ее называется скалярным. Если же данная величина есть вектор (скорость, сила), то поле, ею определяемое, называется векторным [**100**].

Начнем с исследования скалярного поля. Для задания такого поля достаточно определить функцию точки $U(M) = U(x, y, z)$.

Так, например, нагретое тело дает скалярное поле температуры. В каждой точке $M$ тела температура $U(M)$ имеет определенное значение, которое может меняться от точки к точке.

Возьмем определенную точку и проведем через нее прямую, причем придадим этой прямой определенное направление ($l$) (черт. 92). Рассмотрим значение функции $U(M)$ в самой точке $M$ и в близкой к ней точке $M_1$ на взятой прямой ($l$). Предел отношения

$$\frac{U(M_1) - U(M)}{\overline{MM_1}}$$

называется *производной от функции* $U(M)$ *по направлению* $(l)$ и обозначается так:

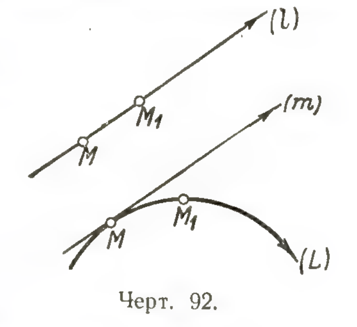
$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\overline{MM_1}}. \tag{26}$$

Эта производная характеризует быстроту изменения функции $U(M)$ в точке $M$ по направлению $(l)$. Таким образом функция имеет в каждой точке бесчисленное множество производных, но нетрудно показать, что производная по любому направлению выражается через производные по трем взаимно перпендикулярным направлениям $X$, $Y$, $Z$ по формуле:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cos(l, X) + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cos(l, Y) + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cos(l, Z). \tag{27}$$

Заметим прежде всего, что при составлении производной (26) мы могли бы проводить через точку $M$ не прямую, а какую-нибудь направленную кривую $(L)$ (черт. (92). Вместо формулы (26) нам надо было бы рассматривать предел

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\smile MM_1}.$$



Черт. 92.

Этот предел есть очевидно не что иное, как производная от функции $U(M)$ по длине дуги $s$ взятой кривой $(L)$, и, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, мы можем написать:

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{\smile MM_1} = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}. \tag{28}$$

Но, как известно **[I, 160]**, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ суть направляющие косинусы касательной к линии $(L)$ в точке $M$, и в случае, когда $(L)$ есть прямая, мы и получаем как раз формулу (27). Кроме того формула (28) показывает, что производная по кривой совпадает с производной по направлению $(m)$, касательному к кривой в точке $M$.

Введем теперь в рассмотрение поверхности уровня нашего скалярного поля. Эти поверхности характеризуются тем условием, что во всех точках такой поверхности функция $U(M)$ сохраняет одно и то же постоянное значение $C$. Придавая этой постоянной различные численные значения, получим семейство поверхностей уровня $U(M) = C$, причем через каждую точку пространства будет проходить определенная поверхность уровня. Для случая нагретого тела поверхности

уровня суть поверхности равной температуры. Пусть $(S)$ есть поверхность уровня, проходящая через точку $M$ (черт. 93). Введем в этой точке три взаимно перпендикулярных направления: направление $(n)$, нормальное к поверхности $(S)$, и два направления $(t_1)$ и $(t_2)$, лежащих в касательной плоскости. Направления $(t_1)$ и $(t_2)$ являются касательными к некоторым кривым $(L_1)$ и $(L_2)$, лежащим на поверхности уровня. Вдоль этих кривых функция $U(M)$ сохраняет постоянное значение, а потому

$$\frac{\partial U(M)}{\partial t_1} = \frac{\partial U(M)}{\partial t_2} = 0. \tag{29}$$

Возьмем теперь любое направление $(l)$. Применяя формулу (27) к трем взаимно перпендикулярным направлениям $(n)$, $(t_1)$ и $(t_2)$ и принимая во внимание (29), будем иметь:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \frac{\partial U(M)}{\partial n} \cos(l, n). \tag{30}$$

Если мы отложим на направлении $(n)$ вектор, по алгебраической величине равный $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$, то, согласно (30), проекция этого вектора на любое направление $(l)$ дает производную $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$.



Черт. 93.

Построенный по вышеуказанному правилу вектор называется *градиентом функции* $U(M)$, т. е. *градиентом скалярного поля называется векторное поле, построенное по следующему правилу: в каждой точке вектор направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня, а по алгебраической величине равен производной от функции* $U(M)$ *по направлению упомянутой нормали.* Градиент скалярного поля $U(M)$ обозначается символом $\operatorname{grad} U(M)$, и формула (30) может быть записана в виде:

$$\frac{\partial U(M)}{\partial l} = \operatorname{grad}_l U(M), \tag{31}$$

где $\operatorname{grad}_l U(M)$ есть проекция вектора $\operatorname{grad} U(M)$ на направление $(l)$.

Нетрудно видеть, что выбор направления нормали $(n)$ к поверхности уровня $(S)$ не влияет на направление $\operatorname{grad} U(M)$. Этот вектор всегда направлен в ту сторону нормали к $(S)$, куда функция $U(M)$ возрастает.

Примеры. 1. Поле тяготения, которое мы рассматривали в [87], приводит к скалярному полю потенциала тяготения

$$U(M) = \iiint\limits_{(v)} \frac{\mu(M_1)\,dv}{r},$$

где $\mu(M_1)$ есть плотность материи, занимающей объем $(v)$, и $r$ — расстояние точки $M$ до переменной точки $M_1$ интегрирования. Мы имели следующие выражения для слагающих силы тяготения:

$$F_x = \frac{\partial U(M)}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U(M)}{\partial z},$$

где $F_x$, $F_y$, $F_z$ — составляющие вектора силы $\mathbf{F}$. Отсюда непосредственно следует, что вообще $F_l = \frac{\partial U(M)}{\partial l}$, т. е. векторное поле силы тяготения есть градиент потенциала $U(M)$. Работа силы тяготения выражается формулой:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \int\limits_{(A)}^{(B)} dU(M) = U(B) - U(A),$$

т. е. работа эта выражается разностью потенциала в точках $A$ и $B$.

Последним свойством обладает, очевидно, всякое консервативное силовое поле, т. е. такое поле, для которого $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U(M)$. Часто потенциалом называют не самую функцию $U(M)$, а $-U(M)$.

2. Если различные точки тела имеют различную температуру $U(M)$, то в поле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность и на ней малый элемент $dS$ около точки $M$. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла $\Delta Q$, проходящего через элемент $dS$ за время $dt$, пропорционально $dt\,dS$ и нормальной производной температуры $\frac{\partial U(M)}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q = k\,dt\,dS \left| \frac{\partial U(M)}{\partial n} \right|, \tag{32}$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности, который называется коэффициентом внутренней теплопроводности, а $(n)$ — направление нормали к $dS$.

Построим вектор $-k \operatorname{grad} U(M)$, который называется *вектором потока тепла*; знак $(-)$ мы ставим в силу того, что тепло течет от более высоких температур к более низким, а вектор $\operatorname{grad} U(M)$ направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции $U(M)$. В силу формулы (32) можно сказать, что количество тепла $\Delta Q$, проходящее за время $dt$ через элемент $dS$, будет:

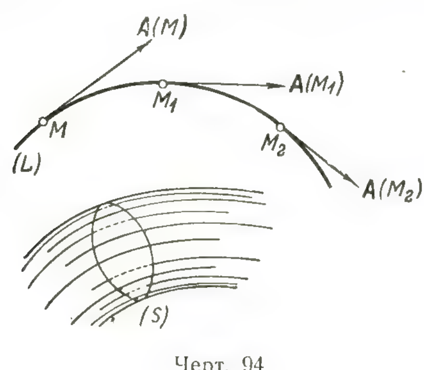
$$\Delta Q = k\,dt\,dS\,|\operatorname{grad}_n U(M)|. \tag{33}$$

**109. Векторное поле. Вихрь и расходимость.** Обратимся теперь к рассмотрению векторного поля $\mathbf{A}(M)$. В каждой точке пространства или той части пространства, где поле задано, вектор $\mathbf{A}(M)$ имеет определенную величину и направление. Например, при течении жидкости в каждый заданный момент времени мы имеем векторное поле скоростей $\mathbf{v}$.

Векторной линией поля называется такая кривая $(L)$, в каждой точке которой касательная имеет направление вектора $\mathbf{A}(M)$ (черт. 94). Совершенно так же, как и в [**22**], нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения векторных линий поля можно написать в виде

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}, \tag{34}$$

где составляющие $A_x$, $A_y$ и $A_z$ суть определенные функции $x$, $y$, $z$. В силу теоремы существования и единственности через каждую точку $M$, при соблюдении условий этой теоремы, будет проходить одна определенная векторная линия [1]). Если провести все векторные линии, проходящие через точки некоторого куска поверхности $(S)$, то их совокупность даст векторную трубку (черт. 94).




Черт. 94.

Выделим в векторном поле некоторый объем $(v)$, и пусть $(S)$ есть поверхность, ограничивающая этот объем, а $(n)$ — направление нормали к $(S)$, внешней по отношению к объему $(v)$. Применяя формулу Остроградского [**63**] к функциям $A_x$, $A_y$ и $A_z$, получим:

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv =$$
$$= \iint\limits_{(S)} [A_x \cos(n, X) + A_y \cos(n, Y) + A_z \cos(n, Z)]\, dS$$

или [**102**]

$$\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS. \tag{35}$$

Интеграл по поверхности, стоящий в правой части, называется обычно *потоком поля через поверхность*. Физический смысл его будет выяснен в дальнейшем. Подинтегральная функция в объемном интеграле называется *расходимостью векторного поля* и обозна-

---

[1]) Условия теоремы, наверно, будут выполнены, если $A_x$, $A_y$, $A_z$ — непрерывные функции с непрерывными производными, и в точке $M$ вектор $\mathbf{A}(M)$ отличен от нуля, т. е. по крайней мере одна из упомянутых функций отлична от нуля [**51**].

чается символом[1])

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (36)$$

Таким образом формулу Остроградского можно записать так:

$$\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div} \mathbf{A}\, dv = \iint\limits_{(S)} A_n\, dS, \qquad (37)$$

т. е. *объемный интеграл от расходимости равен потоку поля через поверхность этого объема.* Определение расходимости (36) связано с выбором координатных осей $X$, $Y$, $Z$, но, пользуясь формулой (37), нетрудно дать другое определение расходимости, не связанное с выбором координатных осей. Окружим точку $M$ небольшим объемом $(v_1)$, и пусть $(S_1)$ есть поверхность этого объема. Применяя формулу (37) и пользуясь теоремой о среднем [61], можем написать:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}\Big|_{M_1} \cdot v_1 = \iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{div} \mathbf{A}\Big|_{M_1} = \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS}{v_1},$$

где значение $\operatorname{div} \mathbf{A}$ берется в некоторой точке $M_1$ объема $(v_1)$, и $v_1$ есть величина этого объема. При беспредельном сжимании объема к точке $M$, точка $M_1$ будет стремиться к точке $M$, и предыдущая формула в пределе даст величину расходимости в самой точке $M$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{(v_1) \to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n\, dS}{v_1}, \qquad (38)$$

т. е. *расходимость поля в точке $M$ есть предел отношения потока поля через малую замкнутую поверхность, окружающую точку $M$, к объему, ограниченному этой поверхностью.*

Предыдущие рассуждения показывают, что всякое векторное поле $\mathbf{A}$ дает некоторое скалярное поле $\operatorname{div} \mathbf{A}$, а именно поле своей расходимости. Мы покажем сейчас, что, пользуясь формулой Стокса, мы естественно придем кроме того и к некоторому векторному полю, порождаемому исходным полем $\mathbf{A}$. Принимая

$$P = A_x; \quad Q = A_y; \quad R = A_z,$$

напишем формулу Стокса [**70**]:

$$\int\limits_{(l)} A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz = \iint\limits_{(S)} \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(n, X) + \right.$$
$$\left. + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(n, Y) + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(n, Z) \right] dS. \qquad (39)$$

---

[1]) div — первые три буквы французского слова divergence, что значит „расходимость“.

Пусть $d\mathbf{s}$ — направленный элемент дуги кривой $(l)$, т. е. элемент дуги этой кривой, рассматриваемый как малый вектор. Его составляющие на оси будут $dx$, $dy$, $dz$, и выражение, стоящее под знаком криволинейного интеграла, представляет собою скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$, т. е. равно $A_s\,ds$, где $A_s$ — проекция $\mathbf{A}$ на касательную к $(l)$.

Введем кроме того в рассмотрение вектор, составляющие которого равны разностям, стоящим под знаком двойного интеграла. Вектор этот, образующий новое векторное поле, называется вихрем поля $\mathbf{A}$ и обозначается символом $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ или $\operatorname{curl}\mathbf{A}$ [1]), так что

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{A}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{A}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{40}$$

Формулу (39) при этом можно переписать так:

$$\int_{(l)} A_s\,ds=\iint_{(S)}[\operatorname{rot}_x \mathbf{A}\cos(n, X)+\operatorname{rot}_y \mathbf{A}\cos(n, Y)+\operatorname{rot}_z \mathbf{A}\cos(n, Z)]\,dS$$

или

$$\int_{(l)} \mathbf{A}_s\,ds=\iint_{(S)}\operatorname{rot}_n \mathbf{A}\,dS, \tag{41}$$

где $\operatorname{rot}_n \mathbf{A}$ — составляющая $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ на нормаль $(n)$ к поверхности $(S)$. Криволинейный интеграл, стоящий в левой части, называется обычно *циркуляцией вектора* $\mathbf{A}$ *вдоль контура* $(l)$, и формулу Стокса можно формулировать так: *циркуляция поля вдоль контура некоторой поверхности равна интегралу по самой поверхности от нормальной составляющей вихря*, т. е. *равна потоку вихря через поверхность*. Формула (41) дает возможность дать определение вихря, не связанное с выбором координатных осей. Пусть $(m)$ есть некоторое направление, проходящее через точку $M$, и $(\sigma)$ — малая плоская площадка, проходящая через эту же точку нормально к $(m)$. Применим к этой площадке формулу (41) и воспользуемся теоремой о среднем:

$$\int_{(\lambda)} A_s\,ds=\operatorname{rot}_m \mathbf{A}\Big|_{M_1}\cdot\sigma, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{rot}_m \mathbf{A}\Big|_{M_1}=\frac{\int_{(\lambda)} A_s\,ds}{\sigma},$$

где $(\lambda)$ есть контур $(\sigma)$ и $M_1$ — некоторая точка этой площадки. Беспредельно сжимая площадку к точке $M$ и переходя к пределу, получим, как и в случае расходимости, значение составляющей вихря

---

[1]) rot представляют собою три первые буквы французского слова rotation, что значит вращение, а curl есть английское слово, которое равносильно русскому термину „вихрь“.

на любое заданное направление $(m)$ в точке $M$:

$$\operatorname{rot}_m \mathbf{A} = \lim_{(\sigma) \to M} \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_s\, ds}{\sigma}. \tag{42}$$

В дальнейшем мы будем иметь многочисленные примеры применения понятий вихря и расходимости и выясним физический смысл этих понятий.

**110. Потенциальное и соленоидальное поле.** В [108] мы получили векторное поле $\operatorname{grad} U(M)$, являющееся градиентом некоторой скалярной функции $U(M)$. Такое векторное поле называется *потенциальным полем*. Не всякое векторное поле будет, конечно, полем потенциальным, и мы укажем сейчас необходимые и достаточные условия, при которых заданное векторное поле будет потенциальным. Соотношение $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U(M)$ равносильно [108]

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. равносильно тому, что выражение:

$$A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz \tag{43}$$

есть полный дифференциал некоторой функции. В [73] мы видели, что для этого необходимо и достаточно выполнение трех условий:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0,$$

а эти три условия в свою очередь равносильны равенству нулю вихря поля: $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, т. е. *для того, чтобы векторное поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы вихрь этого поля равнялся нулю*. Если это условие выполнено, то согласно [73] потенциал поля определяется в виде контурного интеграла

$$U(M) = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} A_s\, ds. \tag{44}$$

При этом $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U(M)$, и [73]

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} A_s\, ds = \int\limits_{(A)}^{(B)} \operatorname{grad}_s U(M)\, ds = U(B) - U(A).$$

Может случиться, что выражение (43) не будет полным дифференциалом, но будет допускать интегрирующий множитель, т. е. будет существовать такая функция точки $\mu(M)$, что выражение

$$\mu(A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz) = dU \tag{45}$$

будет полным дифференциалом. Назовем такое поле *квазипотенциальным*. Как мы видели в [**76**], характерной особенностью такого поля будет существование семейства поверхностей $U(M)=C$, ортогональных к векторным линиям поля, причем из (45) следует, что $\mu\mathbf{A}=\operatorname{grad} U$ или

$$\mathbf{A}=\frac{1}{\mu}\operatorname{grad} U,$$

т. е. поле $\mathbf{A}$ будет в этом случае отличаться от потенциального поля численным множителем $\frac{1}{\mu}$, имеющим в различных точках пространства различные значения.

Необходимое и достаточное условие квазипотенциальности поля выражается формулой [**76**]:

$$A_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0,$$

что можно написать так:

$$\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}=0, \tag{46}$$

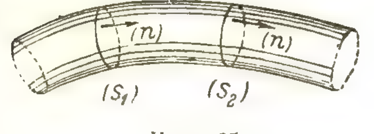
т. е. *необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям поля, является условие* (46), т. е. *перпендикулярность векторов* $\mathbf{A}$ *и* $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ *или равенство нулю* $\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Заметим, что если пространство, занятое полем, многосвязно, то потенциал поля, определяемый по формуле (44), может оказаться многозначной функцией.

Выше мы исследовали векторное поле, у которого вихрь равен нулю, и обнаружили, что такое поле есть поле потенциальное. Векторное поле $\mathbf{A}$, у которого расходимость равна нулю, т. е. выполнено тождественное условие $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, называется *соленоидальным*. В силу формулы (37) для такого поля имеем

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS=0, \tag{47}$$

где $(S)$ — произвольная замкнутая поверхность, внутри которой наше поле везде существует.



Черт. 95.

Примем за поверхность $(S)$ часть некоторой векторной трубки, выделенную двумя ее сечениями $(S_1)$ и $(S_2)$ (черт. 95). На боковой поверхности трубки $A_n=0$, так как $\mathbf{A}$ находится в касательной плоскости к этой боковой поверхности. Если для сечений $(S_1)$ и $(S_2)$ возьмем направление нормали $(n)$ в одну и ту же сторону по отношению к движению вдоль трубки, то на одном сечении $(S_1)$ это

будет внутренняя нормаль, а на другом $(S_2)$ — внешняя по отношению к выделенной части векторной трубки. Применяя к ней формулу (47), будем иметь:

$$\iint\limits_{(S_2)} A_n\,dS - \iint\limits_{(S_1)} A_n\,dS = 0,$$

причем знак (—) в интеграле по $(S_1)$ вызван тем обстоятельством, что на $(S_1)$ направление $(n)$ противоположно направлению внешней нормали. Предыдущее равенство показывает, что интеграл

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS \tag{48}$$

в случае соленоидального поля имеет одно и то же значение для всех сечений $(S)$ векторной трубки. Он дает поток поля через сечение $(S)$ и называется обычно *напряжением векторной трубки в сечении* $(S)$. Таким образом *для соленоидального поля напряжение имеет одно и то же значение во всех сечениях векторной трубки.* Если при движении вдоль векторной трубки площадь ее сечения увеличивается, т. е. векторная трубка расширяется, то интенсивность потока, т. е. величина $A_n$, вообще говоря, уменьшается так, что величина интеграла (48) остается неизменной.

**111. Направленный элемент поверхности.** Подобно направленному элементу кривой [**109**], можно ввести в рассмотрение направленный элемент поверхности $d\mathbf{S}$. Положим, что мы различили на данной поверхности две стороны, так что в каждой точке поверхности имеются два взаимно противоположных направления нормали, связанных с той или другой стороной поверхности, причем в случае непрерывного движения по поверхности направление нормали, определенное с той или другой стороны поверхности, будет изменяться непрерывно [**64**]. В случае замкнутой поверхности имеются внутренняя и внешняя нормали по отношению к объему, ограниченному поверхностью. *Направленным элементом* $d\mathbf{S}$ *поверхности назовем вектор, длина которого равна площади* $dS$ *элемента, а направление совпадает с определенным направлением нормали* $(n)$ *к этому элементу.* В случае замкнутой поверхности условимся принимать за таковое направление внешней нормали, а для внутренней нормали вместо $(n)$ будем писать $(n_1)$.

Проекции вектора $d\mathbf{S}$ на координатные оси будут давать проекции элемента площади поверхности на соответствующие координатные плоскости со знаком плюс или минус, смотря по тому, будет ли угол, образованный $(n)$ с координатной осью, острым или тупым.

Пусть $f(M)$ есть некоторая скалярная функция и $\mathbf{A}(M)$ — вектор, определенные на поверхности $(S)$. Составим выражения:

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\,d\mathbf{S} \tag{49}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}(M)\cdot d\mathbf{S} \tag{$49_1$}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}(M)\times d\mathbf{S}. \tag{$49_2$}$$

Первое из них есть вектор, составляющие которого суть:

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,\ X)\,dS;\quad \iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,\ Y)\,dS;$$

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\cos(n,\ Z)\,dS.$$

Выражение $(49_1)$ есть скаляр

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{(S)} A_n\,dS$$

и, наконец, выражение $(49_2)$ есть вектор с составляющими

$$\iint\limits_{(S)} [A_y\cos(n,\ Z) - A_z\cos(n,\ Y)]\,dS$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_z\cos(n,\ X) - A_x\cos(n,\ Z)]\,dS$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_x\cos(n,\ Y) - A_y\cos(n,\ X)]\,dS.$$

Пусть $(S)$ — замкнутая поверхность и $(v)$ — объем, ею ограниченный, причем $f(M)$ и $\mathbf{A}(M)$ определены во всем объеме. Пользуясь формулой Остроградского, нетрудно проверить следующие три равенства:

$$\iint\limits_{(S)} f\,d\mathbf{S} = \iiint\limits_{v} \operatorname{grad} f\,dv \tag{50}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_{v} \operatorname{div}\mathbf{A}\,dv \tag{$50_1$}$$

$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}\times d\mathbf{S} = -\iiint\limits_{v} \operatorname{rot}\mathbf{A}\,dv. \tag{$50_2$}$$

Равенство ($50_1$) совпадает с формулой (37). Проверим еще равенство ($50_2$). Слагающие по оси $OX$ левой и правой частей выражаются интегралами:

$$\iint\limits_{(S)} [A_y \cos(n, Z) - A_z \cos(n, Y)]\, dS; \quad -\iiint\limits_{v} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dv,$$

которые совпадают по величине, в чем нетрудно убедиться преобразованием тройного интеграла по формуле Остроградского [**63**].

Совершенно аналогично, пользуясь формулой Стокса и направленным элементом поверхности, можем написать следующие формулы:

$$\int\limits_{(l)} f\, ds = -\iint\limits_{(S)} \operatorname{grad} f \times d\mathbf{S} \tag{51}$$

$$\int\limits_{(l)} \mathbf{A} \cdot ds = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \tag{$51_1$}$$

Здесь $(S)$ — некоторая поверхность и $(l)$ — ее контур. Вторая из этих формул совпадает с формулой (41), так как в силу определения скалярного произведения $\operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \operatorname{rot}_n A\, dS$. Для формулы (51) составляющие левой и правой частей на ось $OX$ будут:

$$\int\limits_{(l)} f\, dx; \quad -\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, Z) - \frac{\partial f}{\partial z} \cos(n, Y)\right] dS;$$

пользуясь формулой (22) из [**70**], нетрудно показать, что эти выражения равны.

**112. Некоторые формулы векторного анализа.** Укажем некоторые соотношения, связывающие введенные нами векторные операции. В [**110**] мы видели, что вихрь потенциального поля равен нулю:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0. \tag{52}$$

Нетрудно проверить, что вихревое поле имеет расходимость, равную нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \tag{53}$$

Действительно:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Введем еще в рассмотрение расходимость потенциального поля:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{grad}_x U + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{grad}_y U + \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{grad}_z U,$$

или

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{54}$$

Дифференциальный оператор

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{55}$$

называется *оператором Лапласа*. Из левой части (54) видно, что он не зависит от выбора координатных осей. Применяя формулу (38) к вектору $\operatorname{grad} U$, получим определение $\Delta U$ в точке $M$ в виде

$$\Delta U = \lim_{(v_1)\to M} \frac{\displaystyle\iint_{(S_1)} \frac{\partial U}{\partial n}\, dS}{v_1}. \tag{56}$$

Мы определили $\Delta U$ для случая, когда $U$ — скаляр. Символ $\Delta\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторное поле, означает вектор, составляющие которого суть $\Delta A_x$, $\Delta A_y$ и $\Delta A_z$. Укажем еще следующие формулы:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \tag{57}$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f\operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{grad} f\cdot\mathbf{A}, \tag{$57_1$}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}, \tag{$57_2$}$$

$$\operatorname{rot} f\mathbf{A} = \operatorname{grad} f\times\mathbf{A} + f\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{$57_3$}$$

$$\Delta(\varphi\psi) = \psi\,\Delta\varphi + \varphi\,\Delta\psi + 2\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi. \tag{$57_4$}$$

Мы проверим лишь первую из этих формул, предоставляя проверку остальных читателю. Возьмем составляющую по оси $OX$ вектора, стоящего в левой части (57), и покажем, что она совпадает с составляющей вектора, стоящего в правой части:

$$\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{rot}_z\mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{rot}_y\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

откуда, открывая скобки и прибавляя и вычитая $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$,

$$\operatorname{rot}_x\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta A_x,$$

что и требовалось доказать. Заметим при этом, что из формулы (57) следует независимость $\Delta\mathbf{A}$ от выбора осей, ибо

$$\Delta\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

**113. Движение твердого тела и малая деформация.** В [106] мы видели, что при вращении твердого тела вокруг точки $O$ скорость любой точки выражается формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости и $\mathbf{r}$ — радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Самый общий случай движения твердого тела мы получим, придавая ему еще переносное движение со скоростью $\mathbf{v}_0$, и при этом полная скорость выразится формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{o} \times \mathbf{r}. \tag{58}$$

Найдем теперь обратно — вектор угловой скорости по заданному полю скоростей $\mathbf{v}$. Заметим прежде всего, что векторы $\mathbf{v}_0$ одинаковы в данный момент для всех точек тела, а потому они не зависят от $(x, y, z)$. Мы имеем тогда по формуле (40) $\operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = 0$.

Пусть $p, q, r$ — составляющие $\mathbf{o}$ относительно осей, имеющих начало в $O$. Составляющие векторного произведения $\mathbf{o} \times \mathbf{r}$ будут [104]: $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$, так что согласно (40) составляющие $\operatorname{rot} \mathbf{o} \times \mathbf{r}$ будут $2p, 2q, 2r$, а потому вектор угловой скорости выразится через $\mathbf{v}$ в виде

$$\mathbf{o} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \tag{59}$$

Отсюда и самое название вектора $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ — вращение вектора скорости.

Если помножим вектор скорости $\mathbf{v}$ на величину $dt$ малого промежутка времени, то получится вектор $\mathbf{v}\,dt$, который будет давать приближенно смещение точки за малый промежуток времени $dt$. Таким образом получим векторное поле малых смещений точек твердого тела:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\,dt.$$

Обращаясь к формуле (58) и считая, что переносное движение отсутствует, т. е. что точка $O$ закреплена, получим следующую формулу для вектора смещения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{o}_1 \times \mathbf{r}, \tag{60}$$

где $\mathbf{o}_1 = \mathbf{o}\,dt$ есть малый вектор, направленный по оси вращения и равный малому углу поворота за промежуток времени $dt$. Пусть $p_1, q_1, r_1$ — составляющие этого вектора и $(x, y, z)$ — координаты переменной точки твердого тела. Составляющие вектора $\mathbf{A}$ будут:

$$A_x = q_1 z - r_1 y; \quad A_y = r_1 x - p_1 z; \quad A_z = p_1 y - q_1 x.$$

Отсюда, как и выше, нетрудно выразить вектор малого поворота через вектор смещения

$$\mathbf{o}_1 = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{61}$$

Кроме того, последние формулы показывают, что составляющие вектора $\mathbf{A}$ суть линейные однородные функции координат $(x, y, z)$.

Рассмотрим теперь общий случай линейной однородной деформации, при которой составляющие вектора смещения суть линейные однородные функции координат:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ A_y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ A_z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Коэффициенты $a$, $b$ и $c$ будем считать малыми и ограничимся рассмотрением малого объема $(v)$ вблизи начала координат. Всякая точка этого объема сместится на вектор $\mathbf{A}$ и ее новые координаты после преобразования будут:

$$\xi = x + A_x, \quad \eta = y + A_y; \quad \zeta = z + A_z,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1 + a_1)\,x + b_1 y + c_1 z \\ \eta &= a_2 x + (1 + b_2)\,y + c_2 z \\ \zeta &= a_3 x + b_3 y + (1 + c_3)\,z. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Такое преобразование будет только в частных случаях сводиться к вращению объема $(v)$, как твердого целого вокруг $O$. В общем случае оно будет связано и с деформацией этого объема, т. е. с изменением расстояний между его точками. Выясним несколько подробнее это обстоятельство.

Составляющие вихря вектора смещения $\mathbf{A}$ согласно (62) будут: $b_3 - c_2$, $c_1 - a_3$, $a_2 - b_1$. Если бы преобразование сводилось к вращению элементарного объема, как целого, то мы получили бы вектор смещения $\mathbf{A}^{(1)}$ с составляющими

$$A_x^{(1)} = \frac{1}{2}(c_1 - a_3)\,z - \frac{1}{2}(a_2 - b_1)\,y; \quad A_y^{(1)} = \frac{1}{2}(a_2 - b_1)\,x - \frac{1}{2}(b_3 - c_2)\,z;$$

$$A_z^{(1)} = \frac{1}{2}(b_3 - c_2)\,y - \frac{1}{2}(c_1 - a_3)\,x.$$

Вычитая этот вектор из $\mathbf{A}$, представим этот последний в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)}, \tag{64}$$

где вектор чистой деформации $\mathbf{A}^{(2)}$ имеет составляющие:

$$\left.\begin{aligned} A_x^{(2)} &= a_1 x + \frac{1}{2}(b_1 + a_2)\,y + \frac{1}{2}(c_1 + a_3)\,z \\ A_y^{(2)} &= \frac{1}{2}(b_1 + a_2)\,x + b_2 y + \frac{1}{2}(c_2 + b_3)\,z \\ A_z^{(2)} &= \frac{1}{2}(c_1 + a_3)\,x + \frac{1}{2}(c_2 + b_3)\,y + c_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Нетрудно видеть, что этот вектор будет потенциальным вектором, а именно:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\left[a_1 x^2 + b_2 y^2 + c_3 z^2 + (b_1 + a_2)\,xy + (c_1 + a_3)\,xz + (c_2 + b_3)\,yz\right],$$

и, очевидно, вихрь этого вектора будет нуль.

Определим теперь изменение элементарного объема в результате деформации. После деформации новый объем будет выражаться интегралом

$$v_1 = \iiint\limits_{(v)} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Совершая замену переменных по формуле из **[60]**, должны будем заменить

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \{(1 + a_1)\left[(1 + b_2)(1 + c_3) - c_2 b_3\right] + b_1\left[c_2 a_3 - a_2(1 + c_3)\right] + \\ + c_1\left[a_2 b_3 - (1 + b_2)\,a_3\right]\}\,dx\,dy\,dz.$$

Раскрывая скобки и удерживая лишь свободный член и первые степени малых коэффициентов $a$, $b$ и $c$, получим:

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \left[1 + (a_1 + b_2 + c_3)\right] dx\,dy\,dz,$$

и предыдущая формула дает

$$v_1 = \iiint\limits_{(v)} \left[1 + (a_1 + b_2 + c_3)\right] dx\,dy\,dz = v + (a_1 + b_2 + c_3)\,v,$$

где $v$ — величина объема до деформации. Коэффициент кубического изменения будет

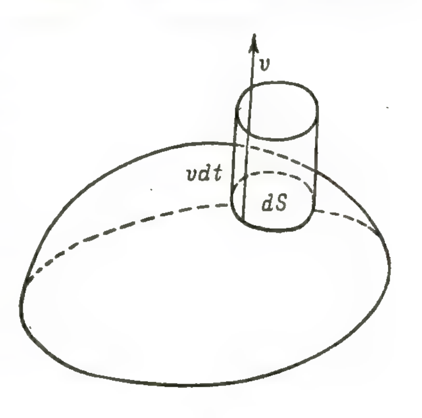
$$\frac{v_1 - v}{v} = a_1 + b_2 + c_3,$$

но нетрудно видеть, в силу (62), что сумма, стоящая справа, есть div **A**, т. е. *расходимость поля смещений дает коэффициент кубического изменения*.

**114. Уравнение непрерывности.** Пусть **v** означает скорость течения жидкости. Вычислим количество жидкости, протекающей через данную поверхность $(S)$ (черт. 96). Пусть $dS$ — малый элемент поверхности. Частицы, занимавшие в момент $t$ положение $dS$, за промежуток времени $dt$ передвинутся на отрезок $\mathbf{v}\,dt$, и таким образом за этот промежуток времени через $dS$ протечет количество жидкости $dQ$, занимающее объем цилиндра с основанием $dS$ и образующей $\mathbf{v}\,dt$. Высота этого цилиндра равна, очевидно, $v_n\,dt$, где $v_n$ есть проекция **v** на нормаль $(n)$ к поверхности, а потому

$$dQ = \rho v_n\,dt\,dS,$$

где $\rho$ есть плотность жидкости. Величина $dQ$ получится отрицательной, если угол $(n, v)$ окажется тупым. В случае замкнутой поверхности направление $(n)$ совпадает с направлением внешней нормали поверхности, и величина $dQ$ получится отрицательной, если жидкость втекает в объем, ограниченный этой поверхностью, через площадку $dS$. Общее количество жидкости, вытекающей через поверхность, отнесенное к единице времени, будет



Черт. 96.

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n\,dS, \tag{66}$$

при этом втекающая жидкость подсчитывается этой формулой со знаком минус.

Количество жидкости, занимающей объем $(v)$, ограниченный $(S)$, выражается интегралом

$$\iiint_{(v)} \rho\,dv,$$

и за время $dt$ это количество изменит свою величину на

$$dt \iiint_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dv,$$

а потому отнесенное к единице времени приращение количества жидкости будет

$$\iint\limits_{(v)}\int \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv,$$

а количество вытекающей жидкости выразится тем же интегралом, но с обратным знаком, так что для $Q$ получим два выражения:

$$Q=\iint\limits_{(S)} \rho v_n\,dS = -\iint\limits_{(v)}\int \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv,$$

или, согласно формуле (37):

$$Q=\iint\limits_{(v)}\int \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\,dv = -\iint\limits_{(v)}\int \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv,$$

причем мы оставляем плотность $\rho$ под знаком расходимости, так как она может быть переменной, т. е. зависеть от положения точки. Последняя формула дает нам соотношение, справедливое для любого объема внутри жидкости:

$$\iint\limits_{(v)}\int \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right]dv = 0.$$

Отсюда следует, что подинтегральная функция должна быть *тождественно* равной нулю, [1]) и мы получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{67}$$

Это очень важное соотношение, связывающее плотность и скорость при течении какой угодно жидкости, сжимаемой или нет, называется уравнением непрерывности. Соотношение (67) может быть переписано иначе, если мы учтем изменение плотности жидкой частицы, которая к моменту $t$ занимала положение $(x, y, z)$.

$\rho(t, x, y, z)$ есть плотность жидкости в момент $t$ в точке $(x, y, z)$. Рассмотрим изменение плотности некоторой жидкой частицы. При движении этой частицы плотность будет зависеть от $t$ как непосредственно, так и через посредство $(x, y, z)$, так как частица движется, и ее координаты меняются. Полная производная от $\rho$ по $t$ будет:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

---

[1]) В [71] мы показали, что если двойной интеграл по любой области равен нулю, то подинтегральная функция должна быть тождественно равна нулю. То же доказательство годится и для тройного интеграла.

что можно записать и так:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}v_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}v_z,$$

или

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho\cdot\mathbf{v}. \tag{68}$$

Мы можем переписать равенство (67), пользуясь ($57_1$), в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{grad}\rho\cdot\mathbf{v}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0,$$

т. е. в силу (68):

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0, \tag{69}$$

откуда

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Таким образом *расходимость поля скоростей* **v** *дает относительное изменение плотности элемента жидкости, находящегося в данном месте, — изменение, отнесенное к единице времени.*

Если жидкость несжимаема, то это изменение должно равняться нулю, и мы получим из (69) условие несжимаемости:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{70}$$

Мы вывели условие непрерывности путем подсчета количества жидкости, вытекающей из объема, подсчета, произведенного двумя способами. При этом предполагается, конечно, что в объеме нет источников жидкости — ни положительной, ни отрицательной силы (сток).

Если течение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциально, т. е. вектор **v** есть потенциальный вектор

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi,$$

то $\varphi$ называется потенциалом скорости. Подставляя в уравнение (70), получим:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=0,\quad \text{т. е.}\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{71}$$

т. е. *потенциал скорости для случая несжимаемой жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа* (71).

**115. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости.** Под идеальной жидкостью мы будем подразумевать такую деформируемую сплошную среду, в которой внутренние силы — находится ли она в состоянии равновесия или движения — приводятся к нормальному давлению, так что если выделить в этой среде некоторый объем ($v$), ограниченный поверхностью ($S$), то действие на него остальной части среды приводится к силе, направленной в каждой точке ($S$) по внутренней нормали. Обозначим величину этой силы

(давление), отнесенную на единицу площади, буквой $p$. В каждый данный момент давление $p(M)$ дает некоторое скалярное поле. Равнодействующая сил давления на поверхности объема $(v)$ выразится, в силу (50), интегралом:

$$-\iint\limits_{(S)} p\,d\mathbf{S} = -\iiint\limits_{(v)} \operatorname{grad} p\,dv,$$

где знак (—) поставлен потому, что положительное давление действует в направлении внутренней нормали, а вектор $d\mathbf{S}$ по условию направлен по внешней нормали.

Применяя принцип Даламбера, мы должны уравновесить силу давления внешними силами, которые мы относим к единице массы и обозначаем $\mathbf{F}$, что дает в объеме $(v)$ равнодействующую

$$\iiint\limits_{(v)} \rho\mathbf{F}\,dv,$$

и, наконец, силою инерции, которая на элемент массы будет $-\rho\,dv\,\mathbf{W}$, где $\rho$ — плотность, $\mathbf{W}$ — вектор ускорения жидкой частицы. На объем $(v)$ сила инерции будет

$$-\iiint\limits_{(v)} \rho\mathbf{W}\,dv.$$

Итак, согласно принципу Даламбера, мы должны иметь:

$$\iiint\limits_{(v)} [\rho\mathbf{F} - \operatorname{grad} p - \rho\mathbf{W}]\,dv = 0,$$

откуда, в силу произвольности $(v)$, как и выше, можно заключить, что подинтегральная функция равна нулю, и тогда получим:

$$\rho\mathbf{W} = \rho\mathbf{F} - \operatorname{grad} p. \tag{72}$$

В этой формуле заключаются три уравнения, которые являются основными уравнениями гидродинамики идеальной жидкости.

Пусть $u$, $v$, $w$ — составляющие вектора скорости, выраженные как функции координат точек $(x, y, z)$ и времени $t$. Слагающая вектора ускорения $\mathbf{W}$ по оси $OX$ будет равна полной производной по времени от составляющей $u(t, x, y, z)$ вектора скорости, так что мы можем написать

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},$$

или

$$W_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w.$$

Совершенно так же:

$$W_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w$$

$$W_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w.$$

Таким образом векторное уравнение (72) приведет нас к трем уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}u+\frac{\partial v}{\partial y}v+\frac{\partial v}{\partial z}w=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Это — так называемые уравнения гидродинамики в форме Эйлера. К этим уравнениям надо присоединить еще уравнение непрерывности, которое мы вывели в предыдущем номере. Пользуясь настоящими обозначениями, можем переписать уравнение (69) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial y}v+\frac{\partial \rho}{\partial z}w+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{74}$$

Характерной особенностью написанных уравнений является то обстоятельство, что при исследовании движения мы выбрали за независимые переменные координаты точки пространства $(x, y, z)$ и время $t$. В некоторых случаях вместо координат точек пространства $(x, y, z)$ за независимые переменные выбирают координаты того положения жидкой частицы, которое она имела в начальный момент времени. При таком выборе независимых переменных уравнения гидродинамики, конечно, будут выглядеть иначе.

**116. Уравнения распространения звука.** Уравнения (72) или (73) имеют место не только для жидкости в тесном смысле слова, но и для газа. Существенным является лишь гипотеза о том, что внутренняя сила сводится к одному давлению. Будем считать движение настолько малым, чтобы в левых частях уравнений (73) можно было пренебречь членами, содержащими произведение скоростей на их производные по координатам. При этом уравнения (73) перепишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{\partial v}{\partial t}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\quad \frac{\partial w}{\partial t}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{75}$$

или в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\mathbf{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{76}$$

Точно так же, отбрасывая в уравнении (74) члены с произведениями проекций скорости на производные от плотности по координатам, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=0. \tag{77}$$

Пусть $\rho_0$ — постоянная плотность среды в состоянии покоя. Введем малую величину $s$, характеризующую относительное изменение плотности при движении и определяемую равенством

$$\rho=\rho_0(1+s).$$

Отсюда

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{ds}{1+s}\sim ds,$$

причем в знаменателе $(1+s)$ мы отбрасываем малую величину $s$. В силу написанного, можно считать $\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$, и равенство (77) дает

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{78}$$

Можно считать, что градиент давления пропорционален градиенту величины $s$, характеризующей сжатие или разрежение, т. е.

$$\operatorname{grad} p = e \operatorname{grad} s,$$

где $e$ — коэффициент упругости среды. Подставляя это в уравнение (76) и считая в этом уравнении $\rho=\rho_0$, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\mathbf{F}-\frac{e}{\rho_0}\operatorname{grad} s.$$

Возьмем операцию расходимости от обеих частей этого равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{F}-\frac{e}{\rho_0}\operatorname{div}\operatorname{grad} s.$$

Принимая во внимание (78), можем написать это уравнение так:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s-\operatorname{div}\mathbf{F} \qquad \left(a=\sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right). \tag{79}$$

Этому уравнению должна удовлетворять величина $s$, которая есть функция времени и координат точки. Заметим, что при вычислении расходимости производной $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ мы переставили дифференцирование по $t$ с операцией расходимости, что представляется законным, так как результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Если внешние силы отсутствуют, то уравнение (79) будет

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=a^2\Delta s \qquad \left(a=\sqrt{\frac{e}{\rho_0}}\right). \tag{80}$$

Последнее уравнение называется обычно *волновым уравнением*. Вспоминая, что величина $s$ характеризует величину сгущения или разрежения, мы можем сказать, что в нашем случае это уравнение дает закон распространения звука. Те части пространства, где $\operatorname{div}\mathbf{F}$ отлична от нуля, будут источниками звука.

**117. Уравнение теплопроводности.** В [108] мы видели, что количество тепла, проходящее за время $dt$ через элемент поверхности $dS$, принимается равным

$$dQ=k\,dt\,dS\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|=k\,dt\,dS\left|\operatorname{grad}_n U(M)\right|,$$

где $k$ — коэффициент внутренней теплопроводности, $U$ — температура и $(n)$ — направление, нормальное к $dS$. Рассмотрим замкнутую поверхность $(S)$, ограничивающую объем $(v)$, и подсчитаем полное количества тепла, проходящее через $(S)$. Нетрудно видеть, что мы

получим

$$dQ = -dt \iint\limits_{(S)} k \operatorname{grad}_n U\, dS. \tag{81}$$

При этом, если в направлении внешней нормали ($n$) температура убывает, то $\frac{\partial U}{\partial n} < 0$, и соответствующий элемент интеграла будет отрицательным, а при возрастании температуры картина будет обратная. Принимая во внимание, что тепло течет в направлении убывания температуры и знак (—) в правой части (81), можем утверждать, что $Q$ есть количество тепла, отдаваемого объемом ($v$) за промежуток времени $dt$. Втекаемое в ($v$) тепло будет подсчитываться формулой (81) со знаком (—).

То же количество отдаваемого тепла можно подсчитать иначе, следя за изменением температуры внутри объема. Рассмотрим элемент объема $dv$. На увеличение температуры этого элемента на $dU$ за промежуток времени $dt$ нужно затратить количество тепла, пропорциональное повышению температуры и массе элемента, т. е. количество тепла:

$$\gamma\, dU \cdot \rho\, dv = \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dt\, dv,$$

где $\rho$ — плотность вещества, $\gamma$ — коэффициент пропорциональности, который называется теплоемкостью вещества. Таким образом отдаваемое всем объемом тепло выразится по формуле

$$dQ = -dt \iiint\limits_{(v)} \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dv,$$

причем знак (—) мы ставим потому, что подсчитывается отдаваемое, а не получаемое тепло.

Приравнивая полученные два выражения для $dQ$ и применяя формулу (37) из [109], будем иметь

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dv = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)\, dv, \tag{82}$$

т. е. при произвольном объеме должно иметь место соотношение

$$\iiint\limits_{(v)} \left[\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)\right] dv = 0,$$

откуда мы получим дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) \tag{83}$$

или

$$\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial U}{\partial z}\right). \tag{$83_1$}$$

Это уравнение должно выполняться во всех точках внутри рассматриваемого тела. Температура $U$ зависит от координат точки и времени.

Если тело однородно, то $\gamma$, $\rho$ и $k$ — постоянные, и уравнение (83) можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U \qquad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}\right) \tag{84}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \tag{84$_1$}$$

Если тепловое явление стационарно, т. е. температура не зависит от времени $t$, а только от координат $(x, y, z)$, то уравнение (84) перепишется в виде

$$\Delta U = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{85}$$

Мы получили таким образом для температуры в стационарном тепловом процессе уравнение Лапласа, которое мы уже встречали выше [**87** и **114**].

При выводе уравнения теплопроводности (83) мы предполагали, что в рассматриваемом теле отсутствуют источники тепла. В противном случае мы должны были бы вместо равенства (82) написать другое равенство, а именно

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t}\, dv = \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)\, dv + \iiint\limits_{(v)} e\, dv,$$

где последнее слагаемое в правой части представляет количество тепла, выделяемого в объеме $(v)$, причем это количество тепла рассчитано на единицу времени.

Подинтегральная функция $e(t, M)$ дает напряженность источников тепла, непрерывно распределенных в объеме $(v)$, и эта функция может зависеть как от времени, так и от положения точки $M$. Вместо дифференциального уравнения теплопроводности (83) мы получили бы уравнение вида

$$\gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) + e \tag{86}$$

или, в случае однородного тела, вместо уравнения (84) мы имели бы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + \frac{1}{\gamma\rho} e. \tag{87}$$

Уравнения (87) и (84) аналогичны уравнениям (79) и (80) из [**116**]. Наличие источников тепла в уравнениях теплопроводности аналогично наличию внешних сил или, точнее говоря, источников звука — $\operatorname{div} \mathbf{F}$ в уравнениях распространения звука. Как то, так и другое

обстоятельства делают дифференциальное уравнение неоднородным, т. е. уравнения (79) и (87), кроме членов, содержащих искомую функцию $s$ или $U$, содержат еще и свободные члены — $\operatorname{div} \mathbf{F}$ или $e$, которые надо считать заданными функциями. Обратим внимание и на существенную разницу между уравнениями (80) и (84). Первое из них содержит вторую производную от искомой функции по времени, тогда как второе содержит первую производную по времени. Это обстоятельство существенным образом скажется при интегрировании этих уравнений.

**118. Уравнения Максвелла.** При рассмотрении электромагнитного поля вводятся следующие векторы: $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы электрической и магнитной сил; $\mathbf{r}$ — вектор полного тока; $\mathbf{D}$ — вектор электрического смещения; $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции. Два основных закона электродинамики, являющихся обобщением законов Био-Савара и Фарадея, могут быть написаны в виде

$$\int\limits_{(l)} H_s\, ds = \frac{1}{c} \iint\limits_{(S)} r_n\, dS, \tag{88}$$

$$\int\limits_{(l)} E_s\, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint\limits_{(S)} B_n\, dS, \tag{89}$$

где $c$ — скорость света в пустоте.

Первое из уравнений связывает циркуляцию вектора магнитной силы вдоль контура некоторой поверхности с потоком вектора полного тока через самую поверхность. Второе уравнение связывает циркуляцию вектора электрической силы с производной по времени от потока магнитной индукции через поверхность. В написанных уравнениях $(l)$ — произвольный замкнутый контур и $(S)$ — поверхность, им ограниченная. Кроме того, в покоящейся однородной среде векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ связаны с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где $\varepsilon$ и $\mu$ — постоянные, называемые диэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью среды. Вектор полного тока состоит из двух слагаемых — тока проводимости и тока смещения:

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

где $\lambda$ — коэффициент проводимости среды. Таким образом окончательно уравнения (88), (89) принимают вид:

$$\int\limits_{(l)} H_s\, ds = \frac{1}{c} \iint\limits_{(S)} \left(\lambda E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t}\right) dS, \tag{$90_1$}$$

$$\int\limits_{(l)} E_s\, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint\limits_{(S)} \mu H_n\, dS. \tag{$90_2$}$$

Интегралы, стоящие в левых частях этих равенств, могут быть по формуле Стокса преобразованы в интегралы по поверхности:

$$\iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_n \mathbf{H}\, dS \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_n \mathbf{E}\, dS,$$

так что уравнения переписываются в виде:

$$\iint_{(S)} \left[ c \operatorname{rot}_n \mathbf{H} - \left( \lambda E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) \right] dS = 0$$

$$\iint_{(S)} \left[ c \operatorname{rot}_n \mathbf{E} + \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} \right] dS = 0.$$

Ввиду произвольности поверхности $(S)$, а следовательно, и направления нормали $(n)$, из последних уравнений вытекает

$$c \operatorname{rot} \mathbf{H} = \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad (91_1)$$

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \qquad (91_2)$$

Эти уравнения и представляют собою уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Мы имеем здесь шесть дифференциальных уравнений, содержащих шесть составляющих

$$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z.$$

Непосредственным следствием уравнений $(91_1)$ и $(91_2)$ в рассматриваемом случае является соленоидальность векторов

$$\lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

ибо их расходимость равна, в силу $(91_1)$ и $(91_2)$, расходимости:

$$c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad \text{и} \quad c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

и, следовательно, обращается в нуль [112].

Но можно доказать еще и то, что сами векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ соленоидальны в некоторой части пространства, если они были там таковыми в любой начальный момент времени.

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, введем две величины

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = \rho_e = \rho; \qquad \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = \rho_m, \qquad (92)$$

которые называются плотностями электрического и магнитного заряда. Из уравнения

$$\operatorname{div} \left( \lambda \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

следует

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

и, интегрируя это линейное уравнение первого порядка, получим [4]

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} t},$$

где $\rho_0$ есть значение $\rho$ при $t = 0$. Стало быть, если в начальный момент времени мы имели $\rho_0 = 0$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0,$$

то и при всяком $t$ будет $\rho = 0$, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Точно так же из уравнения ($91_2$) следует

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{H}=0,$$

и если $\operatorname{div}\mathbf{H}_0=0$, то $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ при всяком $t$.

Последнее уравнение равносильно условию равенства нулю магнитного заряда, что обычно и допускается.

Из уравнений Максвелла можно вывести другие уравнения, в которые каждый из векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ входит отдельно. Производя операцию rot над обеими частями уравнения ($91_2$), мы имеем

$$-c\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mu\frac{\partial\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\partial t}$$

или, в силу формулы ($57_1$) и уравнения ($91_1$),

$$c(\Delta\mathbf{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E})=\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\lambda\mathbf{E}\right),$$

откуда окончательно

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}(\Delta\mathbf{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}). \tag{93}$$

Совершенно такое же уравнение получается и для вектора $\mathbf{H}$.

При отсутствии электрических зарядов, т. е. в случае $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, уравнение (93) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\mathbf{E}. \tag{94}$$

Это уравнение называется обычно телеграфным уравнением, так как оно было получено впервые при изучении распространения тока по кабелю. Наконец, если мы имеем дело с совершенным диэлектриком, т. е. непроводящей средой, то $\lambda=0$, и уравнение (94) будет:

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=a^2\Delta\mathbf{E}\qquad\left(a=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right). \tag{95}$$

С уравнением такого вида мы уже встречались в [116].

Если процесс стационарен, т. е. векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от $t$, то уравнение ($91_2$) дает $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, т. е. $\mathbf{E}$ есть потенциальный вектор: $\mathbf{E}=\operatorname{grad}\varphi$, и первое из уравнений (92) дает:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}\quad\text{или}\quad\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{96}$$

В тех местах, где $\rho=0$, т. е. где электрические заряды отсутствуют, получим для потенциала $\varphi$ уравнение Лапласа $\Delta\varphi=0$.

**119. Выражение оператора Лапласа в ортогональных координатах.** В [60] мы вводили в рассмотрение любые криволинейные координаты в пространстве. Теперь мы рассмотрим один частный случай таких координат, а именно тот, когда элементарный объем, который, как мы упоминали в [60], представляется в виде параллелепипеда, будет прямоугольным параллелепипедом. Этот случай ортогональных криволинейных координат представляется наиболее важным и чаще всего встречается в приложении.

Пусть в пространстве вместо декартовых координат $x$, $y$, $z$ вводятся три новые переменные $q_1$, $q_2$, $q_3$:

$$\varphi(x, y, z) = q_1; \quad \psi(x, y, z) = q_2; \quad \omega(x, y, z) = q_3 \qquad (97)$$

или в форме, решенной относительно $x$, $y$, $z$:

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3); \quad y = \psi_1(q_1, q_2, q_3); \quad z = \omega_1(q_1, q_2, q_3). \qquad (98)$$

Придавая новым переменным $q_1$, $q_2$ и $q_3$ постоянные значения $A$, $B$, $C$, получим три семейства координатных поверхностей. Уравнения этих новых координатных поверхностей в координатах $x$, $y$, $z$ будут:

$$\varphi(x, y, z) = A \text{(I)}; \quad \psi(x, y, z) = B \text{(II)}; \quad \omega(x, y, z) = C \text{(III)}. \quad (99)$$

Возьмем две какие-либо координатные поверхности из разных семейств, например, из семейств (II) и (III). Они пересекаются вдоль некоторой линии, уравнение которой будет

$$\psi(x, y, z) = B; \quad \omega(x, y, z) = C,$$

где $B$ и $C$ — определенные постоянные. Вдоль этой линии меняется только переменная $q_1$, и эту линию можно назвать *координатной линией* $q_1$. Аналогичным образом получаются *координатные линии* $q_2$ и $q_3$.

Вычислим квадрат элемента длины в новых координатах:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2. \quad (100)$$

Раскрывая скобки, получим однородный полином второй степени относительно $dq_1$, $dq_2$, $dq_3$. Выясним условия, при которых этот полином не будет содержать членов с произведениями различных дифференциалов $dq$.

Рассмотрим, например, в выражении (100) слагаемое, содержащее произведение $dq_1 dq_2$. Коэффициент при этом произведении будет

$$2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2} + \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right). \qquad (101)$$

Элемент объема в новых координатах (черт. 97) будет ограничен тремя парами координатных поверхностей. Из его основной вершины $A$, которой соответствуют значения $q_1$, $q_2$, $q_3$ новых координат, будут выходить три ребра: $AB$, $AC$ и $AD$. Вдоль ребра $AB$ меняется только $q_1$, вдоль $AC$ — только $q_2$ и вдоль $AD$ — только $q_3$. Рассмотрим первое и второе ребра. На первом ребре функции (98) суть функции только $q_1$, и направляющие косинусы касательной

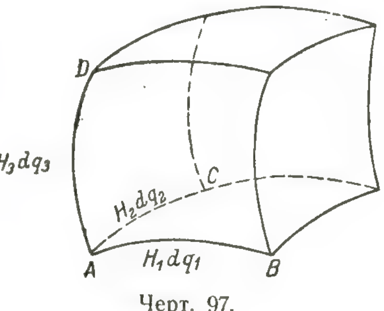
к этому ребру пропорциональны [I, 160]

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}.$$

Совершенно так же направляющие косинусы касательной ко второму ребру пропорциональны

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}.$$

Равенство нулю выражения (101), таким образом, равносильно требованию перпендикулярности рассматриваемых двух ребер. Если потребовать, чтобы в выражении (100) обратились в нуль и коэффициенты при $dq_1\,dq_3$ и $dq_2\,dq_3$, то это будет равносильно требованию, чтобы все три ребра элементарного объема в новых координатах были взаимно перпендикулярны. Таким образом *необходимым и достаточным условием ортогональности системы криволинейных координат является то, чтобы выражение $ds^2$ содержало только члены с квадратами дифференциалов*, т. е. *члены* с $dq_1^2$, $dq_2^2$ и $dq_3^2$.




Черт. 97.

Будем считать в дальнейшем, что криволинейные координаты ортогональны.

При этом получим для $ds^2$ выражение вида:

$$ds^2 = H_1^2\,dq_1^2 + H_2^2\,dq_2^2 + H_3^2\,dq_3^2, \tag{102}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_1}\right)^2 \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_2}\right)^2 \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Принимая во внимание, что вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна из переменных, мы получим, согласно формуле (102), длины этих ребер

$$ds_1 = H_1\,dq_1; \quad ds_2 = H_2\,dq_2; \quad ds_3 = H_3\,dq_3, \tag{104}$$

и элемент объема в новых координатах будет выражаться формулой

$$dv = ds_1\,ds_2\,ds_3 = H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{105}$$

Положим теперь, что в пространстве имеется векторное поле **A**. Расходимость этого поля в некоторой точке $M$ определяется, как известно [**109**], по формуле

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{(v_1) \to M} \frac{\iint\limits_{(S_1)} A_n \, dS}{v_1},$$

где $(S_1)$ — поверхность, ограничивающая некоторый объем $(v_1)$, содержащий точку $M$ и беспредельно сжимающийся к этой точке, и $v_1$ — величина этого объема. Применим это к случаю элементарного объема в криволинейных координатах $q_1$, $q_2$, $q_3$ и определим поток поля через поверхность этого элементарного объема. Начнем с определения потока через правую и левую грани. В основной вершине $A$ криволинейные координаты имеют значения $q_1$, $q_2$, $q_3$, а на правой грани надо будет заменить $q_1$ на $(q_1 + dq_1)$. Кроме того на правой грани направление внешней нормали совпадает с направлением координатной линии $q_1$, а на левой эти направления противоположны. Таким образом на правой грани слагающая $A_n$ по внешней нормали $(n)$ будет $A_{q_1}$, а на левой грани это будет $(-A_{q_1})$, где $A_{q_1}$ — проекция вектора **A** на касательную к координатной линии $q_1$ или, как говорят обычно, на координатную линию $q_1$. Ввиду малости граней заменяем поверхностный интеграл по ним $\iint A_n \, dS$ просто произведением подинтегральной функции на площадь соответствующей грани и таким образом получим для потока через правую и левую грани выражение

$$A_{q_1} \, ds_2 \, ds_3 \big|_{q_1 + dq_1} \quad \text{и} \quad -A_{q_1} \, ds_2 \, ds_3 \big|_{q_1},$$

а поток через обе грани будет

$$A_{q_1} \, ds_2 \, ds_3 \big|_{q_1 + dq_1} - A_{q_1} \, ds_2 \, ds_3 \big|_{q_1}$$

или, согласно формулам (104):

$$A_{q_1} H_2 H_3 \, dq_2 \, dq_3 \big|_{q_1 + dq_1} - A_{q_1} H_2 H_3 \, dq_2 \, dq_3 \big|_{q_1} =$$
$$= [H_2 H_3 A_{q_1} \big|_{q_1 + dq_1} - H_2 H_3 A_{q_1} \big|_{q_1}] \, dq_2 \, dq_3.$$

Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим окончательно выражение потока через правую и левую грани:

$$\frac{\partial (H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3.$$

Совершенно так же поток через заднюю и переднюю грани будет:

$$\frac{\partial (H_3 H_1 A_{q_2})}{\partial q_2} \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$$

и поток через верхнюю и нижнюю грани

$$\frac{\partial (H_1 H_2 A_{q_3})}{\partial q_3} dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Складывая полученные три выражения и деля на величину элементарного объема, получаемую из формулы (105), придем к выражению расходимости поля в ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (H_2 H_3 A_{q_1})}{\partial q_1} + \frac{\partial (H_3 H_1 A_{q_2})}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 A_{q_3})}{\partial q_3}\right]. \qquad (106)$$

Положим теперь, что поле $\mathbf{A}$ есть потенциальное поле, т. е. поле градиента некоторой функции $U(M)$, следовательно, $\mathbf{A} = \operatorname{grad} U$.

В этом случае составляющая поля $A_{q_1}$ есть производная функции $U$ по направлению $q_1$:

$$A_{q_1} = \lim_{\Delta s_1 \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1},$$

совершенно аналогично:

$$A_{q_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}; \qquad A_{q_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (106), получим выражение оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right]. \qquad (107)$$

Уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ будет выглядеть в координатах $q_1$, $q_2$, $q_3$ следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) = 0. \qquad (108)$$

1. Сферические координаты. В случае сферических координат формулы (98) имеют вид [59]:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi; \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi; \qquad z = r\cos\theta,$$

причем $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ и $q_3 = \varphi$. Вычисляем $ds^2$:

$$ds^2 = (\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi)^2 + (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2,$$

или, открывая скобки:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \qquad (109)$$

т. е. $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin\theta$, причем $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, так что $H_3 \geqslant 0$. Подставляя в (108), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (110)$$

Найдем решения этого уравнения, зависящие только от радиуса-вектора. При этом надо считать $\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$, и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = 0,$$

откуда

$$r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = -C_1 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2},$$

и, интегрируя, получим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2, \qquad (111)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Напомним, что $r$ есть расстояние переменной точки $M$ до любой фиксированной точки $M_0$, которую мы можем выбрать за начало. В частности, при $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$ мы имеем решение $\frac{1}{r}$, о котором мы уже говорили в [87].

2. Цилиндрические координаты. В этом случае

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad z = z,$$

так что $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Для $ds^2$ имеем:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

откуда $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$ и $H_3 = 1$, и уравнение Лапласа в цилиндрических координатах будет, согласно (108):

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \rho\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \qquad (112)$$

Нетрудно показать, как и выше, что решение этого уравнения, зависящее только от расстояния $\rho$ точки до $OZ$, будет:

$$U = C_1 \lg\rho + C_2. \qquad (113)$$

Положим, что значения $U$ не зависят от $z$, т. е. что $U$ имеет одинаковые значения в соответствующих точках всех плоскостей, парал-

лельных плоскости $XY$. При этом достаточно рассматривать значения $U$ на одной плоскости $XY$ (плоский случай). В прямолинейных прямоугольных координатах уравнение Лапласа в этом случае будет

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

Относя плоскость к полярным координатам ($\rho$, $\varphi$), получим, в силу (112), уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0.$$

Из выражения (113) видно, что в плоском случае $\lg\rho$ будет давать решение уравнения Лапласа, где $\rho$ — расстояние переменной точки плоскости до какой-либо фиксированной точки. Вместо $\lg\rho$ можно, конечно, брать решение $\lg\frac{1}{\rho}=-\lg\rho$. Таким образом в трехмерном пространстве основным решением уравнения Лапласа является величина, обратная расстоянию переменной точки до некоторой постоянной точки, а в плоском случае основным решением будет логарифм этого обратного расстояния или самого расстояния.

**120. Операция дифференцирования для случая переменного поля.** Положим, что мы имеем в пространстве некоторое скалярное поле $U(t, M)$ или векторное поле $\mathbf{A}(t, M)$, причем в обоих случаях это поле меняется с течением времени, т. е. в каждой точке величина скаляра или вектор суть функции времени $t$. Положим, кроме того, что все пространство находится в движении, которое характеризуется полем вектора скорости $\mathbf{v}$. Последний вектор мы также считаем зависящим от времени.

Будем следить за изменением величины $U$ с течением времени. Мы можем сделать это двояким образом.

1. Фиксируя свое внимание на определенной точке пространства, мы будем определять скорость изменения величины $U$ в этой точке пространства. Таким образом мы придем к частной производной $\frac{\partial U}{\partial t}$, которую можно назвать *локальной производной*, поскольку мы связываем себя с определенным местом пространства.

2. Иначе мы можем определить скорость изменения величины $U$, фиксируя свое внимание на определенной частичке движущейся среды (субстанции). При этом мы должны, дифференцируя по времени, принимать во внимание и движение самих точек среды, т. е. мы должны дифференцировать величину $U$ не только непосредственно по $t$, но также и через посредство координат ($x$, $y$, $z$) точки $M$. Мы приходим в этом случае к полной производной или, как иначе говорят, к *субстанциональной производной*:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}v_x+\frac{\partial U}{\partial y}v_y+\frac{\partial U}{\partial z}v_z,$$

что можно переписать в следующей сжатой форме:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}U. \tag{114}$$

Мы уже имели пример субстанциональной производной в [114], где мы рассматривали полную производную по времени от плотности частицы движущейся непрерывной среды.

Точно так же для переменного вектора $\mathbf{A}(t, M)$ в движущейся среде будет иметь место формула

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} v_z$$

или

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\,\text{grad})\,\mathbf{A}, \tag{115}$$

где символ $(\mathbf{v}\,\text{grad})$ имеет следующее значение:

$$(\mathbf{v}\,\text{grad}) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

В формулах (114) и (115) первое слагаемое, т. е. частная производная по времени, характеризует изменение величины в данном месте, а второе слагаемое является результатом движения самой среды.

Мы установим теперь некоторые формулы для дифференцирования интегралов по областям, связанным с движущейся средой. В данном случае зависимость величины интеграла от времени будет иметь место как вследствие того, что подинтегральная функция зависит от $t$, так и потому, что область интегрирования меняется с течением времени. Мы можем здесь при вычислении производной по $t$ считать эту двоякую зависимость от $t$ за зависимость от двух переменных и применить правило дифференцирования сложных функций [I, 69]. Дело по существу приведется к принципу наложения бесконечно малых действий. Производная от интеграла по $t$ будет состоять из двух слагаемых: первое слагаемое, вычисленное в предположении неизменности области интегрирования, определяется простым дифференцированием по $t$ под знаком интеграла [80], а второе слагаемое учитывает лишь эффект от изменения самой области интегрирования, и при его вычислении подинтегральная функция считается неизменной с течением времени.

Переходим к рассмотрению ряда случаев.

1. Пусть $(v)$ — некоторый переменный объем и $U(t, M)$ — скалярная функция. Установим формулу для производной

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(v)} U\,dv.$$

Каждый элемент $dS$ поверхности $(S)$, ограничивающей область $(v)$, за промежуток времени $dt$ опишет объем $dt v_n\,dS$, где $(n)$ — направление внешней нормали к поверхности $(S)$ [114].

Умножая это изменение объема на соответствующую величину подинтегральной функции $U$ и суммируя по всей поверхности $(S)$, получим изменение величины интеграла, происшедшее от изменения самой области $(v)$ [1]:

$$dt \iint\limits_{(S)} U v_n\,dS.$$

---

[1]) Если угол между направлениями $\mathbf{v}$ и $(n)$ — тупой, то $v_n$ будет величиной отрицательной и изменение объема $dt v_n\,dS$ также будет отрицательным.

Деля на $dt$ и добавляя слагаемое, происшедшее от изменения подинтегральной функции, получим выражение производной интеграла в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial t}\,dv + \iint\limits_{(S)} Uv_n\,dS,$$

откуда, применяя формулу Остроградского, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}(U\mathbf{v})\right] dv. \tag{116}$$

Заменяя $\frac{\partial U}{\partial t}$ его выражением через $\frac{dU}{dt}$ согласно формуле (114) и пользуясь формулой ($57_1$) [112]

$$\operatorname{div}(U\mathbf{v}) = U \operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} U,$$

можем переписать формулу (116) в виде

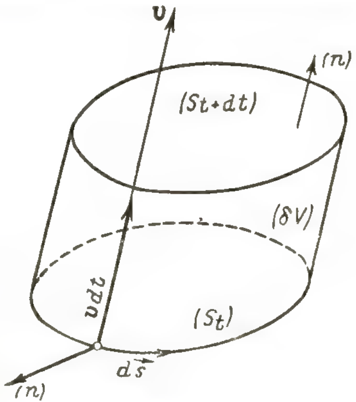
$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} U\,dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{dU}{dt} + U\operatorname{div}\mathbf{v}\right] dv. \tag{117}$$

2. Рассмотрим теперь производную от потока переменного вектора поля $\mathbf{A}(t, M)$ через движущуюся поверхность $(S)$:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n\,dS.$$

Здесь $(S)$ — некоторая поверхность, связанная с движущейся средой, и $(n)$ — определенное направление нормали к $(S)$. Одним из слагаемых в искомом выражении производной будет

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial A_n}{\partial t}\,dS. \tag{118}$$




Черт. 98.

Определим теперь второе слагаемое происходящее от движения самой поверхности $(S)$. Пусть $(l)$ — контур этой поверхности и $d\mathbf{s}$ — направленный элемент этого контура, причем, в дальнейшем мы определим направление контура $(l)$ (черт. 98). За промежуток времени $dt$ поверхность $(S)$ опишет объем $(\delta V)$, ограниченный тремя поверхностями: положением $(S_t)$ поверхности $(S)$ в момент $t$, положением $(S_{t+dt})$ поверхности $(S)$ в момент $t+dt$ и поверхностью $(S')$, описанной контуром $(l)$ за промежуток времени $dt$. Элемент площади поверхности $(S')$ будет:

$$dS' = |\,d\mathbf{s}\times\mathbf{v}\,|\,dt.$$

Пусть $(n)$ — направление нормали на $(S_t)$ и $(S_{t+dt})$, взятое в одну и ту же сторону, а именно положим, что на $(S_{t+dt})$ оно направлено вовне объема $(\delta V)$. Обозначим также через $(n)$ направление нормали к $(S')$, внешней для $(\delta V)$, и придадим $(l)$ такое направление, чтобы $d\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$ и $(n)$ на $(S')$ имели

ту же ориентировку, что и координатные оси. При этом очевидно

$$A_n\,dS' = \mathbf{A}\cdot(d\mathbf{s}\times\mathbf{v})\,dt,$$

так что формула Остроградского дает нам

$$\iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n\,dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n\,dS + dt\int\limits_{(l)} \mathbf{A}\cdot(d\mathbf{s}\times\mathbf{v}) = \iiint\limits_{(\delta V)} \operatorname{div}\mathbf{A}\,dv. \qquad (119)$$

Знак (—) перед интегралом по $(S_t)$ поставлен в силу того, что на $(S_t)$ нормаль $(n)$ направлена внутрь $(\delta V)$. Но, как известно [105],

$$\mathbf{A}\cdot(d\mathbf{s}\times\mathbf{v}) = d\mathbf{s}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{v}\times\mathbf{A})_s\,ds,$$

где $(\mathbf{v}\times\mathbf{A})_s$ — проекции $\mathbf{v}\times\mathbf{A}$ на направление $d\mathbf{s}$, и, следовательно, по формуле Стокса

$$\int\limits_{(l)} \mathbf{A}\cdot(d\mathbf{s}\times\mathbf{v}) = \int\limits_{(l)} (\mathbf{v}\times\mathbf{A})_s\,ds = \iint\limits_{(S_t)} \operatorname{rot}_n(\mathbf{v}\times\mathbf{A})\,dS.$$

Разбивая объем $(\delta V)$ на элементарные объемы $dv = v_n\,dS\,dt$, где $dS$—элемент площади поверхности $(S_t)$, мы получим из формулы (119):

$$\iint\limits_{(S_{t+dt})} A_n\,dS - \iint\limits_{(S_t)} A_n\,dS = dt\iint\limits_{(S_t)} [v_n \operatorname{div}\mathbf{A} - \operatorname{rot}_n(\mathbf{v}\times\mathbf{A})]\,dS.$$

Деля обе части на $dt$ и переходя к пределу, мы будем иметь то слагаемое в выражении производной, которое происходит от движения поверхности $(S)$. Прибавляя еще слагаемое (118), получим окончательно:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n\,dS = \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{rot}_n(\mathbf{A}\times\mathbf{v})\right] dS. \qquad (120)$$

Если $(S)$ есть замкнутая поверхность, то в выражении производной будет отсутствовать член, содержащий $\operatorname{rot}_n(\mathbf{A}\times\mathbf{v})$, и соответствующая этому случаю формула непосредственно вытекает из (116). Действительно, пусть $(v)$ — переменный объем, ограниченный замкнутой поверхностью $(S)$. Пользуясь формулой Остроградского и (116), получим:

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{(S)} A_n\,dS = \frac{d}{dt}\iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\mathbf{A}\,dv = \iiint\limits_{(v)} \left[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A})\right] dv =$$

$$= \iiint\limits_{(v)} \operatorname{div}\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A}\right] dv = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div}\mathbf{A}\right) dS.$$

3. Выведем теперь производную от циркуляции переменного вектора по движущейся кривой:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s\,ds.$$

Одним из слагаемых в искомом выражении, как всегда, будет

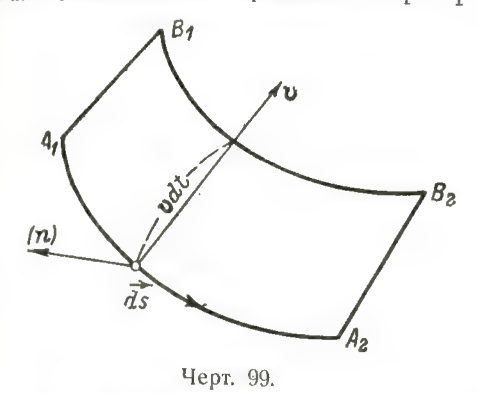
$$\int\limits_{(l)} \frac{\partial A_s}{\partial s}\,ds. \qquad (121)$$

Определим теперь добавочное слагаемое, происходящее от движения самой кривой. За промежуток времени $dt$ кривая $(l)$ опишет поверхность $(\delta S)$, ограниченную четырьмя линиями (черт. 99): кривой $A_1A_2$, которая является положением $(l_t)$ линии $(l)$ в момент времени $t$; кривой $B_1B_2$, которая дает положение $(l_{t+dt})$ линии в момент $t+dt$; наконец, кривыми $A_1B_1$ и $A_2B_2$, которые опишут концы $A_1$ и $A_2$ кривой $(l)$ за промежуток времени $dt$. Формула Стокса дает

$$\int\limits_{(l_t)} A_s\,ds + \int\limits_{(A_2B_2)} A_s\,ds - \int\limits_{(l_{t+dt})} A_s\,ds + \int\limits_{(B_1A_1)} A_s\,ds = \iint\limits_{(\delta S)} \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\,dS, \qquad (122)$$

причем интегрирование по $(l_t)$ и $(l_{t+dt})$ производится в направлении от $A_1$ и $B_1$ к $A_2$ и $B_2$, и $(n)$ — направление нормали к $(\delta S)$ такое, что на $(l_t)$ векторы $d\mathbf{s}$, $\mathbf{v}$ и $(n)$ имеют ту же ориентировку, что и оси. Интегралы по малым кривым $(A_2B_2)$ и $(B_1A_1)$ можно заменить одним элементом, т. е. произведением величины подинтегральной функции на длину пути интегрирования. Мы получим для них скалярные произведения вектора $\mathbf{A}$ на малое перемещение $\mathbf{v}\,dt$:

$$\mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)}\,dt \quad \text{и} \quad -\mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)}\,dt,$$



Черт. 99.

где знак (—) поставлен ввиду того, что по кривой $B_1A_1$ интегрирование производится от $B_1$ к $A_1$, т. е. противоположно $\mathbf{v}$, и значки наверху показывают, что значение соответствующих величин надо брать в точках $A_1$ и $A_2$.

Элемент площади поверхности $dS$ будет

$$dS = |\,d\mathbf{s}\times\mathbf{v}\,|\,dt,$$

и нормаль $(n)$ к поверхности будет иметь направление вектора $d\mathbf{s}\times\mathbf{v}$, так что, очевидно,

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A}\,dS = (d\mathbf{s}\times\mathbf{v})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}\,dt = (\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A})\cdot d\mathbf{s}\,dt,$$

и формула (122) дает:

$$\int\limits_{(l_{t+dt})} A_s\,ds - \int\limits_{(l_t)} A_s\,ds = \mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)}\,dt - \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)}\,dt + dt\int\limits_{(l_t)} (\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\,ds.$$

Деля обе части на $dt$, переходя к пределу и добавляя слагаемое (121), получим искомое выражение для производной, причем вместо $(l_t)$ мы пишем просто $(l)$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(l)} A_s\,ds = \mathbf{A}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{A}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)} + \int\limits_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \qquad (123)$$

Если кривая $(l)$ замкнутая, то внеинтегральные слагаемые пропадут, и мы получим:

$$\frac{d}{dt}\int_{(l)} A_s\,ds = \int_{(l)}\left[\frac{\partial A_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{A}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \tag{124}$$

Эту формулу можно просто вывести, преобразуя криволинейный интеграл по формуле Стокса и применяя затем формулу (120).

Рассмотрим еще циркуляцию скорости вдоль некоторого движущегося контура $(l)$. Согласно формуле (123)

$$\frac{d}{dt}\int_{(l)} v_s\,ds = \mathbf{v}^{(2)}\cdot\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{v}^{(1)}\cdot\mathbf{v}^{(1)} + \int_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_s\right]ds =$$

$$= |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2 + \int_{(l)}\left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_s\right]ds. \tag{125}$$

Составляющая вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}$ по оси $OX$ будет

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)v_y.$$

Раскрывая скобки и прибавляя и вычитая $\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x$, можем написать:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v})_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_z\right),$$

и. пользуясь (115), нетрудно получить отсюда:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{w} - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2}\operatorname{grad}|\mathbf{v}|^2,$$

где $\mathbf{w}$ — вектор ускорения. Подставляя в (125), будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\int_{(l)} v_s\,ds = |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2 + \int_{(l)}\left(w_s - \frac{1}{2}\operatorname{grad}_s|\mathbf{v}|^2\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[|\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2\right] + \int_{(l)} w_s\,ds, \tag{126}$$

ибо очевидно:

$$\int_{(l)}\operatorname{grad}_s|\mathbf{v}|^2\,ds = |\mathbf{v}^{(2)}|^2 - |\mathbf{v}^{(1)}|^2.$$

ГЛАВА V

# ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

## § 12. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

**121. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта.** В настоящей главе мы дадим основы теории кривых и поверхностей, причем начнем с исследования плоских кривых, затем перейдем к кривым в пространстве и к поверхностям. При изложении мы будем пользоваться векторами, так что читателю необходимо твердо помнить содержание первых номеров предыдущей главы включительно до [**107**], содержащего вопрос о дифференцировании вектора. Начнем с доказательства леммы:

Лемма. *Если* $\mathbf{A}$ *есть вектор длины единицы (единичный вектор), зависящий от скалярного параметра* $t$, то $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 0$, т. е. $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$. Действительно, по условию леммы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 1$, и, дифференцируя это равенство по $t$, получим:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0,$$

или, в силу независимости скалярного произведения от порядка множителей:

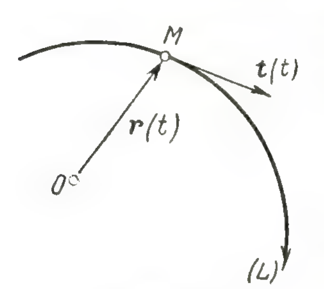
$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A},$$

причем условие $\frac{d\mathbf{A}}{dt} \perp \mathbf{A}$ имеет очевидно смысл лишь в том случае, если вектор $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ отличен от нуля.

Здесь и в дальнейшем мы всегда предполагаем существование и непрерывность тех производных, о которых говорится в тексте.

Пусть на плоскости имеется некоторая кривая $(L)$ и скалярный параметр $t$ определяет положение переменной точки $M$ на этой кривой. Мы можем охарактеризовать нашу кривую радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$ из некоторой постоянной точки $O$ в переменную точку кривой

(черт. 100). Как мы видели [107], производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ дает вектор, направленный по касательной к кривой, а если за параметр принять длину дуги $s$ кривой, отсчитываемую от определенной точки кривой в определенном направлении, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ даст *единичный вектор касательной* $\mathbf{t}$, направление которого совпадает с направлением увеличения параметра $s$ вдоль кривой:



Черт. 100.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}. \quad (1)$$

Производная от единичного вектора-касательной по $s$ называется *вектором кривизны*:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}. \quad (2)$$

Длина этого вектора характеризует быстроту изменения направления вектора $\mathbf{t}$ и называется *кривизной кривой*.

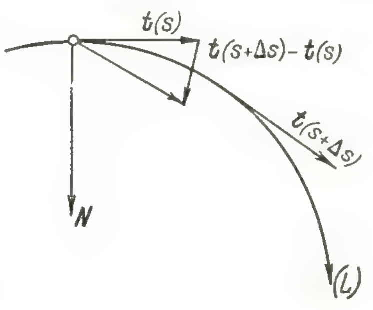
В силу доказанной леммы вектор кривизны перпендикулярен касательной, т. е. направлен по нормали.

Кроме того из его определения непосредственно следует, что он направлен в сторону вогнутости кривой, так как в эту сторону направлена разность $\mathbf{t}(s+\Delta s) - \mathbf{t}(s)$ при $\Delta s > 0$ (черт. 101).

Длина вектора $\mathbf{N}$, как мы уже указали, называется кривизной кривой, и если ввести обозначение

$$|\mathbf{N}| = \frac{1}{\rho}, \quad (3)$$

то величина $\rho$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*. Введем в рассмотрение единичный вектор кривизны $\mathbf{n}$, т. е. вектор длины единица, по направлению совпадающий с $\mathbf{N}$.



Черт. 101.

Если длина $|N| = 0$, то надо считать $\rho = \infty$, и вектор $\mathbf{n}$ не определен. Если, например, $(L)$ — прямая, то во всех ее точках $|N| = 0$, и мы можем выбирать любое из двух направлений нормали к прямой в той плоскости, в которой мы рассматриваем прямую. В дальнейшем будем считать, что $|N| \neq 0$.

В силу (3) имеем

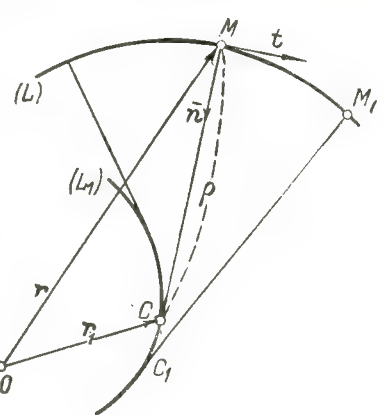
$$\mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \quad (4)$$

Отложим на направлении $\mathbf{n}$, т. е. на направлении нормали кривой в сторону вогнутости, отрезок $MC$, равный радиусу кривизны $\rho$ в точке $M$ (черт. 102). Его конец $C$ называется центром кривизны кривой в точке $M$. Если $M$ двигается вдоль кривой $(L)$, то $C$ меняется и описывает некоторую кривую $(L_1)$, которая называется *эволютой кривой* $(L)$, т. е. *эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.*

Для дальнейшего нам необходимо определить производную $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. Вектор $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, и, следовательно, $\frac{d\mathbf{n}}{ds} \perp \mathbf{n}$, т. е. $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ параллелен касательной. Дифференцируя очевидное равенство $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$ по $s$, будем иметь:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=0.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, в силу (4), $\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\rho}$, так что из последнего равенства следует $\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}$.




Черт. 102.

Сопоставляя это с параллельностью векторов $\mathbf{t}$ и $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$, видим, что $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ по направлению противоположен $\mathbf{t}$ и имеет длину $\frac{1}{\rho}$, т. е.:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}. \tag{5}$$

Пусть, как и выше, $\mathbf{r}$ и $s$ — радиус-вектор и длина дуги для кривой $(L)$, а $\mathbf{r}_1$ и $s_1$ — те же величины для эволюты $(L_1)$. Дифференцируя равенство (черт. 102)

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$$

по $s$, получим:

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\mathbf{t}+\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}+\rho\frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

или, в силу (5):

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\mathbf{t}+\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}-\mathbf{t},\quad \text{т. е.}\quad \frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}. \tag{6}$$

Правая часть этой формулы есть вектор, направленный по нормали к $(L)$, а левая — вектор, направленный по касательной к эволюте, и, следовательно, нормаль кривой $(L)$ параллельна касательной эволюты. Но обе эти линии проходят через одну и ту же точку $C$,

а поэтому должны совпадать, и мы имеем первое свойство эволюты: *нормаль к кривой касается эволюты в соответствующей точке.*

Вспоминая определение огибающих семейств линий, мы можем высказать и следующее второе свойство эволюты: *эволюта есть огибающая семейства нормалей к кривой.*

Естественным параметром для эволюты является ее длина дуги $s$, и, согласно правилу дифференцирования сложных функций,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \frac{ds_1}{ds}\,\mathbf{t}_1,$$

где $\mathbf{t}_1$ — единичный вектор касательной эволюты. Подставляя в (6), получим:

$$\frac{ds_1}{ds}\,\mathbf{t}_1 = \frac{d\rho}{ds}\,\mathbf{n},$$

откуда, сравнивая длины векторов, стоящих в обеих частях этого равенства, будем иметь:

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| = \left|\frac{d\rho}{ds}\right|, \quad \text{т. е.} \quad |ds_1| = |d\rho|.$$

Считая для простоты, что на рассматриваемом участке кривой и эволюты величины $s_1$ и $\rho$ увеличиваются, можно написать $ds_1 = d\rho$ [1]. Интегрируя это соотношение по рассматриваемому участку, обнаружим, что приращение длины дуги эволюты совпадает с приращением радиуса кривизны исходной кривой. Таким образом мы получаем третье свойство эволюты: *на участке монотонного изменения радиуса кривизны приращение его равно приращению длины дуги эволюты между соответствующими точками.* В случае черт. 102 это свойство выразится равенством: $M_1C_1 - MC = \smile CC_1$.

Выберем на плоскости определенные координатные оси $OX$ и $OY$, и пусть $\varphi$ есть угол, образованный направлением касательной $\mathbf{t}$ с осью $OX$. Выражая единичный вектор через его составляющие, получим:

$$\mathbf{t} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ суть единичные векторы по осям $OX$ и $OY$. Дифференцируем предыдущее равенство по $s$:

$$\mathbf{N} = -\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}\,\mathbf{j},$$

откуда квадрат длины вектора кривизны будет:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(-\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

---

[1]) Считая $\rho$ монотонно меняющимся, всегда можно выбрать направление отсчета $s_1$ так, чтобы $s_1$ монотонно возрастало вместе с $\rho$.

Мы получим таким образом выражение для кривизны, которое мы уже приводили в [**I,71**].

Положим, что уравнение кривой $(L)$ дано в явной форме

$$y = f(x). \tag{7}$$

Семейство нормалей к этой кривой будет иметь уравнение:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad \text{или} \quad (X - x) + y'(Y - y) = 0. \tag{8}$$

Здесь $(X, Y)$ суть текущие координаты нормали, а $(x, y)$ — координаты точки $M$ кривой $(L)$, причем $y$ есть функция (7) от $x$. Таким образом роль параметра в уравнении семейства нормалей (8) играет абсцисса $x$ переменной точки кривой. Применяя к семейству (8) обычное правило нахождения огибающей [**10**], мы должны написать два уравнения: уравнение (8) и новое уравнение, которое получается из него дифференцированием по параметру $x$:

$$\left.\begin{aligned} (X - x) + y'(Y - y) &= 0; \\ -1 + y''(Y - y) - y'^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исключая из этих уравнений параметр $x$, мы получим уравнение, связывающее $X$ и $Y$. Это и будет уравнение огибающей семейства нормалей, т. е. уравнение эволюты. Можно поступать и иначе, а именно, решая систему (9) относительно $X$ и $Y$, мы выразим последние через параметр $x$, т. е. получим параметрическое уравнение эволюты:

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}; \quad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{10}$$

Если уравнение кривой $(L)$ задано само в параметрической форме, то надо в формулах (10) выразить производные от $y$ по $x$ через дифференциалы переменных [**I,74**]:

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3},$$

и, подставляя эти выражения в (10), получим параметрическое уравнение эволюты для этого случая:

$$X = x - \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}; \quad Y = y + \frac{dx\,(dx^2 + dy^2)}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}. \tag{11}$$

Примеры. 1. Найдем эволюты эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b).$$

Написав уравнение эллипса в параметрической форме

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t$$

и подставляя в уравнение (11), найдем после несложных вычислений:

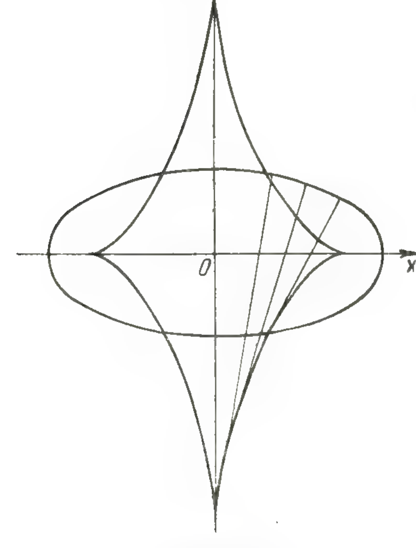
$$X = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

$$Y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t.$$

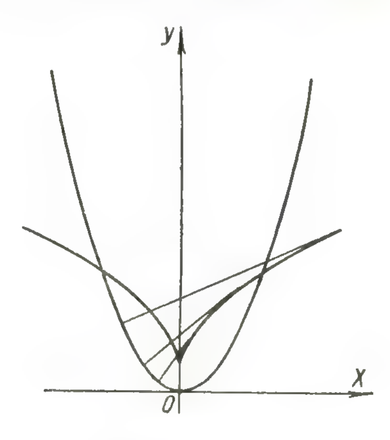
Исключим параметр $t$ из этих двух уравнений. Умножая первое из уравнений на $a$, второе на $b$, возводя в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим уравнение эволюты эллипса в неявной форме:

$$a^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Нетрудно, пользуясь этими уравнениями, построить эволюту эллипса.



Черт. 103.



Черт. 104.

Заметим, что в вершинах эллипса его радиус кривизны принимает наименьшее и наибольшее значения, и в соответствующих точках эволюта имеет особые точки, а именно точки возврата (черт. 103).

**2.** Найдем эволюту параболы $y = ax^2$. Пользуясь уравнениями (10), получим без труда:

$$X = -4a^2x^3, \quad Y = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Исключая отсюда параметр $x$, получим уравнение эволюты параболы в явной форме (черт. 104):

$$Y = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2\sqrt{2a}} X^{\frac{2}{3}}.$$

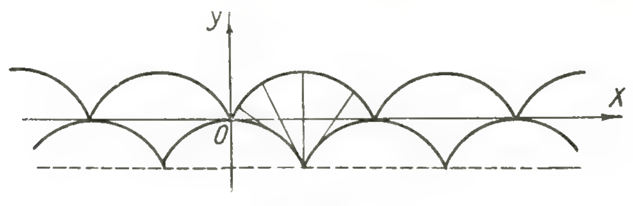
**3.** Рассмотрим циклоиду

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t).$$

Пользуясь формулами (11), найдем для ее эволюты параметрическое уравнение:

$$X = a(t + \sin t); \quad Y = -a(1 - \cos t).$$

Нетрудно показать, что эта кривая будет такая же циклоида, что и заданная кривая, но иначе расположенная относительно осей (черт. 105).



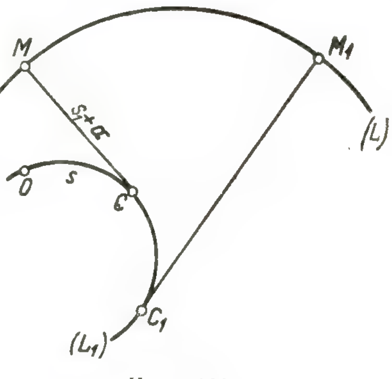

Черт. 105.

Действительно, полагая $t = \tau - \pi$, последние формулы можно переписать в виде:

$$X + a\pi = a(\tau - \sin\tau),$$
$$Y + 2a = a(1 - \cos\tau),$$

откуда и следует непосредственно наше утверждение.

**122. Эвольвента.** Сама кривая $(L)$ по отношению к своей эволюте $(L_1)$ называется *эвольвентой*. Из свойств эволюты нетрудно получить правило построения эвольвенты по заданной эволюте. Если $C$ — переменная точка на $(L_1)$ и $s_1$ — длина дуги этой кривой, то, откладывая на касательной к $(L_1)$ в точке $C$ в отрицательном направлении отрезок $\overline{CM} = s_1 + a$, где $a$ — некоторая постоянная, получим геометрическое место $(L)$ концов $M$. Нетрудно показать, что это геометрическое место и будет искомой эвольвентой (черт. 106). Чтобы обнаружить это, достаточно доказать, что отрезок $CM$ будет служить нормалью к кривой $(L)$. Пусть, как и выше, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ — радиусы-векторы кривых $(L)$ и $(L_1)$, $\mathbf{t}_1$ — единичный вектор касательной к $(L_1)$. По построению:




Черт. 106.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - (s_1 + a)\mathbf{t}_1,$$

откуда, дифференцируя по $s_1$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds_1} = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_1 - (s_1 + a)\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds_1} = -(s_1 + a)\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}.$$

Отсюда видно, что вектор $\frac{d\mathbf{r}}{ds_1}$, параллельный касательной к $(L)$, в то же время параллелен вектору $\frac{d\mathbf{t}_1}{ds_1}$, т. е. параллелен нормали к $(L_1)$, а отсюда следует, что касательная $\overline{CM}$ к $(L_1)$ есть нормаль к $(L)$.

Мы можем придавать произвольное значение постоянной $a$ в формуле $\overline{CM} = s_1 + a$, а потому можем получить бесчисленное множество эвольвент для заданной эволюты. Из самого способа построения следует, что любые две эвольвенты будут иметь общие нормали и что отрезок нормали между этими двумя эвольвентами будет сохранять постоянную длину, равную разности значений постоянной $a$, соответствующих взятым эвольвентам. Такие две кривые называются *параллельными кривыми*.

**123. Естественное уравнение кривой.** Вдоль всякой кривой кривизна есть определенная функция длины дуги

$$\frac{1}{\rho} = f(s). \tag{12}$$

Покажем, наоборот, что всякому уравнению вида (12) соответствует одна определенная кривая. Действительно, выберем какое-нибудь направление за направление оси $X$ и пусть $\varphi$ есть угол, образованный касательной кривой с этой осью. Как известно, $\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d\varphi}{ds}$, и уравнение (12) дает:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm f(s),$$

откуда

$$\varphi = \pm\int_0^s f(s)\,ds + C.$$

Можно считать, что направление оси $X$ совпадает с направлением касательной при $s = 0$, так что в последней формуле можно считать $C = 0$, т. е. мы получаем выражение для угла $\varphi$:

$$\varphi = \pm F(s), \qquad \text{где} \qquad F(s) = \int_0^s f(s)\,ds.$$

Далее мы знаем, что **[I, 70]**

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi; \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi,$$

откуда, в силу предыдущего равенства,

$$x = \int_0^s \cos[F(s)]\,ds + C_1,$$

$$y = \pm \int_0^s \sin[F(s)]\,ds + C_2.$$

Помещая начало координат в точку кривой, для которой $s = 0$, мы должны будем считать $C_1 = C_2 = 0$ и получим вполне определенную кривую

$$x = \int_0^s \cos[F(s)]\,ds; \qquad y = \pm \int_0^s \sin[F(s)]\,ds. \qquad (12_1)$$

Двойной знак дает только симметрию относительно оси $OX$.

Мы показали таким образом, что уравнению (12) может соответствовать определенная в указанном выше смысле кривая и что при выбранной системе координат уравнения $(12_1)$ должны давать параметрическое задание этой кривой. Нетрудно проверить, что, действительно, для кривой, определяемой уравнениями $(12_1)$, кривизна имеет значение, определяемое формулой (12).

Уравнение (12) называется *естественным уравнением кривой* в том смысле, что уравнение это не связано ни с каким случайным выбором осей координат и ему соответствует одна вполне определенная кривая (с точностью до симметрии).

Примеры. **1.** Если уравнение (12) имеет вид $\frac{1}{\rho} = C$, т. е. радиус кривизны $\rho$ есть величина постоянная, то, как мы знаем, такому уравнению удовлетворяет окружность [**I**, **71**]. Из предыдущего следует, что *окружность есть единственная кривая с постоянным радиусом кривизны.*

**2.** Положим, что кривизна $\frac{1}{\rho}$ пропорциональна длине дуги

$$\frac{1}{\rho} = 2as,$$

где $2a$ — положительный коэффициент пропорциональности. Предыдущие вычисления дадут в данном случае

$$x = \int_0^s \cos(as^2)\,ds; \qquad y = \int_0^s \sin(as^2)\,ds. \qquad (13)$$

В силу сходимости интегралов [**83**]

$$\int_0^\infty \cos(as^2)\,ds; \qquad \int_0^\infty \sin(as^2)\,ds$$

можно утверждать, что при беспредельном возрастании $s$ кривая будет стремиться к точке плоскости с координатами, равными значениям вышенаписанных интегралов, причем она будет спиралеобразно закручиваться вокруг этой точки (черт. 107). Если в формулах (13) будем придавать $s$ и отрицательные значения, то получим часть кривой, содержащуюся в третьем координатном угле. Полученная здесь кривая называется спиралью Корню. Она встречается в оптике.

Черт. 107.

**124. Основные элементы кривой в пространстве.** Кривая ($L$) в пространстве может быть определена заданием переменного радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ из начала в переменную точку кривой $M$ (черт. 108). Принимая за параметр $t$ длину дуги кривой $s$ и дифференцируя $\mathbf{r}$ по $s$, получим единичный вектор касательной к кривой [107]

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}. \qquad (14)$$

Производная от $\mathbf{t}$ по $s$ называется *вектором кривизны*:

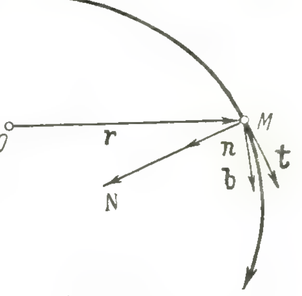
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{N}, \qquad (15)$$

и длина этого вектора кривизны дает *кривизну кривой* $\frac{1}{\rho}$, а обратная величина $\rho$ называется *радиусом кривизны*. Как и в случае плоской кривой, вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен к $\mathbf{t}$, и направление вектора $\mathbf{N}$ называется направлением *главной нормали кривой*. Вводя единичный вектор главной нормали $\mathbf{n}$, можно написать:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \qquad (16)$$

Введем еще один единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \qquad (17)$$



Черт. 108.

Этот вектор называется *единичным вектором бинормали*.

Три единичных вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, имеющих ту же ориентировку, что и координатные оси, составляют, как говорят, *переменный триэдр, связанный с кривой* ($L$). Если кривая плоская, то векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ находятся в плоскости кривой и, следовательно, единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ есть постоянный вектор длины единица, пер-

пендикулярный к плоскости кривой. Для кривой неплоской производная $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ характеризует отклонение кривой от плоской формы и называется *вектором кручения*. Докажем, что *вектор кручения параллелен главной нормали*. Согласно формуле (17)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{N} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, следовательно, их векторное произведение равно нулю, т. е.

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \tag{18}$$

откуда вытекает перпендикулярность векторов $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ и $\mathbf{t}$. С другой стороны, как всегда, производная единичного вектора $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярна к самому вектору $\mathbf{b}$. Таким образом вектор $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$, будет действительно параллелен вектору $\mathbf{n}$, и мы можем записать

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{n}, \tag{19}$$

где численный коэффициент $\frac{1}{\tau}$ называется *кручением кривой*, а обратная величина $\tau$ — *радиусом кручения или радиусом второй кривизны*. Заметим, что величина $\frac{1}{\tau}$ может быть как положительной, так и отрицательной, в противоположность кривизне $\frac{1}{\rho}$, которая всегда считается не отрицательной. Существование вектора касательной, вектора кривизны и вектора кручения связано, конечно, с существованием производных, через которые они выражаются.

Выведем теперь формулы для вычисления кривизны и кручения. Вводя координатные оси $OX$, $OY$, $OZ$ и соответствующие им единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, можно написать:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \qquad \mathbf{t} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k};$$

$$\mathbf{N} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k},$$

откуда для длины вектора $\mathbf{N}$ получим:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{20}$$

Из формулы (19) вытекает, что кручение $\frac{1}{\tau}$ можно выразить как скалярное произведение

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n}$$

или, в силу (18),

$$\frac{1}{\tau} = \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}\right) \cdot \mathbf{n}.$$

Заменяя $\mathbf{n}$ его выражением из формулы (16)

$$\mathbf{n} = \rho \mathbf{N},$$

получим:

$$\frac{1}{\tau} = \left(\mathbf{t} \times \frac{d(\rho\mathbf{N})}{ds}\right) \cdot \rho\mathbf{N} = \left[\mathbf{t} \times \left(\frac{d\rho}{ds}\mathbf{N} + \rho\frac{d\mathbf{N}}{ds}\right)\right] \cdot \rho\mathbf{N} =$$
$$= \rho\frac{d\rho}{ds}(\mathbf{t} \times \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N} + \rho^2 \cdot \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}\right) \cdot \mathbf{N}.$$

Но векторное произведение $\mathbf{t} \times \mathbf{N}$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}$, а потому первое из слагаемых в последнем выражении равно нулю, и мы получаем:

$$\frac{1}{\tau} = \rho^2\left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}\right) \cdot \mathbf{N},$$

или, переставляя множители в векторном произведении:

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\left(\frac{d\mathbf{N}}{ds} \times \mathbf{t}\right) \cdot \mathbf{N}.$$

Совершая круговую перестановку векторов и пользуясь формулами (14) и (15), получим окончательно:

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right) \cdot \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}. \tag{21}$$

Заметим, что коэффициент при $(-\rho^2)$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, $\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$ [**105**].

Возвратимся к формуле (20) для кривизны. В ней предполагается, что координаты $x$, $y$, $z$ выражены как функции длины дуги. Преобразуем теперь формулу (20) к новому виду, годному для любого параметрического задания кривой. Для этого нам надо будет выразить производную от координат по длине дуги через дифференциалы координат. Дифференцируя формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{22}$$

получим:

$$ds\, d^2s = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z. \tag{23}$$

Кроме того, имеем **[I, 74]**

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2x\,ds-d^2s\,dx}{ds^3};\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2y\,ds-d^2s\,dy}{ds^3};\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2z\,ds-d^2s\,dz}{ds^3}. \tag{24}$$

Подставляя это в формулу (20), будем иметь:

$$\frac{1}{\rho^2}=$$

$$=\frac{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-2\,ds\,d^2s(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)+(d^2s)^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{ds^6}$$

или, в силу (22) и (23):

$$\frac{1}{\rho^2}=$$

$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2}{ds^6}. \tag{25}$$

Вспомним теперь элементарное алгебраическое тождество, необходимое нам в дальнейшем **[104]**:

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2=$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2. \tag{26}$$

Применяя это тождество к числителю в выражении (25), можем написать окончательную формулу для квадрата кривизны:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{A^2+B^2+C^3}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3}, \tag{27}$$

где

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y;\qquad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z;\qquad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

Если кривая $(L)$ есть траектория движущейся точки, то вектор скорости определится из формулы

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\mathbf{t}.$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим вектор ускорения:

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

или в силу (15) и (16):

$$\mathbf{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}\quad\left(v=\frac{ds}{dt}\right),$$

откуда видно, что вектор ускорения имеет составляющую по касательной, равную $\frac{d^2s}{dt^2}$, и по главной нормали, равную $\frac{v^2}{\rho}$, а составляющая по бинормали равна нулю.

**125. Формулы Френе.** Введем обозначение для направляющих косинусов осей подвижного триэдра относительно неподвижных координатных осей, указанное в прилагаемой таблице.

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| $n$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $b$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |

Формулы Френе дают выражения производной от написанных девяти направляющих косинусов по $s$.

Составляющие единичного вектора $\mathbf{t}$ суть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, и формула

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}$$

дает первые три формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{\rho}; \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{\rho}; \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = \frac{\gamma_1}{\rho}. \tag{28}$$

Точно так же формула (19) приводит к следующим трем формулам Френе:

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{\tau}; \quad \frac{d\beta_2}{ds} = \frac{\beta_1}{\tau}; \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = \frac{\gamma_1}{\tau}. \tag{28$_1$}$$

Рассмотрение подвижного триэдра дает непосредственно $\mathbf{n} = -\mathbf{t} \times \mathbf{b}$, и, дифференцируя по $s$, получим:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{n} \times \mathbf{b} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{t} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b}.$$

Это дает три последние формулы Френе:

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha_2}{\tau}; \quad \frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta_2}{\tau}; \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma_2}{\tau}. \tag{28$_2$}$$

Пользуясь формулами (28), нетрудно показать, что *если вдоль линии* $(L)$ *кривизна* $\frac{1}{\rho}$ *равна нулю, то это есть прямая линия*. Действительно, тождество $\frac{1}{\rho} = 0$ дает

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} = 0,$$

откуда видно, что $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ суть постоянные. Но, как известно [**I, 160**], направляющие косинусы касательной $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ равны соответственно $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, и раз эти производные — постоянные, то сами координаты $x$, $y$, $z$ суть полиномы первой степени от $s$, т. е. линия есть действительно прямая.

Точно так же нетрудно показать, что *если вдоль кривой кручение равно нулю, то эта кривая есть плоская*.

**126. Соприкасающаяся плоскость.** Плоскость, определяемая векторами **t** и **n**, называется *соприкасающейся плоскостью кривой*. Нормалью к этой плоскости служит вектор **b**. Найдем выражения для направляющих косинусов этого вектора.

Ввиду того, что это — единичный вектор, его направляющие косинусы равны его составляющим $b_x$, $b_y$, $b_z$. Из формул (17) вытекает:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= b_x = t_y n_z - t_z n_y; \\ \beta_2 &= b_y = t_z n_x - t_x n_z; \\ \gamma_2 &= b_z = t_x n_y - t_y n_x, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $t_x, \ldots, n_x, \ldots$ — составляющие векторов **t** и **n**. Но, как мы видели выше, $t_x, t_y, t_z$ пропорциональны $dx, dy, dz$, а $n_x, n_y, n_z$ — пропорциональны составляющим вектора **N**, которые равны $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$ и $\frac{d^2z}{ds^2}$, а эти последние в свою очередь, в силу (24), пропорциональны разностям

$$d^2x\,ds - d^2s\,dx, \quad d^2y\,ds - d^2s\,dy, \quad d^2z\,ds - d^2s\,dz. \tag{30}$$

Заменяя в формулах (29) $t_x, t_y, t_z$ на $dx, dy, dz$; $n_x, n_y, n_z$ — разностями (30) и производя сокращения, убедимся в том, что направляющие косинусы бинормали пропорциональны выражениям:

$$\left.\begin{aligned} A = dy\,d^2z - dz\,d^2y; \quad B = dz\,d^2x - dx\,d^2z; \\ C = dx\,d^2y - dy\,d^2x, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

которые мы ввели выше [124]. Обозначая через $(x, y, z)$ координаты переменной точки $M$ кривой $(L)$, можем написать уравнение соприкасающейся плоскости в виде

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

В тех точках, где длина $|N| = 0$, т. е. $\rho = \infty$, все три величины (31) равны нулю, как это следует из (27), и соприкасающаяся плоскость не определена. Не определены и направления главной нормали и бинормали.

**127. Винтовые линии.** Пусть имеется цилиндр с образующими, параллельными оси $OZ$, и пусть $(l)$ есть его направляющая, лежащая в плоскости $XY$ (черт. 109). Введем в рассмотрение длину дуги $\sigma$ кривой $(l)$, отсчитываемую от точки $A$ пересечения этой кривой с осью $OX$ в определенном направлении, и положим, что уравнение направляющей будет

$$x = \varphi(\sigma); \quad y = \psi(\sigma). \tag{32}$$

Откладываем на $(l)$ некоторую дугу $AN$ и строим отрезок $NM = k\sigma$, параллельный оси $OZ$, причем $k$ есть определенный численный коэффициент (ход винта). Геометрическое место точек $M$ дает винтовую линию $(L)$,

начерченную на нашем цилиндре. Параметрические уравнения этой линии будут очевидно:

$$x = \varphi(\sigma); \quad y = \psi(\sigma); \quad z = k\sigma. \tag{33}$$

Пусть $s$ — длина дуги кривой $(L)$, отсчитываемая от точки $A$. Имеем:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + k^2]\, d\sigma^2.$$

Но $\varphi'(\sigma)$ и $\psi'(\sigma)$ равны косинусу и синусу угла, образованного касательной к кривой $(l)$ с осью $OX$ [I,70], а потому $\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1$, и предыдущую формулу можно переписать в виде

$$ds = \sqrt{1+k^2}\; d\sigma,$$

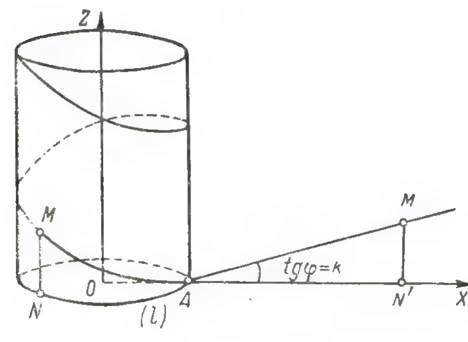
откуда

$$s = \sqrt{1+k^2}\; \sigma.$$

Определим теперь косинус угла, образованного касательной к $(L)$ с осью $OZ$:

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$$

это дает *первое свойство винтовой линии: касательные к винтовой линии образуют постоянный угол с некоторым неизменным направлением.*




Черт. 109.

Обратимся к третьей из формул (28). В данном случае она дает:

$$0 = \frac{\gamma_1}{\rho} \quad \text{или} \quad \gamma_1 = 0,$$

и, следовательно, главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к оси $OZ$, т. е. к образующей цилиндра. Но она, с другой стороны, перпендикулярна и касательной к винтовой линии. Образующая цилиндра и касательная к винтовой линии определяют, как нетрудно видеть, касательную плоскость к цилиндру во взятой точке на винтовой линии, и из предыдущего вытекает, что главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к этой касательной плоскости. Мы получаем таким образом *второе свойство винтовой линии: главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру, на котором эта винтовая линия начерчена.*

Теперь обратимся к косинусам $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ — углов, образованных осью $OZ$ с направлениями подвижного триэдра винтовой линии. Принимая во внимание, что $\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$ и что $\gamma$ и $\gamma_1$ — постоянные, как мы видели уже, мы можем заключить, что и $\gamma_2$ есть величина постоянная. Третья из формул $(28_2)$ дает, в нашем случае, $-\frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma_2}{\tau} = 0$, откуда мы видим, что отношение $\frac{\rho}{\tau}$ есть величина постоянная; итак, имеем *третье свойство винтовой линии: вдоль винтовой линии отношение радиуса кривизны к радиусу кручения есть величина постоянная.* Обозначим буквой $r$ радиус кривизны плоской кри-

вой ($l$). Принимая во внимание, что квадрат кривизны равен сумме квадратов вторых производных от координат по длине дуги, мы можем написать

$$\frac{1}{r^2} = \varphi''^2(\sigma) + \psi''^2(\sigma)$$

и

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\frac{1}{(1+k^2)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} + \frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+k^2)^2\, r^2},$$

или $\rho = (1+k^2)\, r$, т. е. радиус кривизны винтовой линии отличается от радиуса кривизны направляющей в соответствующей точке лишь постоянным множителем. Если цилиндр круговой, т. е. направляющая ($l$) есть окружность, то $r$ — постоянно, следовательно, и $\rho$ — постоянно, но тогда, согласно третьему свойству, и $\tau$ тоже есть постоянная величина, т. е. *винтовая линия на круговом цилиндре имеет постоянную кривизну и постоянное кручение.*

В заключение выясним еще одно важное свойство винтовых линий. Оно заключается в том, что если взять на цилиндре две точки, то кратчайшее расстояние между этими двумя точками на цилиндре будет даваться винтовой линией, проходящей через эти две точки. В этом отношении винтовые линии на цилиндре совершенно аналогичны прямым линиям на плоскости. Указанное свойство обычно выражают, говоря, что *винтовые линии суть геодезические линии цилиндра. Вообще геодезическими линиями на заданной поверхности называют линии, дающие кратчайшее расстояние между двумя точками поверхности.*

Если мы развернем цилиндр на плоскость $XZ$, поворачивая его вокруг образующей, проходящей через точку $A$, то, в силу того, что отношение дуги $AN$ к отрезку $NM$ сохраняет постоянное значение $\frac{1}{k}$, винтовая линия на плоскости окажется прямой линией. При указанной развертке цилиндра на плоскость длины сохраняются, и упомянутое выше свойство винтовой линии — давать кратчайшее расстояние на цилиндре — становится очевидным. Заметим, что это свойство стоит в непосредственной связи со вторым свойством винтовой линии, т. е. с тем фактом, что главные нормали винтовой линии совпадают с нормалями к цилиндру. В геометрии вообще доказывают, что *главные нормали к геодезической линии на любой поверхности совпадают с нормалями к этой поверхности.*

**128. Поле единичных векторов.** Пусть $\mathbf{t}$ — поле единичных векторов, т. е. в каждой точке пространства задан единичный вектор $\mathbf{t}$. Выведем простую и важную формулу для вектора кривизны $\mathbf{N}$ векторных линий этого поля. Вводя координаты $(x, y, z)$ и длину дуги $s$ векторной линии, мы можем написать:

$$\frac{dx}{ds} = t_x; \quad \frac{dy}{ds} = t_y; \quad \frac{dz}{ds} = t_z.$$

Определим составляющую $N_x$ вектора кривизны:

$$N_x = \frac{dt_x}{ds} = \frac{\partial t_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

или

$$N_x = \frac{\partial t_x}{\partial x}\, t_x + \frac{\partial t_x}{\partial y}\, t_y + \frac{\partial t_x}{\partial z}\, t_z.$$

Дифференцируя тождество

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$$

по $x$, получим:

$$t_x \frac{\partial t_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial t_y}{\partial x} + t_z \frac{\partial t_z}{\partial x} = 0.$$

Вычитая эту сумму из полученного выше выражения $N_x$, можем переписать его в виде:

$$N_x = \left(\frac{\partial t_x}{\partial z} - \frac{\partial t_z}{\partial x}\right) t_z - \left(\frac{\partial t_y}{\partial x} - \frac{\partial t_x}{\partial y}\right) t_y,$$

т. е. $N_x = (\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t})_x$, и то же самое, очевидно, получится и для двух других составляющих, что и дает искомую формулу для вектора кривизны векторных линий:

$$\mathbf{N} = \operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t}. \tag{34}$$

Для того чтобы линии были прямыми, необходимо и достаточно, чтобы длина $\mathbf{N}$, т. е. кривизна $\frac{1}{\rho}$, была равна нулю [**125**]. Отсюда видно, что *для того, чтобы векторные линии единичного поля* $\mathbf{t}$ *были прямые, необходимо и достаточно*, чтобы

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0. \tag{35}$$

Кроме того мы видели, что для существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям, необходимо и достаточно [**110**]

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 0. \tag{36}$$

Совместное выполнение условий (35) и (36) возможно лишь в случае $\operatorname{rot} \mathbf{t} = 0$, ибо если этот вектор отличен от нуля, то условие (35) равносильно параллельности векторов $\operatorname{rot} \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$, а условие (36) равносильно их перпендикулярности. Отсюда следует, что *векторные линии поля единичных векторов* $\mathbf{t}$ *будут нормалями к некоторому семейству поверхностей лишь в том случае, когда* $\operatorname{rot} \mathbf{t} = 0$. Это предложение играет важную роль при изложении начал геометрической оптики.

## § 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**129. Параметрические уравнения поверхности.** До сих пор мы рассматривали уравнение поверхности в пространстве с координатными осями $X$, $Y$, $Z$ в явной форме $z = f(x, y)$ или в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0. \tag{37}$$

Можно написать уравнения поверхности в параметрической форме, выражая координаты ее точек в виде функций двух независимых переменных параметров $u$ и $v$:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad z = \omega(u, v). \tag{38}$$

Мы будем предполагать, что эти функции однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные до второго порядка в некоторой области изменения параметров $(u, v)$.

Если подставить эти выражения координат через $u$ и $v$ в левую часть уравнения (37), то мы должны получить тождество относи-

тельно $u$ и $v$. Дифференцируя это тождество по независимым переменным $u$ и $v$, будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=0.$$

Рассматривая эти уравнения как два однородных уравнения относительно $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ и применяя алгебраическую лемму, упомянутую в [**104**], получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right);\quad \frac{\partial F}{\partial y}=k\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

где $k$ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Мы считаем, что множитель $k$ и по крайней мере одна из разностей, стоящих в правых частях последних формул, отличны от нуля.

Обозначим для краткости написанные три разности следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{d(y,z)}{d(u,v)};\quad \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{d(z,x)}{d(u,v)};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d(x,y)}{d(u,v)}.$$

Как известно, уравнение касательной плоскости к нашей поверхности в некоторой ее точке $(x, y, z)$ можно написать в виде [**I, 160**]

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

или, заменяя $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ пропорциональными величинами, можем переписать уравнение касательной плоскости так:

$$\frac{d(y,z)}{d(u,v)}(X-x)+\frac{d(z,x)}{d(u,v)}(Y-y)+\frac{d(x,y)}{d(u,v)}(Z-z)=0. \qquad (39)$$

Коэффициенты в этом уравнении, как известно, пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности.

Положение переменной точки $M$ на поверхности характеризуется значениями параметров $u$ и $v$, и эти параметры называются обычно координатами точек поверхности.

Придавая параметрам $u$ и $v$ постоянные значения, получим два семейства линий на поверхности, которые мы назовем координатными линиями поверхности: координатные линии $u = C_1$, вдоль которых меняется только $v$, и координатные линии $v = C_2$, вдоль которых меняется только $u$. Эти два семейства координатных линий дают координатную сетку на поверхности.

В качестве примера рассмотрим сферу с центром в начале координат и радиусом $R$. Параметрические уравнения такой сферы могут быть написаны в виде

$$x = R \sin u \cos v; \quad y = R \sin u \sin v; \quad z = R \cos u.$$

Координатные линии $u = C_1$ и $v = C_2$ представляют собой в данном случае, очевидно, параллели и меридианы нашей сферы.

Отвлекаясь от координатных осей, мы можем охарактеризовать поверхность переменным радиусом-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, идущим из постоянной точки $O$ в переменную точку $M$ нашей поверхности. Частные производные от этого радиуса-вектора по параметрам $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ дадут, очевидно, векторы, направленные по касательным к координатным линиям. Составляющие этих векторов по осям $OX$, $OY$, $OZ$ будут, согласно (38), $\varphi'_u$, $\psi'_u$, $\omega'_u$ и $\varphi'_v$, $\psi'_v$, $\omega'_v$, и отсюда видно, что коэффициенты в уравнении касательной плоскости (39) суть составляющие векторного произведения $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$. Это векторное произведение есть вектор, перпендикулярный к касательным $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$, т. е. вектор, направленный по нормали поверхности. Квадрат длины этого вектора выражается, очевидно, скалярным произведением вектора $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ на самого себя, т. е. проще говоря, квадратом этого вектора[1]). В дальнейшем будет играть существенную роль единичный вектор нормали поверхности, который мы можем, очевидно, написать в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2}}. \tag{40}$$

Изменяя порядок сомножителей в написанном векторном произведении, мы получим для вектора (40) противоположное направление. Мы будем в дальнейшем определенным образом фиксировать порядок множителей, т. е. будем определенным образом фиксировать направление нормали к поверхности.

Возьмем на поверхности некоторую точку $M$ и проведем через эту точку какую-либо кривую $(L)$, лежащую на поверхности. Эта кривая, вообще говоря, не координатная линия, и вдоль нее будут меняться как $u$, так и $v$. Направление касательной к этой кривой будет опреде-

---

[1]) Вообще, если $\mathbf{A}$ есть некоторый вектор, то мы будем обозначать через $\mathbf{A}^2$ квадрат длины этого вектора, т. е. скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

ляться вектором $\mathbf{r}'_u + \mathbf{r}'_v \frac{dv}{du}$, если считать, что вдоль $(L)$ в окрестности точки $M$ параметр $v$ есть функция от $u$, имеющая производную. Отсюда видно, что *направление касательной к кривой, проведенной на поверхности, в какой-либо точке $M$ этой кривой, вполне характеризуется величиной $\frac{dv}{du}$ в этой точке*. При определении касательной плоскости и выводе ее уравнения (39) мы считали, что функции (38) в рассматриваемой точке и ее окрестности имеют непрерывные частные производные и что, по крайней мере, один из коэффициентов уравнения (39) отличен от нуля в рассматриваемой точке.

Если $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ при $u = u_0$, $v = v_0$, то то же будет иметь место и в некоторой окрестности указанных значений. Согласно первым двум из формул (38) эта окрестность перейдет в окрестность значений $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, и для значений $(x, y)$, достаточно близких к $(x_0, y_0)$, первые два из уравнений (38) могут быть решены относительно $u$ и $v$ [**I, 157**], т. е. $(u, v)$ могут быть выражены через $x$ и $y$. Подстановка этих выражений в третье из уравнений (38) дает в окрестности рассматриваемой точки уравнение поверхности в явной форме $z = f(x, y)$.

**130. Первая дифференциальная форма Гаусса.** Рассмотрим теперь квадрат дифференциала дуги какой-нибудь кривой на нашей поверхности

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2.$$

Открывая скобки, будем иметь так называемую *первую дифференциальную форму Гаусса*:

$$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2, \tag{41}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ G(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

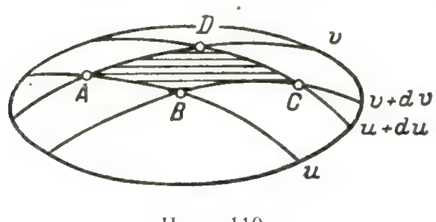
или

$$E = \mathbf{r}'^2_u; \quad F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v; \quad G = \mathbf{r}'^2_v. \tag{42$_1$}$$

Совершенно так же, как и в [**119**], можно показать, что равенство нулю коэффициента $F$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы координатные линии $u = C_1$ и $v = C_2$ были

взаимно перпендикулярны. В этом частном случае криволинейные координаты $u$, $v$ на поверхности называются ортогональными координатами.

Выведем теперь выражение для элемента площади поверхности через коэффициенты выражения (41). Рассмотрим на поверхности малую площадку, ограниченную двумя парами близких координатных линий (черт. 110).




Черт. 110.

Пусть $(u, v)$ — координаты основной вершины $A$. Стороны $AD$ и $AB$ будут соответственно $\mathbf{r}'_u du$ и $\mathbf{r}'_v dv$. Принимая рассматриваемую малую площадку за параллелограмм [ср. **57**], мы можем написать выражение площади этого параллелограмма как длины вектора, получаемого при векторном перемножении упомянутых векторов, т. е.

$$dS = |\mathbf{r}'_u du \times \mathbf{r}'_v dv| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, du\, dv.$$

Имеем для квадрата длины вектора:

$$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

откуда, в силу тождества (26) из [**124**]:

$$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2, \tag{43}$$

и для элемента площади поверхности будем окончательно иметь

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{44}$$

Точно так же, подставляя (43) в формулу (40), можем написать выражение единичного вектора нормали поверхности в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{45}$$

Заметим, что, в силу (43), разность $EG - F^2$ положительна.

**131. Вторая дифференциальная форма Гаусса.** Рассмотрим какую-нибудь линию $(L)$ на поверхности и пусть $\mathbf{t}$ — ее единичный вектор касательной. Он, очевидно, перпендикулярен к единичному вектору нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = 0$. Дифференцируя это соотношение по длине дуги $s$ кривой $(L)$, будем иметь:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) + \mathbf{t}\frac{d\mathbf{m}}{ds} = 0,$$

где $\rho$ — радиус кривизны и $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали кривой ($L$). Предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}\quad\text{или}\quad\frac{\cos\varphi}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m}}{ds^2},$$

где $\varphi$ — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой ($L$). Выражая дифференциалы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ через координатные параметры $u$ и $v$, можно написать:

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{-(\mathbf{r}'_u\,du+\mathbf{r}'_v\,dv)\cdot(\mathbf{m}'_u\,du+\mathbf{m}'_v\,dv)}{ds^2}. \tag{46}$$

Раскрывая в числителе скобки, получим *вторую дифференциальную форму Гаусса*:

$$-(\mathbf{r}'_u\,du+\mathbf{r}'_v\,dv)\cdot(\mathbf{m}'_u\,du+\mathbf{m}'_v\,dv)=$$
$$=L(u,\ v)\,du^2+2M(u,\ v)\,du\,dv+N(u,\ v)\,dv^2,$$

где

$$L=-\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u;\quad M=-\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u);\quad N=-\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_v, \tag{47}$$

и формула (46) окончательно примет вид

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{48}$$

Укажем теперь другие выражения для коэффициентов $L$, $M$ и $N$. Дифференцируя очевидные соотношения

$$\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}=0,\quad \mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}=0$$

по независимым переменным $u$ и $v$, получим четыре соотношения:

$$\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u=0;\quad \mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v=0;$$
$$\mathbf{r}''_{vu}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u=0;\quad \mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_v=0,$$

и отсюда можем, вместо формул (47), написать следующие выражения для коэффициентов второй дифференциальной формы Гаусса:

$$L=\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{m};\quad N=\mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{m};\quad M=\mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{m}=-\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v=-\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u. \tag{49}$$

Вспоминая выражение (45) для вектора $\mathbf{m}$, можем переписать равенства (49) в виде

$$L=\frac{\mathbf{r}''_{u^2}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}};\quad M=\frac{\mathbf{r}''_{uv}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}};\quad N=\frac{\mathbf{r}''_{v^2}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{50}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение поверхности дано в явном виде:

$$z = f(x, y). \tag{51}$$

В данном случае роль параметров играют $x$ и $y$, и мы будем иметь следующие выражения для составляющих радиуса-вектора и его производных по параметрам:

$$\mathbf{r}(x, y, z);\quad \mathbf{r}'_x(1, 0, p);\quad \mathbf{r}'_y(0, 1, q)$$

$$\mathbf{r}''_{x^2}(0, 0, r);\quad \mathbf{r}''_{xy}(0, 0, s);\quad \mathbf{r}''_{y^2}(0, 0, t),$$

где

$$p = \frac{\partial f}{\partial x};\quad q = \frac{\partial f}{\partial y};\quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y};\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{52}$$

Применяя формулы ($42_1$) и (50), получим выражения коэффициентов в обеих формах Гаусса:

$$F = 1 + p^2;\quad F = pq;\quad G = 1 + q^2$$

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};\quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{53}$$

Выберем теперь координатные оси определенным образом, а именно, поместим начало координат в некоторую точку $M_0$ на поверхности, оси $OX$ и $OY$ возьмем в касательной плоскости к поверхности в точке $M_0$ и ось $Z$ направим по нормали поверхности. Значком нуль будем обозначать тот факт, что соответствующая величина взята в точке $M_0$. При сделанном выборе координатных осей косинусы углов, образованных нормалью к поверхности с осями $OX$ и $OY$, будут в точке $M_0$ равны нулю, мы получим [**62**] $p_0 = q_0 = 0$, и формулы (53) дадут в точке $M_0$:

$$L_0 = r_0;\quad M_0 = s_0;\quad N_0 = t_0. \tag{54}$$

**132. О кривизне линий, начерченных на поверхности.** Вернемся к рассмотрению формулы (48). Ее правая часть зависит от значений коэффициентов двух форм Гаусса и от отношения $\frac{dv}{du}$. Последнее обстоятельство станет непосредственно ясным, если разделить числитель и знаменатель на $du^2$. Упомянутые коэффициенты суть функции параметров $(u, v)$ и в заданной точке поверхности имеют определенное численное значение. Что же касается отношения $\frac{dv}{du}$, то оно, как мы видели [**129**], характеризует направление касательной к кривой. Мы можем поэтому утверждать, что обе части формулы (48) имеют определенное значение, если фиксировать точку на поверхности и направление касательной к той кривой на поверхности, которую мы рассматриваем. Если же взять на поверхности в фикси-

рованной точке две кривые, имеющие не только одинаковое направление касательных, но и одинаковое направление главной нормали, то у таких кривых и угол $\varphi$ будет одинаковым, а потому, в силу упомянутой формулы, и величина $\rho$ окажется одной и той же, т. е. мы имеем следующую теорему:

Теорема первая. *Две кривые на поверхности с одинаковой касательной и главной нормалью в некоторой точке имеют в этой точке и одинаковый радиус кривизны.*

Если на поверхности имеется какая угодно кривая $(L)$ и на ней некоторая точка $M$, то, проводя плоскость через касательную и главную нормаль к этой кривой в точке $M$, мы получим в сечении этой плоскости с поверхностью плоскую кривую $(L_0)$, имеющую ту же касательную и главную нормаль, что и заданная кривая, а потому и тот же радиус кривизны. Таким образом доказанная теорема дает возможность сводить изучение кривизны любой кривой на поверхности к изучению кривизны плоских сечений поверхности.

Назовем нормальным сечением поверхности в заданной точке $M$ сечение поверхности какой-нибудь плоскостью, проходящей через нормаль поверхности в точке $M$. Мы имеем, очевидно, бесчисленное множество нормальных сечений, причем мы можем фиксировать определенное нормальное сечение, задавая определенное направление касательной в касательной плоскости к поверхности, т. е. фиксируя величину отношения $\frac{dv}{du}$. Заметим, что главная нормаль у нормального сечения или совпадает, или противоположна вектору $\mathbf{m}$, так что угол $\varphi$ равен 0 или $\pi$, и, следовательно, $\cos\varphi = \pm 1$.

Рассмотрим какую-нибудь кривую $(L)$ на поверхности и на ней определенную точку $M$. Назовем нормальным сечением, соответствующим кривой $(L)$ в точке $M$, то нормальное сечение в точке $M$, которое имеет в этой точке общую касательную с кривой $(L)$. Пусть $\rho$ — радиус кривизны кривой $(L)$ и $R$ — радиус кривизны соответствующего нормального сечения. Так как обе кривые имеют одну и ту же касательную, то правые части в формуле (48) для них одинаковы, и мы можем написать

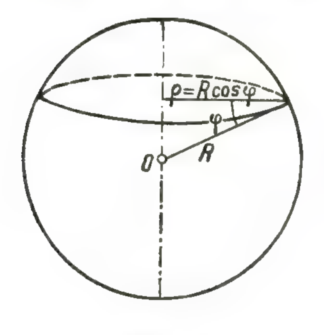
$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\pm 1}{R}, \text{ т. е. } \rho = \pm R \cdot \cos\varphi, \tag{55}$$

где $\varphi$ — угол между главной нормалью к кривой и нормалью поверхности. Последняя формула выражает следующую теорему:

Теорема вторая (теорема Менье). *Радиус кривизны любой кривой на поверхности в заданной точке равен произведению радиуса кривизны соответствующего нормального сечения в этой точке на косинус угла между нормалью поверхности и главной нормалью к кривой.* Иначе можно выразить эту теорему так: радиус кривизны любой кривой на поверхности равен проекции радиуса

кривизны соответствующего нормального сечения, отложенного на нормали к поверхности, на главную нормаль к этой кривой.

В случае сферы нормальное сечение есть окружность большого круга, и если мы за кривую ($L$) возьмем какую-либо окружность, начерченную на сфере, то формула (55) приводит к очевидному соотношению между радиусами двух упомянутых окружностей (черт. 111).




Черт. 111.

Согласно теореме второй, изучение кривизны кривых на поверхности сводится к изучению кривизны нормальных сечений в заданной точке поверхности. Как мы видели, для нормального сечения в формуле (48) надо считать $\cos\varphi = \pm 1$. Согласимся относить знак (—), когда он встретится, к величине $\rho$, т. е. согласимся считать радиус кривизны нормального сечения отрицательным, если главная нормаль нормального сечения противоположна направлению вектора $\mathbf{m}$, т. е. противоположна выбранному направлению нормали поверхности. При таком соглашении мы будем иметь для нормальных сечений формулу

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{56}$$

Напомним еще раз, что в правой части этой формулы коэффициенты дифференциальных форм имеют определенное значение, так как мы фиксировали некоторую точку на поверхности, и величина $\frac{1}{R}$ зависит лишь от значения отношения $\frac{dv}{du}$, т. е. от выбора направления касательной. Знаменатель в правой части формулы (56) имеет всегда положительные значения, так как выражает величину $ds^2$, а потому знак кривизны $\frac{1}{R}$ нормального сечения определяется знаком числителя, и могут представиться следующие три случая:

1. Если во взятой точке $M^2 - LN < 0$, то для всех нормальных сечений $\frac{1}{R}$ имеет один и тот же знак, т. е. главные нормали ко всем нормальным сечениям направлены в одну и ту же сторону. Такая точка поверхности называется *эллиптической*.

2. Если $M^2 - LN > 0$, то $\frac{1}{R}$ будет иметь различные знаки, т. е. во взятой точке поверхности имеются нормальные сечения с противоположным направлением главной нормали. Такая точка поверхности называется *гиперболической*.

3. Если $M^2 - LN = 0$, то при этом числитель в правой части формулы (56) представляет собой полный квадрат, и здесь $\frac{1}{R}$ не меняет знака, но при одном положении нормального сечения обращается в нуль. Такая точка поверхности называется *параболической*.

Заметим, что в гиперболическом случае трехчлен, стоящий в числителе правой части формулы (56), меняя знак, обращается в нуль, и будут два нормальных сечения с кривизной, равной нулю. В эллиптическом же случае таких сечений не будет.

Введем координатные оси, приняв взятую точку поверхности за начало и поместив оси $OX$ и $OY$ в касательной плоскости, как мы это делали в [**131**].

В силу формул (54) равенство (56) примет вид

$$\frac{1}{R} = \frac{r_0\,dx^2 + 2s_0\,dx\,dy + t_0\,dy^2}{ds^2}.$$

Касательная к нормальному сечению лежит в плоскости $XY$, и отношения $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ равны соответственно $\cos\theta$ и $\sin\theta$, где $\theta$ — угол, образованный касательной с осью $X$. Таким образом предыдущая формула принимает вид

$$\frac{1}{R} = r_0\cos^2\theta + 2s_0\cos\theta\sin\theta + t_0\sin^2\theta. \tag{57}$$

В этой формуле мы имеем в явном виде зависимость кривизны $\frac{1}{R}$ от направления касательной, характеризуемого углом $\theta$. При этом, если $s_0^2 - r_0t_0 < 0$, то точка будет эллиптической, в случае $s^2 - r_0t_0 > 0$ — гиперболической, а в случае $s_0^2 - r_0t_0 = 0$ — параболической.

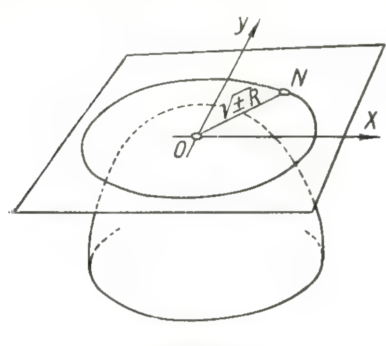
В случае $s_0^2 - r_0t_0 < 0$ функция $z = f(x, y)$ будет иметь в рассматриваемой точке максимум или минимум [**I, 163**], равный нулю, т. е. поверхность вблизи этой точки будет расположена по одну сторону от касательной плоскости. При $s_0^2 - r_0t_0 > 0$ не будет ни максимума, ни минимума, т. е. в любом соседстве с рассматриваемой точкой поверхность будет расположена по обе стороны от касательной плоскости. Наконец, в параболической точке, где $s_0^2 - r_0t_0 = 0$, ничего определенного о расположении поверхности относительно касательной плоскости сказать нельзя.

Из формул (53) непосредственно вытекает, что знак $(M^2 - LN)$ при любом выборе осей $XYZ$ совпадает со знаком $(s^2 - rt)$ и, следовательно, при $s^2 - rt < 0$ точка будет эллиптической, при $s^2 - rt > 0$ — гиперболической и при $s^2 - rt = 0$ — параболической.

На одной и той же поверхности могут быть точки разных родов. Например, на торе, который получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в одной плоскости с окружностью и вне ее

[I, **107**], точки, лежащие с внешней стороны, будут эллиптическими, а с внутренней стороны — гиперболическими. Эти две области отделяются одна от другой крайними параллелями тора, все точки которых суть параболические точки.

**133. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера.** Фиксируя координатные оси так, как это было указано в предыдущем номере, построим в касательной плоскости, т. е. в плоскости $XY$, вспомогательную кривую следующим образом: на всяком радиусе-векторе из начала $O$ отложим отрезок $ON=\sqrt{\pm R}$, где $R$ — радиус кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной. Знак ($\pm$) выбираем так, чтобы под радикалом оказалась положительная величина. Геометрическое место концов $N$ построенных отрезков дает кривую, которая называется *индикатрисой Дюпена*. Свойство этой кривой, согласно построению, следующее: квадрат любого ее радиуса-вектора дает абсолютное значение радиуса кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной (черт. 112).



Черт. 112.

Составим уравнение индикатрисы Дюпена. Пусть ($\xi$, $\eta$) — координаты переменной точки $N$ на индикатрисе. Согласно построению

$$\xi=\sqrt{\pm R}\cos\theta;$$
$$\eta=\sqrt{\pm R}\sin\theta,$$

т. е.

$$\xi^2=\pm R\cos^2\theta;$$
$$\eta^2=\pm R\sin^2\theta,$$

причем при положительном $R$ надо брать верхний знак, а при отрицательном — нижний. Умножая обе части равенства (57) на $\pm R$, получим, очевидно:

$$r_0\xi^2+2s_0\xi\eta+t_0\eta^2=\pm 1. \tag{58}$$

Это и есть уравнение индикатрисы Дюпена. Кривая эта дает геометрически наглядное представление об изменении величины радиуса кривизны при вращении нормального сечения вокруг нормали к поверхности. В эллиптическом случае кривая (58) есть эллипс, и в правой части надо брать определенный знак. В гиперболическом случае

уравнению (58) соответствуют две сопряженные гиперболы. В параболическом же случае левая часть уравнения (58) есть полный квадрат, и его можно переписать в виде

$$k(a\xi+b\eta)^2=\pm 1, \quad \text{т. е.} \quad (a\xi+b\eta)^2=\pm\frac{1}{k}=l^2$$

или

$$a\xi+b\eta=\pm l,$$

и мы имеем совокупность двух параллельных прямых. Во всех трех случаях точка $O$ является центром кривой, и кривая имеет две оси симметрии. Мы можем выбрать оси $X$ и $Y$ совпадающими с этими осями симметрии; при этом, как известно, в левой части уравнения (58) пропадает член, содержащий произведение $\xi\eta$, т. е. при указанном выборе осей должно быть $s_0=0$, и формула (57) даст при таком выборе осей $X$ и $Y$

$$\frac{1}{R}=r_0\cos^2\theta+t_0\sin^2\theta. \tag{59}$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов $r_0$ и $t_0$. Полагая в формуле (59) $\theta=0$, мы получим кривизну $\frac{1}{R_1}$ нормального сечения, касающегося оси $X$, и, следовательно, $r_0=\frac{1}{R_1}$. Точно так же, полагая $\theta=\frac{\pi}{2}$, получим, $t_0=\frac{1}{R_2}$, где $\frac{1}{R_2}$ — кривизна нормального сечения, касающегося оси $OY$. Подставляя найденные значения $r_0$ и $t_0$ в формулу (59), получим формулу Эйлера:

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{60}$$

Заметим, что направления осей $X$ и $Y$ совпадают с направлениями осей симметрии кривой (58). Положим, что $\frac{1}{R_1}\neq\frac{1}{R_2}$ и что, например, $\frac{1}{R_1}>\frac{1}{R_2}$. Из формулы (60) непосредственно следует, что $\frac{1}{R}$ достигает наибольшего значения при $\theta=0$ и $\theta=\pi$ и наименьшего значения — при $\theta=\frac{\pi}{2}$ и $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

Полученный результат формулируем в виде следующей теоремы:

Теорема третья. *В каждой точке поверхности существуют два взаимно перпендикулярных направления в касательной плоскости, для которых кривизна* $\frac{1}{R}$ *достигает максимума и минимума, и если* $\frac{1}{R_1}$ *и* $\frac{1}{R_2}$ *— соответствующие этим направлениям значения кривизны, то кривизна любого нормального сечения*

*выражается по формуле* (60), *где* $\theta$ — *угол, образованный касательной к рассматриваемому нормальному сечению с тем направлением, которое дает кривизну* $\frac{1}{R_1}$.

Радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$ называются *главными радиусами кривизны нормальных сечений* в рассматриваемой точке. Те два направления в касательной плоскости, которые их дают, называются *главными направлениями*. Кроме того в гиперболическом случае полезно отметить еще два направления в касательной плоскости, а именно — направления асимптот индикатрисы Дюпена. Для этих *асимптотических направлений* радиус-вектор индикатрисы равен бесконечности, и кривизна соответствующего нормального сечения в рассматриваемой точке равна нулю.

В эллиптическом случае $R_1$ и $R_2$ имеют одинаковые знаки. В гиперболическом случае эти величины будут разных знаков. В параболическом же случае кривизна одного из главных нормальных сечений будет равна нулю, и, считая, например, $\frac{1}{R_2}=0$, мы будем иметь в параболическом случае формулу

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}.$$

Отметим еще один частный случай точек поверхности эллиптического типа, а именно тот случай, когда величины $R_1$ и $R_2$ одинаковы, т. е. $R_1=R_2$. Формула (60) даст при этом $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}$, т. е. в данном случае все нормальные сечения имеют в рассматриваемой точке одинаковую кривизну. Такая точка поверхности называется *точкой закругления* или *омбилической точкой*. Вблизи такой точки поверхность весьма близка к сфере. Можно доказать, что сфера — единственная поверхность, все точки которой омбилические.

**134. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений.** Перепишем основную формулу (56) для кривизны нормального сечения в виде

$$(L-ER^{-1})\,du^2+2(M-FR^{-1})\,du\,dv+(N-GR^{-1})\,dv^2=0. \quad (61)$$

Деля на $dv^2$ и вводя вспомогательную величину $t=\frac{du}{dv}$, характеризующую направление касательной к нормальному сечению, получим уравнение:

$$\varphi(R^{-1},t)=(L-ER^{-1})t^2+2(M-FR^{-1})t+(N-GR^{-1})=0,$$

из которого кривизна $R^{-1}$ нормального сечения определяется в зависимости от $t$. Для главных направлений величина $R^{-1}$ должна

достигать максимума или минимума, а потому производная от $R^{-1}$ по $t$ должна обращаться в нуль. Но эта производная выражается, очевидно, формулой [I, 69]:

$$\frac{dR^{-1}}{dt} = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dR^{-1}}},$$

и, следовательно, для главных направлений производная $\frac{d\varphi}{dt}$ должна обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dt} = (L - ER^{-1})t + (M - FR^{-1}) = 0.$$

Заменяя $t = \frac{du}{dv}$ и умножая на $dv$, получим:

$$(L - ER^{-1})\,du + (M - FR^{-1})\,dv = 0. \tag{62}$$

Если бы мы разделили уравнение (61) на $du^2$ и за переменную, характеризующую направление касательной, взяли бы $t_1 = \frac{dv}{du}$, то совершенно так же получили бы для главных направлений равенство

$$(M - FR^{-1})\,du + (N - GR^{-1})\,dv = 0. \tag{63}$$

Перенося в равенствах (62) и (63) члены с $dv$ направо и почленно деля одно равенство на другое, мы получим квадратное уравнение для определения кривизны главных нормальных сечений, т. е. $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$:

$$(EG - F^2)\frac{1}{R^2} + (2FM - EN - GL)\frac{1}{R} + (LN - M^2) = 0. \tag{64}$$

Выражение

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \tag{65}$$

называется *гауссовой кривизной поверхности* в заданной точке, а выражение

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{66}$$

называется средней кривизной. Из квадратного уравнения (64) получаем непосредственно выражение гауссовой и средней кривизны через коэффициенты первой и второй формы Гаусса:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{67}$$

Перепишем уравнения (62) и (63) в виде

$$(L\,du + M\,dv)\,R = E\,du + F\,dv; \qquad (M\,du + N\,dv)\,R = F\,du + G\,dv.$$

Разделив почленно одно на другое, мы исключим букву $R$ и после элементарных преобразований получим уравнение:

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0. \quad (68)$$

Деля его на $du^2$, будем иметь квадратное уравнение относительно $\frac{dv}{du}$. Его два корня дадут нам величины, характеризующие главные направления в каждой точке поверхности:

$$\frac{dv}{du} = \varphi_1(u, v); \quad \frac{dv}{du} = \varphi_2(u, v). \quad (69)$$

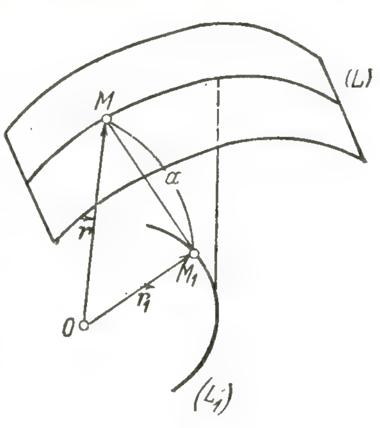
**135. Линии кривизны.** *Линией кривизны на поверхности называется такая линия на поверхности, у которой в каждой ее точке касательная направлена по главному направлению.* Так как в каждой точке поверхности имеются два главных направления, то мы будем иметь два семейства линий кривизны на поверхности, и эти семейства будут взаимно ортогональны. Таким образом совокупность всех линий кривизны даст некоторую ортогональную сетку на поверхности. Уравнение (68) или эквивалентные ему уравнения (69) суть дифференциальные уравнения линий кривизны. Интегрируя их, мы выразим $v$ через $u$ и, подставляя это выражение в уравнения поверхности, получим уравнения линий кривизны.

Пусть нам дана некоторая координатная сетка на поверхности. Выясним условия, при которых эта сетка есть сетка линий кривизны. Прежде всего, раз эта сетка должна быть сеткой линий кривизны, то она должна быть ортогональной сеткой, т. е. мы должны иметь $F = 0$. Кроме того, раз координатные линии $u = C_1$ и $v = C_2$ суть линии кривизны, то уравнение (68) должно удовлетворяться при подстановке вместо $u$ или $v$ постоянной. Принимая во внимание уже полученный результат $F = 0$, будем иметь $GM = 0$ и $EM = 0$. Но мы видели, что разность $EG - F^2$ положительна и, следовательно, величины $E$ и $G$ не могут быть равны нулю, и из двух предыдущих формул вытекает $M = 0$. Итак, необходимым условием того, что координатная сетка была сеткой линий кривизны, является условие $F = M = 0$. Наоборот, если это условие выполнено, то дифференциальное уравнение линий кривизны (68) имеет решение $u = C_1$ и $v = C_2$, т. е. координатные линии суть линии кривизны, и мы получаем следующую теорему: *необходимое и достаточное условие того, чтобы координатная сетка была сеткой линий кривизны, заключается в том, что в двух дифференциальных формах Гаусса средние коэффициенты на всей поверхности равны нулю,* т. е. $F = M = 0$.

Можно определить линии кривизны и иначе, чем мы это сделали в начале настоящего параграфа. Рассмотрим на поверхности некоторую линию $(L)$. Нормали к поверхности вдоль этой линии образуют семейство прямых с одним параметром, определяющим положение точки на $(L)$, и это семейство не будет, вообще говоря, иметь огибающую. Но если выбрать линию $(L)$ определенным образом, то эта огибающая будет существовать [1]). Выясним условия, при которых это будет иметь место.

Положим, что линия $(L)$ на поверхности выбрана так, что огибающая $(L_1)$ нормалей к поверхности вдоль линии $(L)$ существует (черт. 113). Обозначая через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек кривой $(L)$, через $\mathbf{r}_1$ — соответствующий радиус-вектор $(L_1)$ и через $a$ — алгебраическую величину отрезка нормали к поверхности между $(L)$ и $(L_1)$, мы можем, очевидно, написать:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + a\mathbf{m}, \qquad (70)$$



Черт. 113.

где, как всегда, $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали поверхности. Раз кривая $(L_1)$ есть огибающая нормалей, то вектор $d\mathbf{r}_1$, направленный по касательной к ней, должен быть параллелен вектору $\mathbf{m}$, и мы можем написать $d\mathbf{r}_1 = b\mathbf{m}$, где $b$ есть некоторый скаляр. Дифференцируя формулу (70), получим:

$$b\mathbf{m} = d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} + da\,\mathbf{m}, \qquad \text{т. е.} \qquad d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = c\mathbf{m}, \qquad (71)$$

где $c$ — некоторый скаляр. Покажем, что $c = 0$. Для этого умножим обе части (71) скалярно на $\mathbf{m}$:

$$d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m} + a\,d\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = c.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к $(L)$, т. е. перпендикулярно к $\mathbf{m}$, и, следовательно, $d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m} = 0$. Кроме того, из равенства $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$, как всегда, вытекает $d\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$ и, следовательно, предыдущее равенство действительно дает $c = 0$, и (71) может быть переписано в виде

$$d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = 0. \qquad (72)$$

Эта формула обычно называется формулой Родрига (Olinde Rodrigues). Мы вывели эту формулу из предположения, что нормали

[1]) Вообще семейство прямых в пространстве, содержащее один параметр, не имеет огибающей, т. е. эти прямые не являются касательными к какой-либо кривой. Лишь в исключительных случаях это будет иметь место.

поверхности вдоль $(L)$ имеют огибающую. Положим теперь, наоборот, что вдоль некоторой линии $(L)$ на поверхности имеет место формула (72). При этом формула (70) определит некоторую кривую $(L_1)$. Дифференцируя эту формулу и принимая во внимание (72), получим: $d\mathbf{r}_1 = da\mathbf{m}$, т. е. направления вектора $\mathbf{m}$ и касательной к $(L_1)$ параллельны. Иными словами, нормаль к поверхности вдоль $(L)$ касается $(L_1)$. Итак, формула (72) дает необходимое и достаточное условие существования огибающей у нормалей к поверхности вдоль $(L)$. Заметим, что огибающая может выродиться в точку, и тогда нормали образуют цилиндрическую или коническую поверхность, причем условие (72), как можно показать, также должно быть выполнено.

Напишем (72) в раскрытом виде:

$$\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv + a(\mathbf{m}'_u\,du + \mathbf{m}'_v\,dv) = 0$$

и умножим скалярно на $\mathbf{r}'_u$.

В силу формул $(42_1)$, (47) и (49) получим:

$$E\,du + F\,dv + a(-L\,du - M\,dv) = 0,$$

а это есть как раз равенство (62) при $a = R$. Совершенно так же, умножая скалярно на $\mathbf{r}'_v$, получим равенство (63). Нетрудно показать и наоборот, что из равенств (62) и (63), которые определяют главные радиусы кривизны и главные направления, получается формула (72) при $a = R$. На этом мы не останавливаемся. Таким образом условие существования огибающей нормалей (72) равносильно (62) и (63), причем $a$ есть величина одного из главных радиусов кривизны. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующим результатам: *линии кривизны поверхности характеризуются тем свойством, что вдоль них нормали к поверхности имеют огибающую (или дают конус или цилиндр), причем величина отрезка нормали между поверхностью и огибающей равна одному из главных радиусов кривизны.*

Если некоторая плоская кривая вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости, то линиями кривизны полученной поверхности вращения будут ее меридианы и параллели. Действительно, вдоль меридианов нормали к поверхности образуют плоскость, а вдоль параллели — конус.

**136. Теорема Дюпена.** Пусть в пространстве имеются три семейства взаимно перпендикулярных поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = q_1; \quad \psi(x, y, z) = q_2; \quad \omega(x, y, z) = q_3.$$

Они образуют сетку ортогональных криволинейных координат в пространстве [**119**]. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ из начала в переменную точку пространства $M$ характеризуется криволинейными координатами $q_1$,

$q_2$, $q_3$ этой точки. Частные производные $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}'_{q_3}$ дают векторы, направленные по касательным к координатным линиям, и условия ортогональности координат можно написать в векторной форме:

$$\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=0;\quad \mathbf{r}'_{q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}=0;\quad \mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}=0. \tag{73}$$

Дифференцируем первое из этих равенств по $q_1$, второе по $q_2$ и третье по $q_3$:

$$\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}+\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}''_{q_1q_3}=0$$

$$\mathbf{r}''_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}+\mathbf{r}'_{q_3}\cdot\mathbf{r}''_{q_1q_2}=0$$

$$\mathbf{r}''_{q_1q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}+\mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}''_{q_2q_3}=0.$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}''_{q_2q_3}\cdot\mathbf{r}'_{q_1}=\mathbf{r}''_{q_3q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_2}=0.$$

Сопоставим три равенства:

$$\mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}'_{q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot\mathbf{r}'_{q_3}=0.$$

Из них следует, что векторы $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}''_{q_1q_2}$ перпендикулярны к одному и тому же вектору $\mathbf{r}'_{q_3}$ и, следовательно, компланарны, откуда следует, что [**105**]

$$\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}'_{q_1}\times\mathbf{r}'_{q_2})=0. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь координатную поверхность $q_3=C$. На ней параметры $q_1$ и $q_2$ являются координатными параметрами, и координатные линии $q_1=C$ и $q_2=C$ суть линии пересечения взятой поверхности с двумя другими координатными поверхностями наших ортогональных координат в пространстве. Мы имели [**130, 131**] следующие формулы:

$$F=\mathbf{r}'_{q_1}\cdot\mathbf{r}'_{q_2};\quad M=\frac{\mathbf{r}''_{q_1q_2}\cdot(\mathbf{r}'_{q_1}\times\mathbf{r}'_{q_2})}{\sqrt{EG-F^2}},$$

и равенства (73) и (74) показывают, что в данном случае $F=M=0$, т. е. координатные линии $q_1$ и $q_2$ суть линии кривизны на поверхности $q_3=\text{const}$. Это приводит нас к следующей теореме Дюпена: *если в пространстве имеются три семейства взаимно ортогональных поверхностей, то любые две поверхности из разных семейств пересекаются по линии, которая является линией кривизны для обеих этих поверхностей.*

25 Зак. 3251, В. Смирнов, т. II

**137. Примеры. 1.** Уравнение сжатого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>c^2)$$

может быть написано в параметрической форме в следующем виде:

$$x=a\cos u\sin v; \quad y=a\sin u\sin v; \quad z=c\cos v.$$

Координатные линии $u=c_1$ суть, очевидно, линии пересечения эллипсоида с плоскостями $y=x\operatorname{tg} c_1$, проходящими через ось вращения, т. е. суть меридианы, а координатные линии $v=c_2$ — параллели, получаемые от пересечения эллипсоида плоскостями $z=c\cos c_2$, перпендикулярными оси вращения. Применяя формулы (42) и (50) из [130, 131] и принимая во внимание, что $x$, $y$ и $z$ суть составляющие вектора $\mathbf{r}$, получим:

$$E=a^2\sin^2 v; \quad F=0; \quad G=a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v;$$

$$L=\frac{ac\sin^2 v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}; \quad M=0; \quad N=\frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}.$$

Равенства $F=M=0$ можно было предвидеть в силу того, что меридианы и параллели суть линии кривизны эллипсоида вращения. Остальные коэффициенты зависят только от параметра $v$, характеризующего положение точки на меридиане. Главные направления совпадают, очевидно, с касательными к меридиану и параллели. Выражение $(LN-M^2)$ в данном случае положительно на всей поверхности, т. е. все точки поверхности — эллиптические. Не вычисляя в отдельности главные радиусы кривизны, приведем лишь выражение гауссовой кривизны:

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{c^2}{(a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v)^2}.$$

**2.** Уравнение конуса второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

перепишем в явной форме:

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

Непосредственно дифференцируя, нетрудно получить:

$$p=\frac{c^2x}{a^2z}; \quad q=\frac{c^2y}{b^2z}; \quad r=\frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3}; \quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}; \quad t=\frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}.$$

Пользуясь формулами (53), можно определить все коэффициенты форм Гаусса. Отметим лишь, что в данном случае $rt-s^2=0$, т. е. все точки поверхности суть параболические точки, и один из главных радиусов кривизны равен бесконечности. Соответствующее главное направление совпадет, очевидно, с прямолинейной образующей конуса.

**3.** Рассмотрим гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}.$$

В данном случае $r=\frac{1}{a^2}$, $s=0$ и $t=-\frac{1}{b^2}$, так что $rt-s^2<0$, и, следовательно, всякая точка поверхности является гиперболической точкой. Две прямолинейные образующие поверхности дают в данном случае направление

асимптот индикатрисы Дюпена, которая состоит из двух сопряженных гипербол. Аналогичное обстоятельство мы будем иметь и для однополого гиперболоида.

**4.** Обычные прямолинейные координаты, а также сферические и цилиндрические координаты дают простейшие примеры ортогональных координат в пространстве. Укажем еще один пример таких координат. Рассмотрим уравнение поверхности второго порядка, содержащее параметр $\rho$:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0, \tag{75}$$

где $a^2>b^2>c^2$. Фиксируя точку $M(x, y, z)$ и освобождаясь от знаменателей, мы будем иметь уравнение третьей степени относительно $\rho$. Нетрудно показать, что это уравнение имеет три вещественных корня $u$, $v$ и $w$, которые заключаются соответственно в границах

$$+\infty>u>-c^2;\quad -c^2>v>-b^2;\quad -b^2>w>-a^2. \tag{76}$$

Действительно, при больших положительных значениях $\rho$ левая часть уравнения (76) близка к $(-1)$ и имеет знак $(-)$, а при значениях $\rho$, немного больших $(-c^2)$, слагаемое $\frac{z^2}{c^2+\rho^2}$ есть большая положительная величина, и левая часть уравнения (75) имеет знак $(+)$. Таким образом внутри промежутка $(-c^2, \infty)$ должно существовать такое значение $\rho$, при котором левая часть уравнения (75) обращается в нуль. Аналогичным образом можно убедиться в существовании корней внутри промежутков $(-b^2, -c^2)$ и $(-a^2, -b^2)$. Три числа $(u, v, w)$ называются *эллиптическими координатами* взятой точки $M(x, y, z)$. В нашем рассуждении предполагается, что все три координаты точки $(x, y, z)$ отличны от нуля. В противном случае для $\rho$ получится уравнение ниже третьей степени. Если, например, $z=0$, а $x$ и $y$ отличны от нуля, то уравнение (75) даст $u$ и $v$, а $w$ надо считать равным $(-c^2)$.

Исследуем теперь координатные поверхности в эллиптической системе координат. Подставляя в уравнение (75) $\rho=u$, где $u$ — некоторое число из промежутка $(-c^2, \infty)$, получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1, \tag{77}$$

которая очевидно является *эллипсоидом*, так как, в силу первого из неравенств (76), все три знаменателя в уравнении (77) положительны. Полагая $\rho=v$, где $v$ — из промежутка $(-b^2, -c^2)$, получим однополый гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1, \tag{78}$$

так как в данном случае $a^2+v>b^2+v>0$ и $c^2+v<0$. Наконец, при $\rho=w$, где $w$ — из промежутка $(-a^2, -b^2)$, получим *двуполый гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1. \tag{79}$$

Покажем, что полученные три координатные поверхности взаимно ортогональны. Вычитая почленно уравнения (77) и (78), получим:

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=0. \tag{80}$$

Направляющие косинусы нормалей к поверхностям (77) и (78) соответственно пропорциональны [I, 155]:

$$\frac{x}{a^2+u};\quad \frac{y}{b^2+u};\quad \frac{z}{c^2+u}\quad \text{и}\quad \frac{x}{a^2+v};\quad \frac{y}{b^2+v};\quad \frac{z}{c^2+v},$$

и равенство (80) выражает условие перпендикулярности этих нормалей, т. е. дает доказательство ортогональности поверхностей (77) и (78). Точно так же можно доказать взаимную ортогональность и других координатных поверхностей. Пользуясь теоремой Дюпена, мы можем утверждать, что *два семейства линий кривизны на эллипсоиде* (77) (*при фиксированном u*) *получатся в результате пересечения этого эллипсоида со всевозможными гиперболоидами из семейств* (78) *и* (79).

**138. Гауссова кривизна.** Выясним геометрический смысл понятия о гауссовой кривизне. Примем за координатные линии на поверхности — линии кривизны этой поверхности. Вдоль каждой из этих линий будет выполнено соотношение (72), причем коэффициент $a$ есть, как мы видели, один из главных радиусов кривизны. Это дает нам следующие соотношения:

$$\mathbf{r}'_u + R_1\mathbf{m}'_u = 0; \quad \mathbf{r}'_v + R_2\mathbf{m}'_v = 0. \tag{81}$$

Сопоставим всякой точке $M$ поверхности — точку $M_0$ сферы единичного радиуса, которая получается в пересечении этой сферы с вектором $\mathbf{m}$, отложенным из центра сферы, причем $\mathbf{m}$ есть единичный вектор нормали к поверхности в точке $M$. Такое точечное соответствие между точками поверхности и точками сферы называется обычно *сферическим отображением поверхности*. Положение точки $M_0$ будем характеризовать теми же параметрами $u$ и $v$, что и положение $M$. Ввиду того, что координатные линии суть линий кривизны, будем иметь:

$$E = \mathbf{r}'^2_u; \quad F = 0; \quad G = \mathbf{r}'^2_v. \tag{82}$$

Радиус-вектор сферического изображения $M_0$ есть по определению $\mathbf{m}$, и, в силу формул (81) и (82), коэффициенты первой формы Гаусса для сферического изображения будут:

$$E_0 = \mathbf{m}'^2_u = \frac{1}{R_1^2}E; \quad F_0 = \mathbf{m}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0; \quad G_0 = \mathbf{m}'^2_v = \frac{1}{R_2^2}G. \tag{83}$$

Остановимся лишь на доказательстве среднего из равенств, ибо остальные два непосредственно вытекают из (81) и (82). Формулы (49) дают $M = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u$. Раз мы приняли за координатные линии линии кривизны, то $M = 0$, т. е. $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u = 0$. Умножая первое из равенств (81) на $\mathbf{m}'_v$ или второе на $\mathbf{m}'_u$, получим $\mathbf{m}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0$.

Элемент площади самой поверхности и соответствующий элемент сферического изображения будут:

$$dS = \sqrt{EG}\, du\, dv; \quad dS_0 = \sqrt{E_0G_0}\, du\, dv,$$

или, в силу (83),

$$dS_0 = \frac{1}{|R_1R_2|}dS,$$

откуда видно, что *гауссова кривизна в точке $M$ по абсолютной величине есть предел отношения площади сферического отображения к соответствующей площади самой поверхности, когда эта последняя беспредельно сжимается к точке $M$.* Упомянутое отношение характеризует, очевидно, степень разбросанности пучка нормалей к поверхности в точках элемента.

В [**134**] мы вывели выражение гауссовой кривизны $K$ через коэффициенты двух форм Гаусса. Самим Гауссом было дано выражение $K$ только через коэффициенты $E$, $F$ и $G$ и их производные по $u$ и $v$. Из этого обстоятельства вытекает одно важное следствие, на котором мы остановимся. Пусть между двумя поверхностями $(S)$ и $(S_1)$ установлено точечное соответствие, причем соответствующие точки характеризуются одинаковыми значениями параметров $u$ и $v$. Каждая из поверхностей будет иметь свою первую форму Гаусса, выражающую квадрат элемента длины. Тождественность этих двух форм равносильна тому, что при упомянутом точечном соответствии длины сохраняются, или, иначе говоря, *поверхности наложимы друг на друга.* При этом коэффициенты $E$, $F$ и $G$ и их производные по $u$ и $v$ будут для обеих поверхностей одни и те же, а потому и кривизна $K$ в соответствующих точках обеих поверхностей будет иметь одно и то же значение, т. е. *при отображении друг на друга двух поверхностей, сохраняющем длину, гауссова кривизна в соответствующих точках обеих поверхностей имеет одно и то же значение.*

В частности на плоскости гауссова кривизна равна нулю, и у поверхностей, которые могут быть наложены на плоскость без искажения длин, должно быть $LN - M^2 = 0$, т. е. все точки — параболические. В предыдущем мы имели пример таких поверхностей, а именно — конус и цилиндр.

**139. Вариация элемента площади и средняя кривизна.** Пусть $(S)$ — некоторая поверхность, $(u, v)$ — ее координатные параметры и $\mathbf{r}(u, v)$ — ее радиус-вектор. Откладывая в каждой точке $M(u, v)$ поверхности по нормали $\mathbf{m}$ отрезок $\overline{MM_1}$ алгебраической величины $n(u, v)$, где $n(u, v)$ — некоторая функция $u$ и $v$, получим новую поверхность $(S_1)$, образованную точками $M_1$. Точки $M_1$ мы будем характеризовать теми же параметрами $(u, v)$, что и точки $M$, и будем говорить, что между точками $(S)$ и $(S_1)$ установлено соответствие по нормалям к $(S)$. Радиус-вектор $\mathbf{r}^{(1)}(u, v)$ поверхности $(S_1)$ по определению будет: $\mathbf{r}^{(1)}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + n(u, v)\mathbf{m}(u, v)$. Дифференцируя по $u$ и $v$, получим:

$$\mathbf{r}_u^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u; \quad \mathbf{r}_v^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_v + n'_v\mathbf{m} + n\mathbf{m}_v.$$

Вычислим коэффициенты $E_1$, $F_1$, $G_1$ первой формы Гаусса для поверхности $(S_1)$, причем будем считать длину $n$ и ее производные по $u$ и $v$ — малыми и будем пренебрегать членами второго измерения

относительно этих величин:

$$E_1 = (\mathbf{r}_u^{(1)'})^2 = (\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u)\cdot(\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u) =$$
$$= \mathbf{r}'^2_u + 2n'_u(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}) + 2n(\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_u).$$

Векторы $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{m}$ взаимно перпендикулярны и $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m} = 0$, и формула (47) дает $E_1 = E - 2nL$. Точно так же нетрудно получить $F_1 = F - 2nM$ и $G_1 = G - 2nN$. Отсюда:

$$E_1G_1 - F_1^2 = EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL),$$

или, в силу (67):

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)(1 - 4nH).$$

Извлекая корень, разлагая $(1 - 4nH)^{1/2}$ по биному Ньютона и откидывая члены со степенями $n$ выше первой, будем иметь:

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}(1 - 2nH). \tag{84}$$

Умножая на $du\,dv$ и интегрируя, получим с точностью до малых величин второго порядка выражение разности $\delta S$ площадей близких поверхностей $(S)$ и $(S_1)$:

$$\iint\limits_{(S_1)} \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du\,dv - \iint\limits_{(S)} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv =$$
$$= -\iint\limits_{(S)} 2nH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{85}$$

или

$$\delta S = -\iint\limits_{(S)} 2nH\,dS.$$

В непосредственной связи с этой формулой находится известная задача Плато *об определении поверхности с наименьшей площадью, натянутой на заданный контур* $(L)$. Нетрудно видеть, что *на такой поверхности средняя кривизна $H$ должна быть равна нулю*. Действительно, если бы на некотором участке $\sigma$ такой поверхности величина $H$ оказалась, например, положительной, то, выбирая малую величину $n$ также положительной на $\sigma$ и равной нулю на остальной части поверхности и в частности на $(L)$, мы получили бы, в силу (85), для $\delta S$ отрицательное значение

$$\delta S = -\iint\limits_{(\sigma)} 2nH\,dS,$$

и поверхность $(S_1)$, проходя через $(L)$, имела бы площадь, меньшую, чем $(S)$, что противоречит предположению. В силу указанного обстоя-

тельства поверхности со средней кривизной, равной нулю, называются *минимальными поверхностями.*

Из формулы (84) вытекает также формула дифференцирования интеграла по переменной замкнутой поверхности по параметру. Допустим, что положение некоторой переменной замкнутой поверхности определяется значением параметра $\lambda$ и что при $\lambda = \lambda_0$ поверхность занимает положение $(S)$, а при $\lambda$, близких к $\lambda_0$, — положение $(S_1)$, близкое к $(S)$. Установим между точками $M$ поверхности $(S)$ и точками $M_1$ поверхности $(S_1)$ соответствие по нормалям, как это описано выше. При этом $n$ будет функцией $u$, $v$ и $\lambda$, которая обращается тождественно относительно $u$ и $v$ в нуль при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$n(u, v, \lambda_0) \equiv 0. \tag{86}$$

Пусть далее $f(N)$ — некоторая функция точки в пространстве, не зависящая от параметра $\lambda$. Величина интеграла

$$I(\lambda) = \iint\limits_{(S_1)} f(M_1)\, dS_1 \tag{87}$$

будет зависеть от параметра $\lambda$, так как от этого параметра зависит вид поверхности. Найдем выражение для производной $I'(\lambda_0)$. Умножая обе части (84) на $du\,dv$, можем написать $dS_1 = (1 - 2nH)\,dS$, и выражение (87) перепишется так:

$$I(\lambda) = \iint\limits_{(S)} f(M_1)\, dS - \iint\limits_{(S)} f(M_1)\, 2nH\, dS.$$

При этом область интегрирования — исходная поверхность $(S)$ — уже не зависит от $\lambda$, и мы можем применить обычное правило дифференцирования под знаком интеграла [**80**]. Точка $M_1$ лежит на поверхности $(S_1)$, и пусть $M$ — соответствующая ей точка на поверхности $(S)$, так что отрезок $\overline{MM_1} = n(u, v)$ нормален к $(S)$, т. е. имеет направление $\mathbf{m}$. Множитель $f(M_1)$ при дифференцировании по $\lambda$ при $\lambda = \lambda_0$ даст:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\overline{MM_1}} \cdot \frac{\overline{MM_1}}{\lambda - \lambda_0} = \frac{\partial f(M)}{\partial m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda = \lambda_0},$$

где $m$ — направление нормали $\mathbf{m}$. Принимая во внимание, что множитель $n$ обращается в нуль при $\lambda = \lambda_0$, и обозначая через $\frac{\partial n}{\partial \lambda_0}$ значение производной при $\lambda = \lambda_0$, получим:

$$I'(\lambda_0) = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial f(M)}{\partial m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}\, dS - \iint\limits_{(S)} f(M)\, 2H \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}\, dS. \tag{88}$$

Пусть уравнение переменной поверхности $(S_1)$ написано в неявной форме:

$$\varphi(M_1;\ \lambda)=0 \quad \text{или} \quad \varphi(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \tag{89}$$

Дифференцируя по $\lambda$ как непосредственно, так и через посредство $M_1$, так же, как это мы делали с функцией $f(M_1)$, получим при $\lambda=\lambda_0$:

$$\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}=0.$$

Определяя отсюда $\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}$ и подставляя в формулу (88), получим следующее выражение для производной:

$$I'(\lambda_0)=-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial m}\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS+2\iint\limits_{(S)} fH\,\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS. \tag{90}$$

Если в интеграле (87) и подинтегральная функция $f$ содержит параметр $\lambda$, то так же, как и в [**120**], к правой части (90) надо добавить слагаемое вида

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial\lambda_0}\,dS.$$

**140. Огибающая семейства поверхностей и кривых.** В [**10**] при исследовании особых решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка мы ввели понятие об огибающей семейства плоских кривых. Точно так же исследование решений уравнений с частными производными приводит к понятию огибающей семейства поверхностей. Выясним в кратких чертах это понятие.

Пусть имеется семейство поверхностей с одним параметром

$$F(x,\ y,\ z,\ a)=0. \tag{91}$$

Фиксируя численное значение $a$, получим определенную поверхность семейства. Рассмотрим новую поверхность $(S)$, которая имеет то же уравнение (91), но с переменным $a$, получаемым из уравнения

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a)}{\partial a}=0. \tag{92}$$

Можно сказать, что уравнение $(S)$ получится исключением $a$ из уравнений (91) и (92). Если фиксировать значение $a=a_0$, то, с одной стороны, получится определенная поверхность $(S_0)$ из семейства (91), а с другой стороны, подставляя $a=a_0$ в уравнения (91) и (92), получим некоторую линию $(l_0)$ на поверхности $(S)$, так что поверхности $(S)$ и $(S_0)$ будут иметь общую линию $(l_0)$. Покажем, что они будут иметь общую касательную плоскость вдоль $(l_0)$.

Для поверхности (91), в силу постоянства $a$, проекции $dx$, $dy$, $dz$ бесконечно малого перемещения вдоль поверхности должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

На поверхности $(S)$ $a$ — переменно, и мы должны написать

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial a} da = 0.$$

Но в силу (92) это соотношение совпадает с предыдущим, т. е. на $(S_0)$ и $(S)$ в общих точках бесконечно малое перемещение перпендикулярно к одному и тому же направлению, у которого направляющие косинусы пропорциональны:

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

откуда и следует, что $(S_0)$ и $(S)$ касаются вдоль $(l_0)$. Таким образом *исключая $a$ из уравнений* (91) *и* (92), *получим*, вообще говоря, *уравнение огибающей поверхности семейства* (91), *причем касание имеет место вдоль некоторой линии.*

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на оси $Z$ и данным радиусом $r$

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2.$$

Дифференцируем по $a$:

$$-2(z - a) = 0.$$

Исключая $a$, получим уравнение кругового цилиндра

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

который касается каждой из вышеуказанных сфер вдоль окружности.

Рассмотрим теперь семейство поверхностей, содержащее два параметра:

$$F(x, y, z, a, b) = 0. \tag{93}$$

Исключая $a$ и $b$ из написанного уравнения и уравнений

$$\frac{\partial F(x, y, z, a, b)}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F(x, y, z, a, b)}{\partial b} = 0, \tag{94}$$

получим, как нетрудно показать, поверхность $(S)$, которая касается поверхностей семейства (93). Но в данном случае касание будет иметь место не вдоль линии, но лишь в некоторой точке. Действительно, фиксируя значения $a = a_0$ и $b = b_0$, мы, с одной стороны, получим определенную поверхность $(S_0)$ из семейства (93), а с другой стороны, подставляя $a = a_0$ и $b = b_0$ в три уравнения (93) и (94), получим, вообще говоря, некоторую точку $M_0$ на поверхности $(S)$. Эта точка $M_0$ и будет общей точкой у $(S)$ и $(S_0)$.

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на плоскости $XY$ и заданным радиусом $r$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2.$$

Дифференцируем по $a$ и $b$:

$$-2(x-a)=0; \quad -2(y-b)=0;$$

исключая $a$ и $b$, получим уравнение $z^2=r^2$, т. е. огибающая будет состоять из двух параллельных плоскостей $z=\pm r$, которые касаются каждой из вышеуказанных сфер в некоторой точке.

По поводу нахождения огибающей семейства поверхностей можно сделать то же замечание, что и по поводу нахождения огибающей семейства кривых [**10**], а именно, например исключение $a$ из уравнений (91) и (92) может привести не только к огибающей поверхности, но и к геометрическому месту особых точек поверхностей семейства (91), т. е. таких точек, в которых поверхность не имеет касательной плоскости. Если левая часть уравнения (91) есть непрерывная функция с непрерывными производными первого порядка, то всякая поверхность, которая во всех своих точках касается различных поверхностей семейства (91), может быть получена указанным выше приемом исключения $a$ из уравнений (91) и (92). Вообще в этом и следующем параграфах мы не приводим доказательств и не уточняем условий, ограничиваясь приведением в общих чертах основных фактов.

Рассмотрим теперь семейство линий в пространстве, зависящее от одного параметра:

$$F_1(x, y, z, a)=0; \quad F_2(x, y, z, a)=0. \tag{95}$$

Будем искать огибающую этого семейства, т. е. такую линию $\Gamma$, которая во всех своих точках касается различных кривых семейства (95). Мы можем считать, что $\Gamma$ также определяется уравнениями (95) [**10**], в которых только $a$ есть не постоянная, но переменная. Проекции $dx$, $dy$, $dz$ на оси бесконечно малого перемещения вдоль кривых (95) должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0.$$

Совершенно так же проекции $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ бесконечно малого перемещения вдоль $\Gamma$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

Условия касания сводятся к пропорциональности этих проекций, т. е.

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{\delta y}{dy} = \frac{\delta z}{dz},$$

а эти условия, в силу предыдущих соотношений, равносильны двум уравнениям: $\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a = 0$ и $\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a = 0$, или, считая $\delta a \neq 0$, т. е. $a$ — не постоянной, получим два уравнения:

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, a)}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F_2(x, y, z, a)}{\partial a} = 0. \tag{96}$$

Четыре уравнения (95) и (96) не определяют, вообще говоря, линии, т. е. *семейство линий в пространстве не имеет*, как правило, *огибающей*. Но если эти четыре уравнения сводятся к трем, т. е. одно из них есть следствие остальных, то из этих трех уравнений координаты $(x, y, z)$ определяются как функции параметра $a$, т. е. мы получаем линию в пространстве, которая и будет огибающей [или геометрическим местом особых точек линий (95)]. В следующем номере мы будем иметь пример семейства прямых в пространстве, имеющих огибающую.

**141. Развертывающиеся поверхности.** В качестве частного случая рассмотрим семейство плоскостей с одним параметром $a$:

$$A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) = 0. \tag{97}$$

Огибающая поверхность $(S)$ получится исключением $a$ из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) &= 0 \\ A'(a)x + B'(a)y + C'(a)z + D'(a) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

При фиксированном $a$ эти два уравнения дают некоторую прямую $(l_a)$, и поверхность $(S)$ есть геометрическое место этих прямых, т. е. обязательно линейчатая поверхность. Дальше мы увидим, что не всякая линейчатая поверхность может быть получена указанным выше путем. Вдоль прямой $(l_a)$ поверхность $(S)$ касается плоскости (97), т. е. *вдоль прямолинейной образующей* $(l_a)$ *поверхность* $(S)$ *имеет одну и ту же касательную плоскость*. Таким образом на $(S)$ семейство касательных плоскостей зависит только от одного параметра $a$, характеризующего образующую $(l_a)$. В общем случае семейство касательных плоскостей к поверхности зависит от двух параметров, определяющих положение точки на поверхности. Пусть уравнение $(S)$ написано в явной форме: $z = f(x, y)$, причем частные производные функции $f(x, y)$ мы будем обозначать так же, как в **[62]**. Первые два направляющих косинуса нормали будут

функциями одного параметра $a$:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_1(a); \qquad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_2(a).$$

Исключая из этих уравнений $a$, получим связь между $p$ и $q$, которую можем написать в виде

$$q=\varphi(p).$$

Соотношение это должно быть выполнено на всей поверхности $(S)$ и, дифференцируя его по независимым переменным $x$ и $y$, получим

$$s=\varphi'(p)r; \quad t=\varphi'(p)s,$$

откуда

$$rt-s^2=0, \tag{99}$$

т. е. *у поверхности, которая огибает семейство плоскостей с одним параметром, все точки должны быть параболическими.*

Поверхность $(S)$ образована семейством прямых (98). Нетрудно видеть, что это семейство прямых имеет огибающую. Действительно, дифференцируя уравнения (98) по $a$, получаем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} A'(a)x+B'(a)y+C'(a)z+D'(a)=0,\\ A''(a)x+B''(a)y+C''(a)z+D''(a)=0, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

и четыре уравнения (98) и (100) сводятся к трем. Таким образом мы можем утверждать, что поверхность $(S)$ образована касательными к некоторой пространственной кривой $\Gamma$. Если эта кривая $\Gamma$ вырождается в точку, то $(S)$ есть коническая поверхность, а если эта точка удаляется на бесконечность, то $(S)$ есть цилиндрическая поверхность. Покажем, что и наоборот, если дана в пространстве кривая $\Gamma$,

$$x=\varphi(t); \quad y=\psi(t); \quad z=\omega(t), \tag{101}$$

*то поверхность $(S)$, образованная касательными к кривой $\Gamma$, огибает семейство плоскостей с одним параметром, а именно семейство соприкасающихся для кривой $\Gamma$ плоскостей.* Действительно, это семейство имеет уравнение:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{102}$$

где $(x, y, z)$ определяются формулами (101) и $A$, $B$, $C$ определяются формулами (31) из [**126**]. Дифференцируя (102) по параметру $t$ и принимая во внимание, что в силу (31),

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \tag{103}$$

получим:

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0, \tag{104}$$

где вместо производных по $t$ мы пишем дифференциалы. Огибающая поверхность семейства (102) состоит из прямых линий, определяемых уравнениями (102) и (104), и нам остается показать, что эти два уравнения определяют касательную к $\Gamma$ в точке $(x, y, z)$. Дифференцируя соотношение (103) и принимая во внимание, что, в силу (31), $A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$, получим

$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0. \tag{105}$$

Соотношения (103) и (105) показывают, что нормали к плоскостям (102) и (104), проходящим через точку $(x, y, z)$, перпендикулярны к касательной к кривой $\Gamma$, т. е. плоскости (102) и (104) проходят обе через эту касательную, что нам и надо было доказать.

Выше мы видели, что условие (99) является необходимым условием того, что $(S)$ есть огибающая семейства плоскостей с одним параметром. Можно показать, что оно и достаточно. Выше мы говорили также [**138**], что условие (99) (или ему равносильное $LN - M^2 = 0$) необходимо для того, чтобы $(S)$ можно было отобразить на плоскость без искажения длин. Можно показать, что и наоборот, если это условие выполнено, то достаточно малый кусок поверхности можно отобразить указанным выше образом на плоскость. Поэтому огибающие семейства плоскостей с одним параметром называют *развертывающимися поверхностями*.

Не всякая линейчатая поверхность будет развертывающейся поверхностью. Например, если мы возьмем гиперболический параболоид или однополый гиперболоид, то для них соотношение (99) не выполнено [**137**], хотя они и являются линейчатыми поверхностями. Отсюда следует, что если переменная точка такой поверхности движется вдоль прямолинейной образующей, то соответствующая этой точке касательная плоскость вращается вокруг этой образующей.

Французский математик Лебег подробно исследовал поверхности, развертывающиеся на плоскость, при весьма малых предположениях о функциях, входящих в уравнения (38) таких поверхностей (мы предполагали наличие непрерывных производных до второго порядка). Он дал, между прочим, пример такой поверхности, причем эта поверхность есть нелинейчатая поверхность вращения.

ГЛАВА VI

# РЯДЫ ФУРЬЕ

## § 14. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**142. Ортогональность тригонометрических функций.** Гармоническое колебательное движение

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$

представляет простейший пример периодической функции периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Мы ограничимся пока рассмотрением периодических функций периода $2\pi$ и обозначим независимую переменную через $x$, так что функция $y$ обратится в

$$y = A \sin(x + \varphi).$$

Более сложные функции того же периода будут функции

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

равно как и сумма любого числа их:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

которая называется *тригонометрическим полиномом* $n$-го *порядка*; естественно при этом возникает вопрос *о приближенном представлении произвольной периодической функции* $f(x)$ *периода* $2\pi$ *в виде тригонометрического полинома* $n$-го *порядка*, а затем и вопрос *о разложении функции* $f(x)$ *в тригонометрический ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k),$$

подобно аналогичным задачам приближенного выражения функции в виде полинома $n$-й степени или разложения ее в степенной ряд. Общий член этого ряда

$$A_k \sin(kx + \varphi_k)$$

называется $k$-й *гармоникой функции* $f(x)$. Его можно написать в виде

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) = a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = A_k \sin \varphi_k; \quad b_k = A_k \cos \varphi_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Гармоника нулевого порядка $A_0 \sin \varphi_0$ есть просто постоянная, которую мы для упрощения дальнейших формул обозначим через $\frac{a_0}{2}$. Итак, наша задача заключается в том, чтобы *подобрать, если возможно, неизвестные постоянные*

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$$

*так, чтобы ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

*был сходящимся и чтобы его сумма равнялась заданной периодической функции $f(x)$ периода $2\pi$.*

Для решения этого вопроса выясним одно простое свойство косинусов и синусов кратных дуг. Пусть $c$ — любое вещественное число и $(c, c + 2\pi)$ — любой промежуток длины $2\pi$. Нетрудно доказать что

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx\, dx = 0; \quad \int_c^{c+2\pi} \sin kx\, dx = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Рассмотрим, например, первый из написанных интегралов. Первообразная функция для $\cos kx$ равна $\frac{\sin kx}{k}$ и, ввиду ее периодичности, ее значения при $x = c$ и $x = c + 2\pi$ будут одинаковы, и разность этих значений будет нуль т. е., действительно,

$$\int_c^{c+2\pi} \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} \Bigg|_{x=c}^{x=c+2\pi} = 0.$$

Совершенно так же, пользуясь известными формулами тригонометрии:

$$\sin kx \cos lx = \frac{\sin(k+l)x + \sin(k-l)x}{2},$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{\cos(k-l)x - \cos(k+l)x}{2},$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{\cos(k+l)x + \cos(k-l)x}{2},$$

можно доказать, что

$$\int_{c}^{c+2\pi} \cos kx \sin lx\,dx = 0; \quad \int_{c}^{c+2\pi} \cos kx \cos lx\,dx = 0;$$

$$\int_{c}^{c+2\pi} \sin kx \sin lx\,dx = 0 \qquad (k \neq l). \tag{3}$$

Рассмотрим семейство функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots, \tag{4}$$

причем первой из функций семейства является постоянная, равная единице. Формулы (2) и (3) выражают следующий факт: *интеграл от произведения любых двух различных функций семейства* (4) *по любому промежутку длины* $2\pi$ *равен нулю*. Такое свойство называется обычно *свойством ортогональности семейства* (4) *на указанном промежутке*. Вычислим теперь интеграл от квадрата функций семейства (4). Для первой из функций этот интеграл равен очевидно $2\pi$, а для остальных, в силу формул

$$\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2}; \quad \sin^2 kx = \frac{1-\cos 2kx}{2},$$

мы будем иметь

$$\int_{c}^{c+2\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi; \quad \int_{c}^{c+2\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

В дальнейшем для определенности мы будем брать $c = -\pi$, т. е. роль промежутка $(c,\ c+2\pi)$ будет у нас играть промежуток $(-\pi,\ \pi)$.

Вернемся теперь к поставленной выше задаче. Положим, что некоторая функция $f(x)$, определенная в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, а затем и при остальных значениях $x$ по закону периодичности с периодом $2\pi$, является суммою ряда (1):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{6}$$

Интегрируя обе части этого равенства по промежутку $(-\pi,\ \pi)$ и заменяя интеграл от бесконечной суммы суммою интегралов от отдельных слагаемых, получим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx\,dx\right),$$

и, в силу (2), это приводится к равенству

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi,$$

откуда определяется постоянная $a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Перейдем к определению остальных постоянных. Пусть $n$ — некоторое целое положительное число. Умножим обе части (6) на $\cos nx$ и проинтегрируем, как и выше:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right). \tag{8}$$

В силу (2) и (3) все интегралы в правой части равенства будут равны нулю, кроме одного, а именно кроме интеграла

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos nx\,dx \quad \text{при} \quad k = n,$$

а этот последний интеграл, в силу (5), будет равен $\pi$.

Формула (8), таким образом, приводится к виду:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{$7_1$}$$

Совершенно так же можно получить формулы

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{$7_2$}$$

Заметим, что формула (7) совпадает с формулой ($7_1$) при $n=0$. Мы можем, таким образом, написать:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Вышеприведенные вычисления не являются строгими и имеют значение лишь как наводящие. Действительно, мы сделали ряд неоправданных предположений: во-первых, мы с самого начала предположили, что заданная функция разлагается в ряд (6), затем мы заменяли интеграл от бесконечной суммы суммой интегралов от отдельных слагаемых, или, как говорят, интегрировали ряд почленно, что не всегда можно делать [ср. **I, 146**].

Строгая постановка задачи состоит в следующем. Пусть в промежутке $(-\pi,\ \pi)$ нам задана функция $f(x)$. По формулам (9) вычисляем постоянные $a_k$ и $b_k$ и подставляем значения этих постоянных в ряд (1). Спрашивается: будет ли полученный таким образом ряд сходящимся рядом в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, и если будет, то будет ли его сумма равна $f(x)$?

Коэффициенты $a_k$ и $b_k$, вычисляемые по формулам (9), называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, а ряд, который получается из ряда (1) после подстановки вместо $a_k$ и $b_k$ их значений из формул (9), называется *рядом Фурье функции* $f(x)$. В следующем номере мы формулируем решение поставленной выше задачи о сходимости ряда Фурье заданной функции.

Замечание. Указанные выше формулы (3) и (5) имеют место при интегрировании по любому промежутку длины $2\pi$. Вообще, если функция $f(x)$, определенная при всех вещественных значениях $x$, имеет некоторый период $a$, т. е. $f(x+a)=f(x)$ при всяком $x$, то интеграл от $f(x)$ по любому промежутку длины $a$ имеет определенное значение, не зависящее от начала этого промежутка, т. е. величина интеграла

$$\int_{c}^{c+a} f(x)\,dx$$

не зависит от $c$. Действительно, число $c$ мы можем представить в виде $c=ma+h$, где $m$ — целое и $h$ принадлежит промежутку $(0,\ a)$:

$$\int_{c}^{c+a} f(x)dx = \int_{ma+h}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx = \int_{ma+h}^{(m+1)a} f(x)\,dx + \int_{(m+1)a}^{(m+1)a+h} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле введем новую переменную интегрирования $t_1 = x - ma$, а во втором $t_2 = x - (m+1)a$:

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_h^a f(t_1 + ma)\,dt_1 + \int_0^h f[t_2 + (m+1)a]\,dt_2.$$

Принимая во внимание периодичность $f(x)$ и обозначая переменные интегрирования опять через $x$, получим:

$$\int_c^{c+a} f(x)\,dx = \int_h^a f(x)\,dx + \int_0^h f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

откуда и следует независимость интеграла от $c$. Если $f(x)$ имеет период $2\pi$, то мы можем вычислять ее коэффициенты Фурье $a_k$ и $b_k$ по формулам (9), интегрируя по любому промежутку длины $2\pi$.

**143. Теорема Дирихле.** Ряд Фурье функции $f(x)$ будет сходиться и его сумма будет равна $f(x)$, если только сделать некоторые ограничительные предположения относительно функции $f(x)$. Мы предположим, во-первых, что функция $f(x)$, заданная в промежутке $(-\pi, \pi)$, или непрерывна, или имеет внутри этого промежутка лишь конечное число точек разрыва непрерывности. Мы предположим далее, что все эти точки разрыва непрерывности обладают следующим свойством: если $x = c$ есть точка разрыва непрерывности $f(x)$, то существуют конечные пределы $f(x)$ при стремлении $x$ к $c$: как справа (от бóльших значений), так и слева (от меньших значений). Эти пределы обычно обозначают $f(c+0)$ и $f(c-0)$ [**I, 32**]. Такие точки разрыва непрерывности обычно называют *точками разрыва первого рода*. Предположим, наконец, что весь промежуток $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число частей таких, что в каждой части $f(x)$ меняется монотонно. Указанные выше условия называются обычно *условиями Дирихле*, т. е. говорят, что *функция удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке* $(-\pi, \pi)$, *если она или непрерывна в этом промежутке, или имеет конечное число разрывов первого рода, и если, кроме того, промежуток* $(-\pi, \pi)$ *можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых* $f(x)$ *меняется монотонно*. Заметим, далее, что на конце $x = -\pi$ нам важен лишь тот предел, к которому стремится $f(x)$ при стремлении $x$ к $(-\pi)$ справа, а потому вместо $f(-\pi)$ мы будем писать $f(-\pi+0)$ и точно так же вместо $f(\pi)$ будем писать $f(\pi-0)$. Отметим, что пределы эти могут быть различными, но сумма ряда (1) должна быть, конечно, одинаковой при $x = -\pi$ и $x = \pi$, в силу периодичности функций (4).

Одной из основных теорем теории рядов Фурье является следующая:

Теорема Дирихле. *Если* $f(x)$, *заданная в промежутке* $(-\pi, \pi)$, *удовлетворяет в этом промежутке условиям Дирихле, то ряд Фурье этой функции сходится во всем промежутке* $(-\pi, \pi)$ *и сумма этого ряда*:

1) *равна* $f(x)$ *во всех точках непрерывности* $f(x)$, *лежащих внутри промежутка*;

2) *равна*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

*во всех точках разрыва непрерывности*;

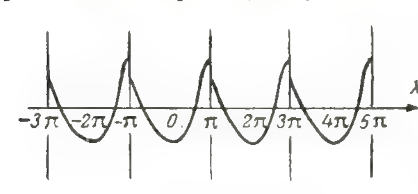
3) *равна*

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

*на концах промежутка*, т. е. *при* $x=-\pi$ и $x=+\pi$.

Доказательство этой теоремы будет дано в конце настоящей главы.

Сделаем некоторые замечания по поводу формулированной теоремы. Члены ряда (1) суть периодические функции с периодом $2\pi$. Поэтому, если ряд сходится в промежутке $(-\pi, \pi)$, то он сходится и при всех вещественных значениях $x$, и сумма ряда периодически повторяет, с периодом $2\pi$, те значения, которые она давала в промежутке $(-\pi, \pi)$. Таким образом, если мы пользуемся рядом Фурье вне промежутка $(-\pi, \pi)$, то мы должны считать, что функция $f(x)$ продолжена вовне этого промежутка периодически с периодом $2\pi$. С этой точки зрения концы промежутка $x=\pm\pi$ явятся для продолженной таким образом функции точками разрыва непрерывности, если $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$.




Черт. 114.

На черт. 114 изображена функция, непрерывная в промежутке $(-\pi, \pi)$, которая при периодическом продолжении дает разрывы непрерывности в силу несовпадения значений $f(x)$ на концах промежутка.

При вычислении коэффициентов Фурье часто бывает полезно пользоваться следующей леммой:

Лемма. *Если* $f(x)$ *есть четная функция в промежутке* $(-a, a)$, т. е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

*и если $f(x)$ — нечетная функция*, т. е. $f(-x) = -f(x)$, *то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

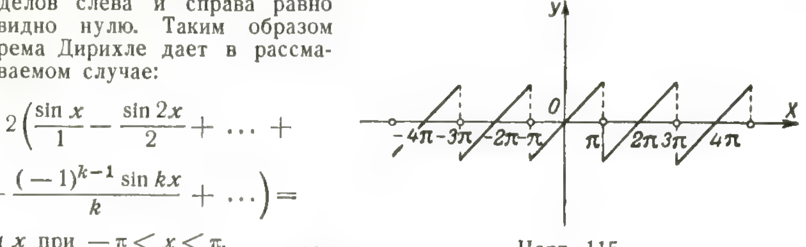
Доказательство этой леммы было дано выше [I, 99].

**144. Примеры. 1.** Разложим $x$ в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, \pi)$. Произведения $x \cos kx$ суть нечетные функции от $x$, а потому в силу формул (9) все коэффициенты $a_k$ равны нулю. С другой стороны, произведения $x \sin kx$ суть четные функции, и коэффициенты $b_k$ можно вычислять по формуле

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\} = \frac{2(-1)^{k-1}}{k}.$$

На черт. 115 график ряда Фурье изображен жирной линией, и из этого чертежа видно, что в точках $x = \pm\pi$ мы имеем разрыв непрерывности, причем среднее арифметическое пределов слева и справа равно очевидно нулю. Таким образом теорема Дирихле дает в рассматриваемом случае:

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} + \ldots\right) = \begin{cases} x & \text{при } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases} \qquad (10)$$




Черт. 115.

**2.** То же для функции $x^2$. В данном случае произведения $x^2 \sin kx$ суть нечетные функции и все коэффициенты $b_k$ равны нулю. Вычисляем $a_k$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2 \sin kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x \sin kx\,dx\right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi k}\left\{\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right\} = (-1)^k\frac{4}{k^2}.$$

Из черт. 116 видно, что в данном случае график ряда Фурье не имеет нигде разрывов, и сумма ряда равна $x^2$ во всем промежутке $(-\pi, \pi)$, включая концы:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \qquad (11)$$

Полагая $x = 0$, получим:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{12}$$

Если положим

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sigma,$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \sigma_1, \tag{13}$$

то имеем, очевидно,

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \ldots = \sigma_1 + \frac{1}{4}\sigma, \quad \sigma_1 = \frac{3}{4}\sigma,$$

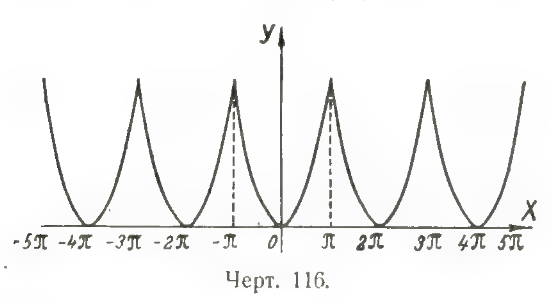
и равенство (12) дает

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots = \sigma_1 - \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{2}\sigma = \frac{\pi^2}{12},$$

т. е.

$$\sigma = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \tag{14}$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$




Черт. 116.

**3.** Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{при } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Мы имеем здесь

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1\,dx + \int_{0}^{\pi} c_2\,dx\right] = c_1 + c_2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1\cos kx\,dx + \int_{0}^{+\pi} c_2\cos kx\,dx\right] = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} c_2 \sin kx\,dx\right] =$$
$$= (c_1 - c_2)\frac{(-1)^k - 1}{\pi k},$$

т. е. $b_k = 0$ при четном $k$ и $b_k = -\frac{2(c_1 - c_2)}{\pi k}$ при нечетном $k$, а потому по теореме Дирихле (черт. 117):

$$\frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right] = \begin{cases} c_1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ c_2 & \text{при } \quad 0 < x < \pi \\ \frac{c_1 + c_2}{2} & \text{при } x = 0 \text{ и } \pm\pi. \end{cases} \quad (15)$$

Черт. 117.

**145. Разложение в промежутке $(0, \pi)$.** В предыдущих примерах мы упрощали вычисления коэффициентов Фурье, пользуясь четностью или нечетностью разлагаемой функции $f(x)$.

Вообще, применяя лемму из [**143**] к интегралам (9), определяющим коэффициенты Фурье, мы получаем:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx; \quad b_k = 0, \quad (16)$$

если $f(x)$ есть функция четная, и

$$a_k = 0; \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad (17)$$

если $f(x)$ — функция нечетная. Самое же разложение функции будет вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (18)$$

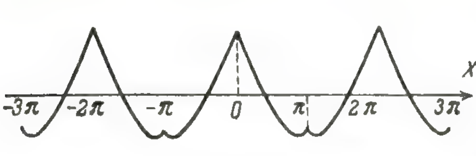
если $f(x)$ — четная, и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (19)$$

если $f(x)$ — нечетная функция.

Пусть теперь нам дана произвольная функция $f(x)$, определенная в промежутке $(0, \pi)$. Эту функцию можно разложить в промежутке

(0, π) как в ряд вида (18), содержащий только косинусы, так и в ряд вида (19), содержащий только синусы. При этом в первом случае коэффициенты вычисляются по формулам (16), а во втором — по (17). Оба эти ряда внутри промежутка (0, π) будут иметь суммой функцию $f(x)$ или среднее арифметическое в точках разрыва. Но вне промежутка (0, π) они будут представлять совершенно различные функции: ряд по косинусам даст функцию, получающуюся из $f(x)$ четным продолжением в соседний промежуток $(-\pi, 0)$, а затем периодическим продолжением с периодом $2\pi$ вне промежутка $(-\pi, \pi)$. Ряд по синусам дает функцию, получающуюся нечетным продолжением функции $f(x)$ в соседний промежуток $(-\pi, 0)$ и затем периодическим продолжением с периодом $2\pi$ вне промежутка $(-\pi, \pi)$.




Черт. 118.

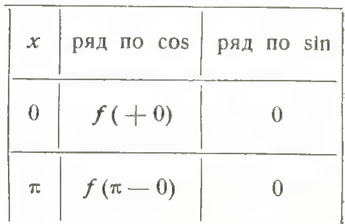
Таким образом, при разложении по косинусам:

$$f(-0) = f(+0);$$
$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0),$$

а при разложении по синусам:

$$f(-0) = -f(+0);$$
$$f(-\pi + 0) = -f(\pi - 0).$$

Черт. 119.



| $x$ | ряд по cos | ряд по sin |
|---|---|---|
| 0 | $f(+0)$ | 0 |
| $\pi$ | $f(\pi - 0)$ | 0 |

Соответственно этому в концах промежутков мы получим указанные в таблице значения рядов (18) и (19).

На черт. 118 и 119 указаны графики функций, выражаемых рядами (18) и (19), составленными для одной и той же функции $f(x)$ в промежутке (0, π).

Примеры. 1. В примерах 1 и 2 [**144**] мы получили ряды для функции $x$ по синусам и для функции $x^2$ по косинусам в промежутке (0, π). Разлагая функцию $x$ в ряд по косинусам в промежутке (0, π), мы получим

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx; \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & \text{при четном } k \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{при нечетном } k. \end{cases}$$

Отсюда

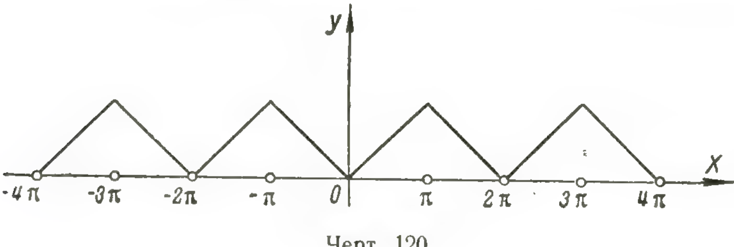
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \ldots\right) \qquad (20)$$

$$(0 < x < \pi).$$

В промежутке $(-\pi, 0)$ сумма ряда, стоящего в правой части, будет совпадать с $(-x)$, т. е. во всем промежутке $(-\pi, \pi)$ она совпадает с абсолютным значением $|x|$:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \qquad (21)$$

а затем вне промежутка $(-\pi, \pi)$ сумма ряда дает функцию, которая получается периодическим повторением $|x|$ из промежутка $(-\pi, \pi)$ (черт. 120).




Черт. 120.

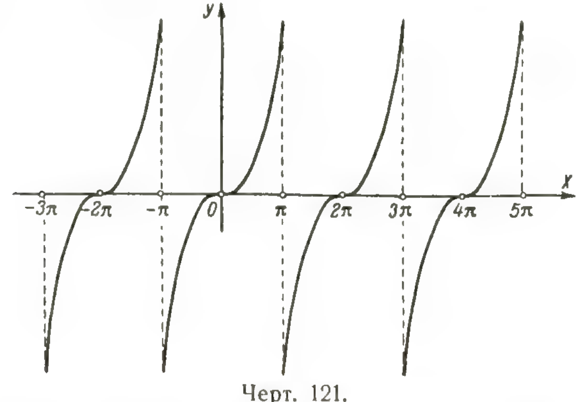
Разлагая функцию $x^2$ по синусам в промежутке $(0, \pi)$, мы получаем:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin kx\,dx = \frac{2(-1)^{k-1}\pi}{k} + \frac{4[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}$$

и

$$x^2 = 2\pi\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] - \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right]$$

в промежутке $0 < x < \pi$ (черт. 121).




Черт. 121.

Предоставляем читателю доказать, что мы можем разбить полученный ряд Фурье на два ряда, что мы и сделали выше.

2. Функция $\cos zx$ есть четная функция от $x$, а потому она может быть разложена в промежутке $(-\pi, \pi)$ по косинусам:

$$\cos zx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx; \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos zx \cos kx \, dx.$$

Мы имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos zx \, dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin zx}{z}\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\sin \pi z}{\pi z};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos zx \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos (z+k)\,x + \cos (z-k)\,x]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin (z+k)\,x}{z+k} + \frac{\sin (z-k)\,x}{z-k}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin (\pi z + k\pi)}{z+k} + \frac{\sin (\pi z - k\pi)}{z-k}\right] =$$

$$= (-1)^k \frac{2z \sin \pi z}{\pi (z^2 - k^2)}.$$

Стало быть, в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$:

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi}\left[\frac{1}{2z^2} + \frac{\cos x}{1^2 - z^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - z^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - z^2} - \ldots\right].$$

Полагая здесь $x = \pi$ и разделив обе части равенства на $\sin \pi z$, имеем:

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2}\right]. \tag{22}$$

Формула эта называется *формулой разложения функции* $\operatorname{ctg} \pi z$ *на простейшие дроби*. Дифференцируя по $z$, разделив на $\pi$ и изменив знак на обратный, получим *разложение функции* $\frac{1}{\sin^2 \pi z}$ *на простейшие дроби*:

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + z^2}{(k^2 - z^2)^2}\right],$$

или, замечая, что

$$2\,\frac{k^2 + z^2}{(k^2 - z^2)^2} = \frac{1}{(z+k)^2} + \frac{1}{(z-k)^2},$$

можем заменить предыдущую формулу более симметричной

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k)^2}. \tag{23}$$

Формула (22) приводит к замечательному *разложению функции* $\operatorname{ctg} z$ *в степенной ряд.* Умножив обе ее части на $\pi z$ и заменив $\pi z$ на $z$, т. е. $z$ на $\frac{z}{\pi}$, мы получим

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2}.$$

Но

$$\frac{2z^2}{k^2\pi^2 - z^2} = \frac{2z^2}{k^2\pi^2\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)} =$$

$$= 2\frac{z^2}{k^2\pi^2}\left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2} + \frac{z}{k^4\pi^4} + \ldots + \frac{z^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}} + \ldots\right) \quad (|z| < \pi).$$

Подставив это в предыдущую формулу и располагая по степеням $z^2$, имеем

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - 2\frac{z^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\frac{z^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} - \ldots - 2\frac{z^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} - \ldots$$

Заменив $z$ на $\frac{z}{2}$, получим:

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}\right] z^{2n}.$$

Обозначим коэффициент при $z^{2n}$ через $\frac{B_n}{(2n)!}$:

$$\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = 1 - \frac{B_1}{2!}z^2 - \frac{B_2}{4!}z^4 - \ldots - \frac{B_n}{(2n)!}z^{2n} - \ldots$$

$$B_n = \frac{2\cdot(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}. \quad (24)$$

Первые числа $B_n$ нетрудно определить, непосредственно разлагая в ряд $\frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ — хотя бы как частное ряда $\cos\frac{z}{2}$ на ряд $\frac{\sin\frac{z}{2}}{\frac{z}{2}}$ [1, 130]:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

и непосредственно ясно, что числа $B_n$ рациональны. Они называются числами Бернулли. С другой стороны, зная их значение, мы можем определить суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}B_n}{2\cdot(2n)!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Иногда вместо чисел Бернулли рассматривают числа Эйлера, определяемые по формулам:

$$A_0 = 1;\quad A_1 = -\frac{1}{2};\quad A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!};\quad A_{2k+1} = 0\quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{25}$$

Если мы в равенстве (24) заменим $z$ на $\frac{t}{l}$, то, так как

$$\frac{t}{2l}\operatorname{ctg}\frac{t}{2l} = \frac{t}{2l}\cdot\frac{\cos\frac{t}{2l}}{\sin\frac{t}{2l}} = \frac{t}{2}\,\frac{e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2},$$

окажется

$$\frac{t}{e^t-1} = 1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_nt^{2n}}{(2n)!}+\ldots =$$

$$= A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3 + \ldots$$

Числа Бернулли и Эйлера встречаются часто в самых разнообразных отделах анализа.

**146. Периодические функции периода $2l$.** Часто бывает нужно разлагать в тригонометрический ряд по косинусам и синусам функцию $f(x)$, определяемую не в промежутке $(-\pi,\ \pi)$, а в промежутке $(-l,\ l)$, или же — в ряд только по косинусам или только по синусам функцию, определенную в промежутке $(0,\ l)$.

Эта задача приводится к предыдущей с помощью изменения масштаба, т. е. введения вместо $x$ вспомогательной переменной $\xi$ по формуле

$$x = \frac{l\xi}{\pi};\qquad \xi = \frac{\pi x}{l}. \tag{26}$$

Положим

$$f(x) = f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right) = \varphi(\xi).$$

Если функция $f(x)$ была определена в промежутке $(-l,\ l)$, то функция $\varphi(\xi)$ будет определена в промежутке $(-\pi,\ \pi)$ переменной $\xi$.

Разлагая функцию $\varphi(\xi)$ в ряд Фурье, получаем:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\xi + b_k\sin k\xi),$$

где, в силу (26):

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\xi)\cos k\xi\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{l\xi}{\pi}\right)\cos k\xi\, d\xi = \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx; \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом *теорема Дирихле остается верной и для промежутка* $(-l, l)$ *с тем, однако, что разложение* (6) *заменяется разложением*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{28}$$

*причем коэффициенты* $a_k$ *и* $b_k$ *определяются по формулам* (27).

То же относится и к разложениям функции $f(x)$, определенной в промежутке $(0, l)$, только по косинусам или только по синусам; для функции $f(x)$ получаются ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l}; \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \tag{29}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}; \qquad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{30}$$

Пример. Разложить по синусам функцию $f(x)$, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 < x < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Мы имеем в данном случае:

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

так как в промежутке $\left(\frac{l}{2}, l\right)$ подинтегральная функция обращается в 0. Простое вычисление, которое мы предоставляем сделать читателю, дает:

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } k > 1 \\ -\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}\, 2k}{\pi\,(k^2-1)} & \text{при четном } k \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{2},$$

так что

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4n^2-1}\sin\frac{2n\pi x}{l} = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{l} & \text{при } 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ 0 & \text{при } \dfrac{l}{2} < x < l \\ \dfrac{1}{2} & \text{»} \quad x = \dfrac{l}{2} \\ 0 & \text{»} \quad x = 0 \text{ или } l. \end{cases} \tag{31}$$

Промежуток $(-l, l)$ может быть заменен любым промежутком $(c, c+2l)$, длины $2l$, как это мы уже упоминали для промежутка длины $2\pi$. При этом сумма ряда (28) дает $f(x)$ в промежутке $(c, c+2l)$, и при вычислении коэффициентов по формулам (27) промежуток интегрирования $(-l, l)$ надо заменить промежутком $(c, c+2l)$.

**147. Средняя квадратичная погрешность.** Укажем теперь другой подход к теории рядов Фурье. Пусть, как и выше, $f(x)$ — заданная функция в промежутке $(-\pi, \pi)$. Составим линейную комбинацию первых $(2n+1)$ функций семейства (4):

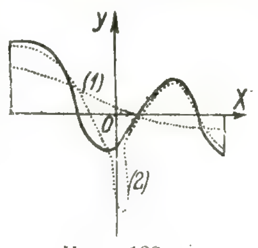
$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \tag{32}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ — некоторые численные коэффициенты. Написанное выражение называется обычно *тригонометрическим полиномом* $n$-*го порядка*. Рассмотрим погрешность, которая получится, если заменить $f(x)$ суммой (32), т. е. рассмотрим разность:

$$\Delta_n(x) = f(x) - \left\{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right\}.$$

*Наибольшим уклонением* $\Delta_n$ суммы (32) от функции $f(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$ мы назовем наибольшее значение $|\Delta_n(x)|$ в этом промежутке: чем меньше будет $\Delta_n$, тем точнее тригонометрический полином $n$-го порядка (32) представляет функцию $f(x)$. Однако величину $\Delta_n$ неудобно принять за меру приближения, и не только потому, что исследование этой величины затруднительно, но и потому, что при решении вопросов о приближенном представлении функции часто более важно добиться уменьшения погрешности в „среднем“

или „вероятной“ погрешности, чем уменьшения „наибольшего уклонения“. На черт. 122 изображены различные приближенные кривые (пунктирные) для данной функции $f(x)$ (сплошная). Наибольшее уклонение кривой (*1*) меньше, чем кривой (*2*), но в общем кривая (*1*) гораздо больше отличается от истинной, чем кривая (*2*); сколько-нибудь значительные уклонения этой последней встречаются в промежутке ($-\pi$, $\pi$), гораздо реже, чем уклонения кривой (*1*).



Черт. 122.

При применении способа наименьших квадратов для обработки наблюдений за меру точности наблюдений принимается „средняя квадратичная погрешность“, которая определяется следующим образом: пусть при измерении величины $z$ получены значения:

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_N;$$

погрешность каждого измерения есть

$$z - z_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

средняя же квадратичная погрешность $\delta_n$ определяется по формуле

$$\delta_n^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(z - z_k)^2,$$

т. е. $\delta_n$ *есть корень квадратный из среднего арифметического квадратов погрешностей.*

Именно эту среднюю квадратичную погрешность мы и примем за меру степени приближения суммы (32) к нашей функции $f(x)$. Здесь только нужно помнить, что мы имеем дело не с конечным числом значений, а с бесчисленным множеством их, и притом распределенных непрерывно по всему промежутку ($-\pi$, $\pi$). Таким образом каждая отдельная погрешность будет не что иное, как $\Delta(x)$, и средняя арифметическая их квадратов будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta_n^2(x)\,dx,$$

а средняя квадратичная погрешность $\delta_n$ выражения (32) найдется из формулы:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\Delta_n^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)\right\}^2 dx. \qquad (33)$$

Нам остается теперь подобрать постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ так, чтобы величина $\delta_n^2$ была наименьшей, т. е. решить обыкновенную задачу на минимум функции $\delta_n^2$ от $(2n+1)$ переменных.

Прежде всего упростим выражение (33) для $\delta_n^2$. Произведя возвышение в квадрат, мы находим:

$$\left\{f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right\}^2=$$

$$=[f(x)]^2-\alpha_0 f(x)-2\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)f(x)+\frac{\alpha_0^2}{4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2 kx+\beta_k^2\sin^2 kx)+\sigma_n, \quad (34)$$

где $\sigma_n$ означает линейную комбинацию выражений вида:

$$\cos lx\cos mx,\quad \sin lx\sin mx \qquad (l\neq m),$$

$$\cos lx\sin mx,\quad \cos lx,\ \sin mx.$$

В силу свойства ортогональности тригонометрических функций [**142**], интеграл от всех этих выражений по промежутку $(-\pi, \pi)$ равен нулю, а следовательно, будет равен нулю и интеграл от $\sigma_n$ по этому промежутку. Интегралы от $\cos^2 kx$ и $\sin^2 kx$, как известно, равны $\pi$, и, подставляя выражение (34) в формулу (33), получим:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,dx-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx\right]+$$

$$+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

Принимая во внимание выражения (9) для коэффициентов Фурье

функции $f(x)$ можем переписать выражение $\delta_n^2$ в следующем виде:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

или, вычитая и прибавляя сумму

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2),$$

можем написать:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4} (\alpha_0 - a_0)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]. \quad (35)$$

Наименьшее значение $\delta_n^2$ будет, очевидно, в том случае, когда последние неотрицательные слагаемые в правой части обратятся в нуль, т. е. это будет иметь место, если положить $\alpha_0 = a_0$ и вообще $\alpha_k = a_k$ и $\beta_k = b_k (k = 1, 2, \ldots)$. Итак, *средняя квадратичная погрешность приближенного выражения функции $f(x)$ посредством тригонометрического полинома $n$-го порядка будет наименьшей, если коэффициенты полинома суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.*

Отметим при этом одно важное обстоятельство. Из полученного результата следует, что значения $\alpha_k$ и $\beta_k$, которые обращают в минимум $\delta_n^2$, не зависят от значка $n$. Если мы увеличим $n$, то нам надо будет добавить новые коэффициенты $\alpha_k$ и $\beta_k$, но уже вычисленные коэффициенты останутся прежними.

Величину $\varepsilon_n$ наименьшей погрешности мы получим по формуле (35), заменив там $\alpha_k$ и $\beta_k$ соответственно на $a_k$ и $b_k$, что дает:

$$\varepsilon_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2), \quad (36)$$

или

$$2\varepsilon_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2\, dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2). \quad (37)$$

27 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

При возрастании $n$, т. е. порядка тригонометрического полинома, в правой части (37) будут добавляться новые отрицательные (или, во всяком случае, не положительные) слагаемые: $-a_{n+1}^2$, $-b_{n+1}^2, \ldots$, и таким образом *погрешность* $\varepsilon_n$ *может только уменьшаться при увеличении* $n$, т. е. *точность приближения увеличивается (не уменьшается) при возрастании* $n$.

Величина $\varepsilon_n^2$ выражается формулой (33), если в ней заменить $\alpha_k$, $\beta_k$ на $a_k$, $b_k$, т. е. выражается интегралом от квадрата некоторой функции, а потому $\varepsilon_n^2$ наверно положительна или, точнее говоря, не отрицательна. Принимая это во внимание, получим, в силу (37):

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx. \tag{38}$$

Пока мы явно не высказывали никаких предположений относительно свойств $f(x)$. Для предыдущих рассуждений необходимо, чтобы существовали все те интегралы, которыми мы пользовались, т. е. чтобы можно было вычислять коэффициенты Фурье по формулам (9) и чтобы существовал интеграл от квадрата функции. Для определенности будем считать, что $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода. При этом все упомянутые интегралы наверно имеют смысл **[I, 116]**. Можно сделать относительно $f(x)$ и гораздо более общие предположения, и во всяком случае во всех предыдущих и дальнейших рассуждениях не играют роли предположения, которые фигурировали в условиях Дирихле. Вернемся к неравенству (38). При увеличении $n$ сумма положительных слагаемых, стоящая в левой части, будет увеличиваться (не уменьшаться), но при этом будет оставаться меньше определенного положительного числа, стоящего в правой части неравенства. Отсюда непосредственно вытекает, что бесконечный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

будет рядом сходящимся **[I, 120]**. Устремляя $n$ к бесконечности и переходя в неравенстве (38) к пределу, получим:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 \, dx. \tag{39}$$

Принимая во внимание, что общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю при беспредельном удалении от начала, мы можем высказать следующую теорему:

Т е о р е м а. *При сделанных предположениях относительно* $f(x)$ *ее коэффициенты Фурье* $a_k$ *и* $b_k$ *стремятся к нулю при* $k \to +\infty$.

При нашей новой точке зрения основным является следующий вопрос: *будет ли погрешность $\varepsilon_n$ стремиться к нулю при беспредельном возрастании $n$.* Если в правой части формулы (37) мы перейдем к пределу при беспредельном увеличении $n$, то вместо конечной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}$ получим бесконечный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} 2\varepsilon_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

откуда вытекает, что стремление к нулю $\varepsilon_n$ равносильно тому, что в формуле (39) мы имеем знак равенства, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \tag{40}$$

Уравнение это обычно называется *уравнением замкнутости*. В следующем параграфе настоящей главы мы докажем, что $\varepsilon_n \to 0$, т. е. что уравнение (40) действительно имеет место для всех функций $f(x)$ с указанными выше свойствами.

**148. Общие ортогональные системы функций.** Большинство проведенных рассуждений настоящей главы основывалось не на конкретных свойствах тригонометрических функций, но лишь на свойстве ортогональности функций семейства (4). Поэтому эти рассуждения применимы для любого семейства ортогональных функций. Такие семейства, как мы увидим, часто встречаются в задачах математической физики. Пусть у нас имеется семейство вещественных функций в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, для определенности будем считать эти функции непрерывными:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{41}$$

Мы предполагаем, что ни одна из этих функций не равна тождественно нулю.

Говорят, что функции семейства (41) ортогональны, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad \text{при } m \neq n. \tag{42}$$

Интеграл от квадрата каждой функции семейства (41) будет равняться некоторой положительной постоянной. Введем следующие обозначения для этих постоянных:

$$k_n = \int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx. \tag{43}$$

Если к каждой функции $\varphi_n(x)$ семейства (41) добавим численный множитель $\frac{1}{\sqrt{k_n}}$, то новые функции

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{k_1}}\varphi_1(x);\quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{k_2}}\varphi_2(x);\ \ldots,$$
$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{k_n}}\varphi_n(x);\ \ldots,$$

в силу (42) и (43), будут удовлетворять не только условиям ортогональности, но и интеграл от квадрата каждой функции будет равен единице, т. е.

$$\int_a^b \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{» } m = n. \end{cases} \tag{44}$$

Говорят, что функции семейства

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \tag{45}$$

*ортогональны и нормированы*, если выполнены условия (44). Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная в промежутке $(a, b)$, и предположим, что ее можно представить в этом промежутке в виде ряда, расположенного по функциям (45):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(x), \tag{46}$$

где $c_k$ — некоторые численные коэффициенты. Умножим обе части (46) на $\psi_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и проинтегрируем по промежутку $(a, b)$, считая, что ряд, стоящий справа, можно интегрировать почленно

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \psi_k(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Принимая во внимание (44), получим следующие выражения для коэффициентов $c_n$:

$$c_n = \int_a^b f(x)\psi_n(x)\,dx \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{47}$$

Коэффициенты $c_n$, определяемые по этим формулам, называются обычно *обобщенными коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно системы функций* (45). Предыдущие рассуждения, как и в [**142**], имеют лишь наводящий характер, и строгая постановка вопроса состоит в следующем: если коэффициенты $c_n$, вычисленные по фор-

мулам (47), подставить в ряд, стоящий в правой части (46), то будет ли этот ряд сходящимся в промежутке $(a, b)$, и если будет, то будет ли его сумма равняться $f(x)$? При решении этого вопроса приходится делать, конечно, некоторые предположения относительно свойств функции $f(x)$. Тот ряд, который получается при замене $c_n$ их значениями из формул (47), называется обычно *обобщенным рядом Фурье функции* $f(x)$.

Перейдем теперь ко второй точке зрения. Напишем формулу для средней квадратичной погрешности при представлении заданной функции $f(x)$ конечной суммой вида

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x).$$

Квадрат этой погрешности будет выражаться формулой:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x) \right]^2 dx.$$

Принимая во внимание (44) и (47) и повторяя вычисления, аналогичные вычислениям из [**147**], получим:

$$(b-a)\delta_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - c_k)^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что $\delta_n^2$ имеет наименьшее значение, если $\gamma_k$ равны коэффициентам Фурье функции $f(x)$, и для этого наименьшего значения $\varepsilon_n$ мы имеем формулу:

$$(b-a)\varepsilon_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Отсюда, как и выше, вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

и неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 dx, \tag{48}$$

которое называется обычно *неравенством Бесселя*. Основным здесь является вопрос, будет ли $\varepsilon_n$ стремиться к нулю при беспредельном

возрастании $n$, причем стремление $\varepsilon_n$ к нулю равносильно тому, что в (48) мы имеем знак равенства, т. е.

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{49}$$

Уравнение это называется *уравнением замкнутости для $f(x)$ по отношению к системе функций* (45). Эта система называется *замкнутой*, если уравнение (49) справедливо для любой непрерывной функции $f(x)$ и для любой функции с конечным числом разрывов первого рода. Заметим, что если это так, то можно доказать, что уравнение (49) справедливо и для гораздо более широкого класса функций.

Доказательство уравнения замкнутости для разнообразных систем ортогональных функций было дано в работах В. А. Стеклова. В этих же работах было выяснено важное значение уравнения замкнутости в теории ортогональных систем. Доказательство уравнения замкнутости для тригонометрических рядов впервые было дано А. М. Ляпуновым.

Вернемся к семейству функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

Эти функции обладают свойством ортогональности на промежутке $(-\pi, \pi)$, но они не нормированы, т. е. интегралы от квадратов их не равны единице. Из вышеизложенных вычислений [**142**] следует, что в данном случае ортогональным и нормированным будет семейство функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots$$

Предыдущие построения имеют простую геометрическую аналогию. Рассмотрим обычное трехмерное пространство; пусть **A** — вектор этого пространства и $A_x$, $A_y$, $A_z$ — его составляющие по некоторым прямоугольным прямолинейным осям. Квадрат длины этого вектора выражается формулой [**103**]:

$$|\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \tag{50}$$

Если **A** и **B** — два вектора, то условие их перпендикулярности имеет вид [**103**]:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0. \tag{51}$$

Рассмотрим теперь гораздо более сложное векторное пространство, а именно будем считать вектором этого пространства всякую вещественную функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(a, b)$ и обладающую некоторыми общими свойствами, вроде тех, о которых мы говорили в предыдущем номере и которые позволяют производить нужные нам интегрирования.

По аналогии с (50) примем величину интеграла

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

за квадрат длины вектора $f(x)$ нашего функционального пространства и по аналогии с (51) назовем два вектора $f_1(x)$ и $f_2(x)$ нашего функционального пространства перпендикулярными или ортогональными, если

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x) \, dx = 0.$$

В данном случае конечные суммы формул (50) и (51) мы заменили интегралом по промежутку $(a, b)$. Приняв такую терминологию, мы можем сказать, что условие (44) равносильно тому, что векторы $\psi_n(x)$, входящие в состав семейства (45), попарно ортогональны и по длине равны единице, т. е. в нашем функциональном пространстве векторы $\psi_n(x)$ аналогичны системе единичных, попарно ортогональных ортов обычного пространства [**102**]. Пусть $f(x)$ — любой вектор нашего функционального пространства. Можно сказать, что $c_n$, вычисленные по формулам (47), суть составляющие вектора $f(x)$ на орты $\psi_n(x)$. Неравенство Бесселя (48) равносильно тому, что сумма квадратов составляющих не превосходит квадрата длины самого вектора. В трехмерном пространстве, если мы возьмем три единичных, попарно ортогональных орта, то, в силу (50), мы всегда имеем знак равенства. Но если бы мы, например, забыли о третьем орте, направленном по оси $OZ$, то вместо знака равенства мы должны были бы написать

$$A_x^2 + A_y^2 \leqslant |\mathbf{A}|^2,$$

причем знак равенства имел бы место только для векторов, лежащих в плоскости $XY$, а для остальных векторов мы имели бы знак строгого неравенства. В функциональном пространстве существует бесчисленное множество попарно ортогональных ортов, и невозможно простым счетом этих ортов убедиться в том, что мы не пропустили какие-нибудь орты.

Если для всех функций $f(x)$, т. е. для всех векторов нашего функционального пространства, имеет место формула замкнутости (49), аналогичная формуле (50), то это и является признаком того, что ни один из ортов не пропущен, т. е. что к семейству (45) нельзя

добавить ни одного нового орта $\psi_0(x)$, который был бы ортогонален ко всем уже имеющимся. Действительно, пусть такая функция $\psi_0(x)$ существует, т. е.

$$\int_a^b \psi_0(x)\psi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, в силу (47), что все коэффициенты Фурье функции $\psi_0(x)$ относительно функций (45) равны нулю. По условию формула (49) должна иметь место для всех $f(x)$ и, в частности, для $\psi_0(x)$. Но для этой последней функции все $c_n$ равны нулю, и формула (49) дает

$$\int_a^b [\psi_0(x)]^2\,dx = 0. \tag{52}$$

Если, например, предположить, что $\psi_0(x)$ — непрерывная функция, то из (52) следует, что $\psi_0(x)$ тождественно равна нулю в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Система ортогональных функций (45) называется полной в отношении непрерывных функций, если не существует непрерывной функции, кроме функции, равной тождественно нулю, ортогональной ко всем функциям (45). Из сказанного выше следует, что из замкнутости вытекает полнота в отношении непрерывных функций. Возможность получить замкнутость из полноты связана с более общим определением последней (не только по отношению к непрерывным функциям).

**149. Практический гармонический анализ.** Операция разложения данной функции в ряд Фурье называется гармоническим анализом. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то формулы (27), определяющие коэффициенты Фурье, решают задачу. Но во многих случаях, которые встречаются на практике, функция бывает задана эмпирически, и тогда задача гармонического анализа заключается в выработке наиболее удобных методов либо для вычисления коэффициентов Фурье, либо же для непосредственного вычерчивания гармоник различных порядков для заданной функции.

Вычислительные методы гармонического анализа основаны на применении формул приближенного вычисления интегралов к интегралам для $a_k$ и $b_k$. Наиболее простая из этих формул есть формула прямоугольников [**I, 108**].

Мы будем считать длину промежутка равной $2\pi$. Этого всегда можно достигнуть подходящим выбором масштаба на оси $OX$. Концы промежутка будем считать в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$. Разделим теперь промежуток $(0, 2\pi)$ на $n$ равных частей и обозначим абсциссы точек деления через

$$x_0 = 0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, x_{n-1}, \quad x_n = 2\pi,$$

а значения функции $f(x)$ в этих точках обозначим через

$$Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n.$$

Тогда по формуле прямоугольников окажется:

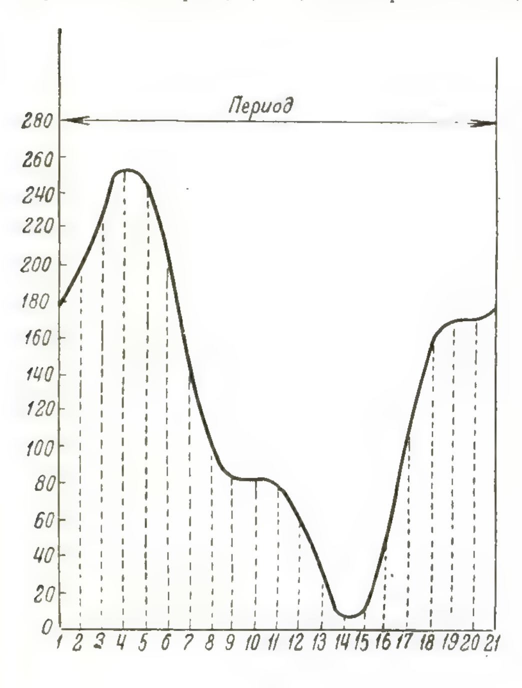
$$a_k \approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos kx_i; \qquad b_k \approx \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sin kx_i, \tag{53}$$

и различные приемы, указанные для вычисления коэффициентов $a_k$ и $b_k$, имеют целью упростить формулы (53) и по возможности уменьшить число необходимых умножений.

Приведенный ниже способ, заимствованный из книжки W. Lohmann'a [1]), основан на некотором преобразовании формул (53) и весьма удобен как по простоте требуемых им манипуляций, так и по относительно хорошей точности результатов.

1. Имея график анализируемой кривой, чертим ось абсцисс под кривой, по возможности ближе к ней (черт. 123), чтобы избежать отрицательных ординат и не иметь дела с очень большими ординатами. Период этой кривой делим на двадцать равных частей.

2. Составляем табличку на специально разграфленном листке бумаги, как это указано на черт. 124. Номера 1, 2, ..., 20 в первом столбце обозначают номера абсцисс; во втором столбце выписаны соответствующие им ординаты кривой, которые снимаются непосредственно из графика функции, причем полезно выбрать масштаб настолько малым, чтобы ординаты эти измерялись целыми числами.




Черт. 123.

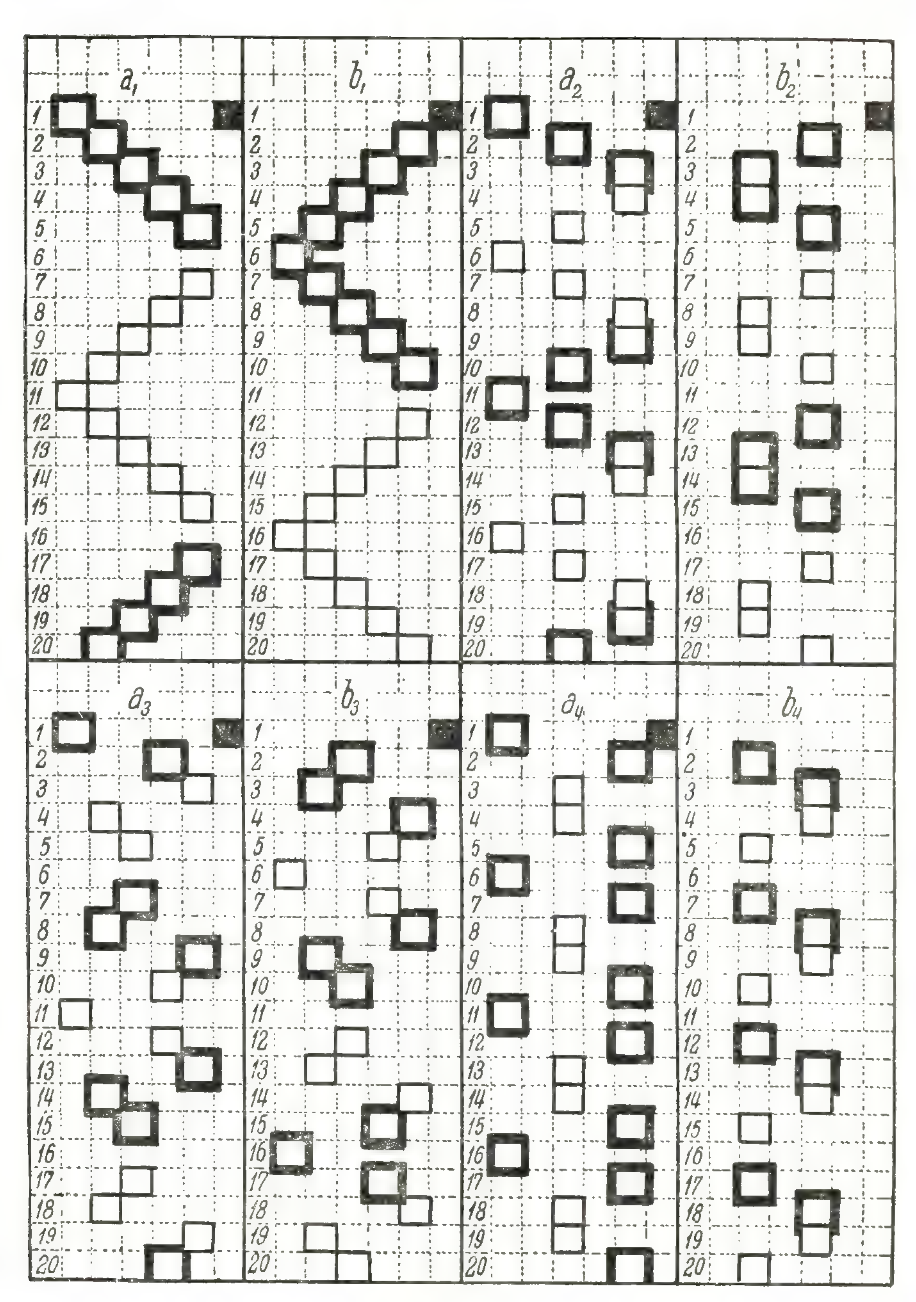
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 175 | | | | |
| 2 | 196 | 186 | 159 | 116 | 59 |
| 3 | 230 | 218 | 186 | 136 | 69 |
| 4 | 253 | 240 | 205 | 149 | 76 |
| 5 | 245 | 233 | 198 | 145 | 74 |
| 6 | 205 | | | | |
| 7 | 135 | 128 | 109 | 80 | 41 |
| 8 | 100 | 95 | 81 | 59 | 30 |
| 9 | 82 | 78 | 66 | 48 | 25 |
| 10 | 85 | 81 | 69 | 50 | 26 |
| 11 | 82 | | | | |
| 12 | 64 | 61 | 52 | 38 | 19 |
| 13 | 29 | 28 | 23 | 17 | 9 |
| 14 | 10 | 10 | 8 | 6 | 3 |
| 15 | 15 | 14 | 12 | 9 | 5 |
| 16 | 50 | | | | |
| 17 | 110 | 105 | 89 | 65 | 33 |
| 18 | 158 | 150 | 125 | 93 | 47 |
| 19 | 174 | 165 | 141 | 103 | 52 |
| 20 | 173 | 164 | 140 | 102 | 52 |

Черт. 124.

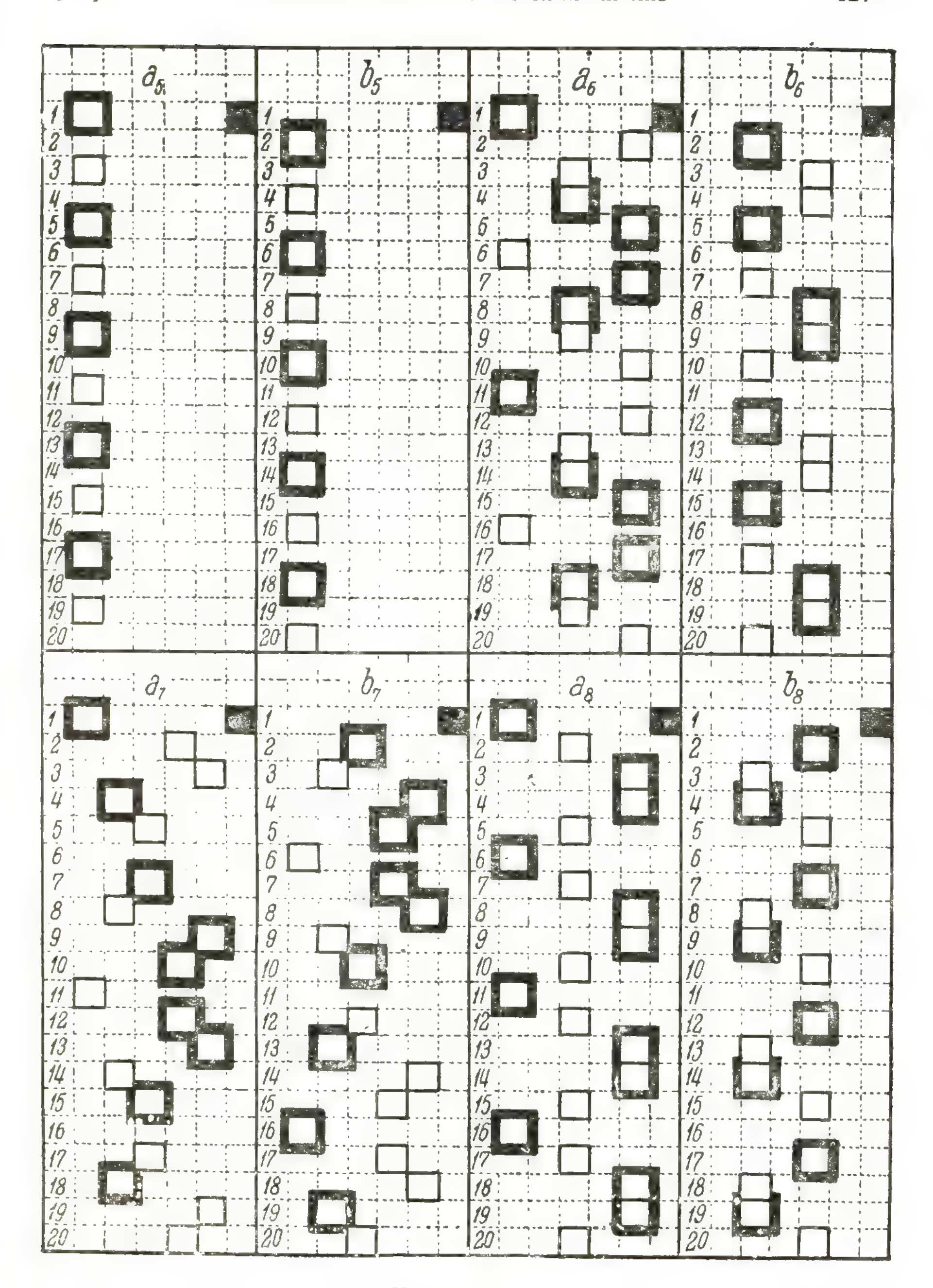
В следующем столбце выписываем произведения этих ординат на $\cos 18° = 0{,}95$, в третьем — произведения их же на $\cos 36° = 0{,}81$, далее — произведения их на $\cos 54° = 0{,}59$ и, наконец, — произведения ординат на $\cos 72° = 0{,}30$.

---

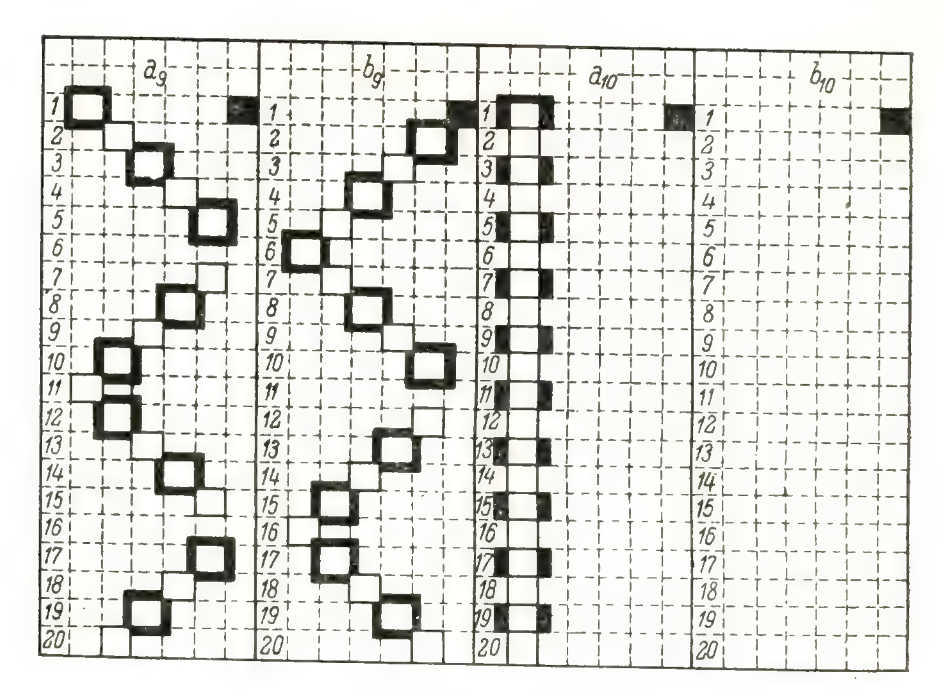
[1]) „Harmonische Analyse zum Selbstunterricht". Berlin, 1921.




Черт. 125-а.




Черт. 125-б.




Черт. 125-в.

Последний столбец оставляем пустым, заштриховав крайнее верхнее его поле (при умножении лучше всего пользоваться арифмометром).

3. Для определения постоянного члена разложения $\frac{a_0}{2} = r_0$ составляем сумму всех ординат и делим сумму на двадцать.

4. Для определения отдельных коэффициентов $a_k$, $b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 10)$ изготовляются шаблоны из прозрачной восковой бумаги для каждого коэффициента в отдельности по указанным на черт. 125 образцам. Размеры шаблонов и клеток на них должны в точности соответствовать таковым же таблицы черт. 124. Указанные на шаблонах клетки должны быть обведены либо тонкими и жирными контурами, либо же контурами разных цветов. Каждый шаблон накладывается на таблицу (черт. 124), и вычисляется сумма $\Sigma_{(+)}$ чисел, занимающих клетки с жирным контуром, и сумма $\Sigma_{(-)}$ чисел, занимающих клетки с тонким контуром.

Проделав это для всех шаблонов, составляем разность соответствующих сумм $(\Sigma_{(+)} - \Sigma_{(-)})$ и делим каждую из них на 10; полученные частные и дадут коэффициенты $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $\ldots$, $a_{10}$, $b_{10}$.

5. Определяем амплитуды $r_1$, $r_2$, $\ldots$, $r_{10}$ различных гармоник искомого разложения по формуле

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Определяем фазы $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\ldots$, $\varphi_9$, $\varphi_{10}$ различных гармоник по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}.$$

Для определений углов $\varphi_k$ можно с пользою применять прилагаемую таблицу, позволяющую находить $\varphi_k$ с точностью до 1°.

| | | 0° ↑ | 1° ↑ | 2° ↑ | 3° ↑ | 4° ↑ | 5° ↑ | 6° ↑ | 7° ↑ | 8° ↑ | 9° ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0,01 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0, 17 |
| 10° | 0,17 | 0,19 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 | 0,30 | 0,32 | 0,33 | 0,35 |
| 20° | 0,35 | 0,37 | 0,39 | 0,41 | 0,43 | 0,46 | 0,48 | 0,50 | 0,52 | 0,54 | 0, 57 |
| 30° | 0,57 | 0,59 | 0,61 | 0,64 | 0,66 | 0,69 | 0,71 | 0,74 | 0,77 | 0,80 | 0, 82 |
| 40° | 0,82 | 0,85 | 0,88 | 0,92 | 0,95 | 0,98 | 1,02 | 1,05 | 1,09 | 1,13 | 1,17 |
| 50° | 1,17 | 1,21 | 1,26 | 1,30 | 1,35 | 1,40 | 1,46 | 1,51 | 1,57 | 1,63 | 1,70 |
| 60° | 1,70 | 1,75 | 1,84 | 1,90 | 2,06 | 2,10 | 2,20 | 2,30 | 2,40 | 2,5 | 2,7 |
| 70° | 2,7 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 | 3,6 | 3,9 | 4,2 | 4,5 | 4,9 | 5,4 |
| 80° | 5,4 | 6,0 | 6,7 | 7,6 | 9 | 10 | 13 | 16 | 23 | 38 | 115 |
| 90° | 115 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | ∞ |

Мы отыскиваем в таблице два числа, между которыми лежит отношение $\left|\frac{a_k}{b_k}\right|$, и обозначаем через $\psi_k$ угол, десятки градусов которого указаны с левой стороны той строки, в которой находятся упомянутые числа, а единицы — вертикальной стрелкой.

Найдя $\psi_k$, определяем $\varphi_k$ по следующей табличке в зависимости от знаков $a_k$ и $b_k$:

| $a_k$ | $b_k$ | $k$ |
|---|---|---|
| + | + | $\varphi_k = \psi_k$ |
| + | — | $\varphi_k = 180° - \psi_k$ |
| — | — | $\varphi_k = 180° + \psi_k$ |
| — | + | $\varphi_k = 360° - \psi_k$ |

Все эти вычисления полезно располагать в виде таблицы, которая приведена ниже для указанной на черт. 123 кривой.

| $r_0 = 129$ | $\Sigma_{(+)}$ | $\Sigma_{(-)}$ | $a = \frac{\Sigma_{(+)} - \Sigma_{(-)}}{10}$ | $\Sigma_{(+)}$ | $\Sigma_{(-)}$ | $b = \frac{\Sigma_{(+)} - \Sigma_{(-)}}{10}$ | $a^2$ | $b^2$ | $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a}$ | $\psi^\circ$ | $\varphi^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1201 | 424 | + 77,7 | 1121 | 496 | + 62,5 | 6037,3 | 3906,3 | 100 | 1,24 | 51 | 51 |
| 2 | 832 | 819 | + 1,3 | 804 | 785 | + 1,9 | 1,7 | 3,6 | 2 | 0,68 | 34 | 34 |
| 3 | 653 | 968 | — 31,5 | 754 | 865 | — 11,1 | 992,3 | 123,2 | 33,4 | 2,84 | 71 | 251 |
| 4 | 821 | 838 | — 1,7 | 785 | 798 | — 1,3 | 2,9 | 1,7 | 2 | 1,38 | 54 | 234 |
| 5 | 641 | 634 | + 0,5 | 654 | 640 | + 1,4 | 0,3 | 2,0 | 2 | 0,36 | 20 | 20 |
| 6 | 832 | 827 | + 0,5 | 797 | 786 | + 1,1 | 0,3 | 1,2 | 1 | 0,45 | 24 | 24 |
| 7 | 808 | 813 | — 0,5 | 802 | 817 | — 1,5 | 0,3 | 2,3 | 2 | 0,33 | 18 | 198 |
| 8 | 823 | 828 | — 0,5 | 792 | 797 | — 0,5 | 0,3 | 0,3 | 1 | 1,00 | 45 | 225 |
| 9 | 816 | 809 | + 0,7 | 815 | 802 | + 1,3 | 0,5 | 1,7 | 2 | 0,54 | 29 | 29 |
| 10 | 1277 | 1294 | — 1,7 | — | — | — | — | — | 2 | $\infty$ | 90 | 270 |

В заключение заметим, что указанный прием дает сравнительно точный результат лишь для первых гармоник.

## § 15. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

**150. Разложение в ряд Фурье.** Настоящий параграф мы посвятим более глубокому и строгому изложению теории рядов Фурье и начнем с изложения доказательства теоремы разложения $f(x)$ в ряд Фурье. При этом мы будем налагать на $f(x)$ условия, отличные от условий Дирихле [**143**], что приведет к упрощению доказательства. В дальнейшем мы дадим доказательство и теоремы Дирихле.

Обратимся к ряду Фурье функции $f(x)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt,$$

и переменная интегрирования обозначена нами буквою $t$, чтобы не путать ее при дальнейших вычислениях с переменной $x$ формулы (1). Подставляя выражения $a_k$ и $b_k$ в формулу (1), найдем сумму первых $(2n+1)$ членов ряда Фурье функции $f(x)$, которую мы обозначим через $S_n(f)$:

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

Но имеет место формула [I, 174]

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi = \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Заменяя в этой формуле $n$ на $(n+1)$ и вычитая из обеих частей половину, получим:

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}, \tag{2}$$

и предыдущее выражение для $S_n(f)$ можно переписать в виде

$$S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Функцию $f(x)$, заданную в промежутке $(-\pi, \pi)$, мы периодически продолжаем с периодом $2\pi$, так что мы можем считать ее определенной при всех вещественных $x$ и с периодом $2\pi$. Дробь, стоящая под знаком интеграла, в силу (2), также имеет относительно $t$ период $2\pi$. Принимая во внимание замечание из **[142]**, мы можем в предыдущем интеграле заменить промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ любым промежутком длины $2\pi$. Берем какое-нибудь значение $x$

независимого переменного и принимаем за промежуток интегрирования $(x-\pi,\ x+\pi)$:

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt.$$

Отметим еще раз, что во всем дальнейшем мы под $f(x)$ разумеем функцию, продолженную указанным выше образом из промежутка $(-\pi,\ \pi)$ на все вещественные значения $x$.

Разбиваем весь интеграл на два: один $\int\limits_{x-\pi}^{x}$ и другой $\int\limits_{x}^{x+\pi}$. В первом вводим вместо $t$ новую переменную интегрирования $z$ по формуле $t=x-2z$, а во втором — по формуле $t=x+2z$. Совершая замену переменных под знаком интеграла и вычисляя новые пределы интегрирования, получим:

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz. \qquad (3)$$

Если мы положим, что $f(x)$ во всем промежутке $(-\pi,\ \pi)$ равна единице, то очевидно, что свободный член $\frac{a_0}{2}$ ее ряда Фурье будет равен единице, а остальные члены — нулю, т. е. $S_n(f)$ при всяком $n$ будет равна единице, и мы имеем следующее равенство:

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \qquad (n=1,\ 2,\ 3\ \ldots). \qquad (4)$$

Прежде чем переходить к доказательству основного предложения, докажем лемму:

Лемма. *Если $(a,\ b)$ есть промежуток $(-\pi,\ \pi)$ или его часть и $\psi(z)$ — функция, непрерывная в $(a,\ b)$ или имеющая в этом промежутке конечное число разрывов первого рода, то интегралы*

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\sin nz\,dz$$

*стремятся к нулю при беспредельном возрастании целого числа $n$.* Если $(a,\ b)$ есть промежуток $(-\pi,\ \pi)$, то эта лемма буквально совпадает с теоремой из [**147**]. Положим теперь, что $(a,\ b)$ есть часть $(-\pi,\ \pi)$. Продолжим $\psi(z)$ из $(a,\ b)$ во весь промежуток

$(-\pi, \pi)$, полагая ее равной нулю в частях промежутка $(-\pi, \pi)$, лежащих вне $(a, b)$, т. е. определим новую функцию $\psi_1(z)$ так, что $\psi_1(z) = \psi(z)$ при $a \leqslant z \leqslant b$ и $\psi_1(z) = 0$, если $z$ принадлежит промежутку $(-\pi, \pi)$, но находится вне $(a, b)$. При этом мы можем, например, написать

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \psi(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi_1(z)\cos nz\,dz,$$

и этот интеграл стремится к нулю в силу упомянутой выше теоремы из [147]. Заметим, что $\psi_1(z)$ также или непрерывна в промежутке $(-\pi, \pi)$, или имеет конечное число разрывов первого рода. Нетрудно показать, что лемма остается справедливой, если $(a, b)$ — любой конечный промежуток.

Обращаемся теперь к доказательству основной теоремы разложения $f(x)$ в ряд Фурье. Мы, как всегда, считаем, что $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода в промежутке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Умножая обе части равенства (4) на $f(x)$, вводя этот множитель под знак интеграла и вычитая полученное равенство из (3), будем иметь:

$$S_n(f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x-2z) - f(x)]\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2z) - f(x)]\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz,$$

что можно переписать еще в виде:

$$S_n(f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2z) - f(x)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2z) - f(x)}{2z}\cdot\frac{2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz. \quad (5)$$

Для того чтобы доказать, что ряд Фурье (1) функции $f(x)$ сходится и имеет суммою $f(x)$, надо показать, что разность $[S_n(f) - f(x)]$ стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{f(x-2z) - f(x)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}$$

в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Она может иметь точки разрыва первого рода, происходящие от точек разрыва $f(x-2z)$, и, кроме того, надо особо исследовать значение $z=0$. Положим, что во взятой точке $x$ функция $f(z)$ не только непрерывна, но и имеет производную. Из определения производной и из очевидного равенства

$$\lim_{z \to 0} \frac{-2z}{\sin z} = -2$$

вытекает, что $\psi(z)$ стремится к определенному пределу, равному $-2f'(x)$, когда $z \to 0$. Отсюда вытекает, что к функции $\psi(z)$ применима вышеуказанная лемма, и первое слагаемое в правой части формулы (5) стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$. Точно так же доказывается, что и второе слагаемое стремится к нулю, а отсюда вытекает, что и разность $[S_n(f)-f(x)]$ стремится к нулю во взятой точке $x$. Мы получаем таким образом следующую теорему:

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода в промежутке $(-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится и имеет суммою $f(x)$ во всякой такой точке $x$, в которой $f(x)$ имеет производную.*

Нетрудно получить и более общие результаты. Положим, что в точке $x$ функция непрерывна или даже имеет разрыв непрерывности первого рода, но существуют конечные пределы

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h} \quad \text{и} \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}. \tag{6}$$

Геометрически существование этих пределов, т. е. производных слева и справа, равносильно существованию определенной касательной слева и справа. При этом имеет место следующее дополнение к доказанной теореме: *если существуют конечные пределы* (6), *то в этой точке ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и его сумма равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ [что равно $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна].*

Умножая (4) на $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ и вычитая из (3), можем написать:

$$S_n(f)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z}\cdot\frac{-2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}\cdot\frac{2z}{\sin z}\sin(2n+1)z\,dz. \tag{7}$$

Надо доказать, что правая часть стремится к нулю при беспредельном возрастании $n$.

Принимая во внимание существование пределов (6), мы можем утверждать, что при $z \to 0$ обе дроби:

$$\frac{f(x-2z)-f(x-0)}{-2z} \quad \text{и} \quad \frac{f(x+2z)-f(x+0)}{2z}$$

имеют конечные пределы, и, рассуждая совершенно так же, как и выше, мы убедимся, что оба интеграла, стоящих в правой части (7), стремятся к нулю при беспредельном возрастании $n$. Таким образом приведенное выше дополнение к теореме доказано.

При значениях $x=\pi$ и $x=-\pi$ в силу периодического продолжения $f(x)$, пределы (6) сведутся к пределам

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(-\pi+h)-f(-\pi+0)}{h} \quad \text{и} \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(\pi-h)-f(\pi-0)}{-h},$$

и сумма ряда будет

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Заметим, что во всех примерах, рассмотренных нами в предыдущем параграфе, $f(x)$ удовлетворяет во всех точках условиям доказанной теоремы или дополнения к ней.

**151. Вторая теорема о среднем.** Для доказательства теоремы Дирихле и более подробного изучения ряда Фурье нам будет необходимо одно предложение интегрального исчисления, которое имеет некоторую аналогию с теоремой о среднем, изложенной в томе I **[I, 95]**, и называется обычно *второй теоремой о среднем*. Это предложение формулируется следующим образом: *если $\varphi(x)$ — монотонная ограниченная функция в конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ с конечным числом точек разрыва, $f(x)$ — непрерывная, то*

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x)\, dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x)\, dx, \tag{8}$$

где $\xi$ — *некоторое число из промежутка* $(a, b)$.

Нетрудно видеть, что достаточно доказать формулу (8) для случая возрастающей (неубывающей) функции $\varphi(x)$, ибо если $\varphi(x)$ — убывающая, то $[-\varphi(x)]$ есть возрастающая функция и, применяя формулу (8) к $[-\varphi(x)]$ и меняя в обеих частях знаки на обратные, получим равенство (8) и для самой $\varphi(x)$. Покажем еще, что достаточно доказать формулу (8) для того случая, когда $\varphi(a+0)=0$. Действительно, пусть для этого случая формула (8) доказана, и рассмотрим $\varphi(x)$, которая указанному условию не удовлетворяет. Введем новую монотонную функцию $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(a+0)$. У этой функции предельные значения на границах будут $\psi(a+0)=0$ и $\psi(b-0)= =\varphi(b-0)-\varphi(a+0)$. По предположению, к функции $\psi(x)$ формула (8)

применима, и в силу $\psi(a+0)=0$ она дает:

$$\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx = \psi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b [\varphi(x)-\varphi(a+0)] f(x)\,dx = [\varphi(b-0)-\varphi(a+0)]\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(a+0)\left[\int_a^b f(x)\,dx - \int_\xi^b f(x)\,dx\right] + \varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

а из этого равенства непосредственно вытекает формула (8) для $\varphi(x)$. Итак, достаточно доказать формулу (8) для возрастающей или, лучше сказать, неубывающей функции $\varphi(x)$, у которой $\varphi(a+0)=0$. Значения такой функции в промежутке $(a, b)$ будут, очевидно, неотрицательными.

Для доказательства разобьем промежуток $(a, b)$ на малые части, отметив в нем точки:

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b.$$

Как известно [**I, 95**]:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

где $\xi_i$ — некоторое значение, лежащее внутри промежутка $(x_{i-1}, x_i)$.

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

При беспредельном возрастании $n$ и уменьшении наибольшей из длин промежутков $(x_{i-1}, x_i)$ эта сумма стремится к определенному интегралу [как это мы видели в томе I], т. е. мы имеем:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \lim \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

Займемся теперь исследованием суммы

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\left[\int_{x_{i-1}}^b f(x)\,dx - \int_{x_i}^b f(x)\,dx\right] =$$

$$= \varphi(\xi_1)\int_a^b f(x)\,dx + \sum_{i=2}^n [\varphi(\xi_i)-\varphi(\xi_{i-1})]\int_{x_{i-1}}^b f(x)\,dx. \qquad (9)$$

Интегралы:

$$\int_a^b f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^b f(x)\,dx,\quad \int_{x_2}^b f(x)\,dx,\ \ldots,\quad \int_{x_{i-1}}^b f(x)\,dx,\ \ldots,\quad \int_{x_{n-1}}^b f(x)\,dx \tag{10}$$

являются частными значениями функции

$$\int_x^b f(x)\,dx = -\int_b^x f(x)\,dx, \tag{11}$$

которая есть непрерывная функция от переменного предела интегрирования $x$ [I, 96], а поэтому все значения (10) лежат между наименьшим и наибольшим значениями $m$ и $M$ функции (11).

Принимая во внимание, что в выражении (9) все множители

$$\varphi(\xi_1) \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})$$

неотрицательны, и заменяя в этом выражении значения (10) справа на $m$, а затем на $M$, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \geqslant \left\{\varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})]\right\} m = \varphi(\xi_n)\, m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant \left\{\varphi(\xi_1) + \sum_{i=2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})]\right\} M = \varphi(\xi_n)\, M,$$

т. е.

$$\varphi(\xi_n)\, m \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant \varphi(\xi_n)\, M,$$

или в пределе при $n \to \infty$ и беспредельном уменьшении наибольшей из длин промежутков $(x_{i-1}, x_i)$ мы имеем:

$$\xi_n \to b - 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_n) \to \varphi(b-0),$$

и неравенство будет

$$\varphi(b-0)\, m \leqslant \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx \leqslant \varphi(b-0)\, M,$$

т. е.

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b-0)\, P,$$

где $P$ — некоторое число, лежащее в промежутке $(m, M)$. Но непрерывная функция (11) принимает в промежутке $(a, b)$ все значения, лежащие между

ее наименьшим и наибольшим значениями $m$ и $M$ [I, 43], в том числе и $P$, а потому в промежутке $(a, b)$ наверно найдется такое значение $\xi$, при котором:

$$\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx = P,$$

и, следовательно,

$$\int_{a}^{b} \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b-0) \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx,$$

а это совпадает с формулой (8) в силу условия $\varphi(a+0)=0$. Заметим, что формулу (8) можно доказать, не предполагая непрерывности $f(x)$ и конечного числа разрывов у $\varphi(x)$, на чем мы, однако, останавливаться не будем. Отметим, наконец, что вместо формулы (8) можно доказать более общую формулу:

$$\int_{a}^{q} \varphi(x) f(x)\,dx = A \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx + B \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

где числа $A$ и $B$ должны удовлетворять условиям $A \leqslant \varphi(a+0)$ и $B \geqslant \varphi(b-0)$.

Следствие. В [147] мы видели, что при некоторых условиях коэффициенты Фурье $a_n$ и $b_n$ функции $f(x)$ стремятся к нулю, при $n \to \infty$. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то можно доказать более точный результат, а именно, что $a_n$ и $b_n$ при больших $n$ будут бесконечно малыми порядка не ниже $\frac{1}{n}$, т. е. для них будет иметь место оценка вида

$$|a_n| < \frac{M}{n}; \quad |b_n| < \frac{M}{n},$$

где $M$ — определенное положительное число. По условию, промежуток $(-\pi, \pi)$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых $f(x)$ монотонна и ограничена. Пусть $(\alpha, \beta)$ — одна из этих частей. Коэффициент $a_n$ будет суммой конечного числа слагаемых вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos nx\,dx,$$

которое можно преобразовать по теореме о среднем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} f(\alpha+0) \int_{\alpha}^{\xi} \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi} f(\beta-0) \int_{\xi}^{\beta} \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{f(\alpha+0)(\sin n\xi - \sin n\alpha) + f(\beta-0)(\sin n\beta - \sin n\xi)}{\pi n}.$$

Мы получим таким образом для отдельного слагаемого в выражении $a_n$ оценку вида $\frac{M}{n}$, где $M = \frac{2}{\pi}|f(\alpha+0)| + \frac{2}{\pi}|f(\beta-0)|$. Оценка того же вида

очевидно будет и для всей суммы конечного числа таких слагаемых, т. е. для $a_n$. Аналогичное рассуждение годится и для $b_n$.

Если $f(x)$ непрерывна, $f(-\pi) = f(\pi)$ и существует производная $f'(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, то, интегрируя по частям и принимая во внимание, что в силу $f(-\pi) = f(\pi)$ внеинтегральный член обратится в нуль, получим:

$$nb_n = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, d \cos nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(x) \cos nx\, dx.$$

Но последний интеграл, как коэффициент Фурье функции $f'(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, имеет вышеуказанную оценку, и для $b_n$ получаем при сделанных предположениях оценку:

$$|b_n| \leqslant \frac{M}{n^2}.$$

Аналогичная оценка получится и для $a_n$. Более подробное рассмотрение оценок коэффициентов Фурье в зависимости от свойств функции $f(x)$ будет нами дано позже.

**152. Интеграл Дирихле.** Из формулы (3) видно, что вопрос о сходимости ряда Фурье, т. е. о существовании предела суммы $S_n(f)$, приводится к исследованию интеграла типа

$$\int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z}\, dz.$$

Мы будем рассматривать более простой интеграл, а именно интеграл вида

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}\, dz, \tag{12}$$

который называется *интегралом Дирихле*. Мы докажем по поводу этого интеграла следующую лемму:

Лемма. *Если $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке* $(a, b)$, то: 1) *если $a = 0$ и $b > 0$, то при беспредельном возрастании $m$ интеграл* (12) *имеет предел* $\frac{1}{2}\varphi(+0)$; 2) *если $a = 0$ и $b < 0$, то этот предел равен* $\frac{1}{2}\varphi(-0)$; 3) *если $a < 0$ и $b > 0$, то предел равен* $\frac{\varphi(-0) + \varphi(+0)}{2}$; 4) *если $a$ и $b > 0$ или $a$ и $b < 0$, то упомянутый предел равен нулю.* Нетрудно видеть, что достаточно доказать одно первое утверждение. Считая его доказанным, мы можем легко получить из него остальные. Докажем, например, утверждения 3 и 4, считая первое доказанным:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}\, dz = \frac{1}{\pi} \int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}\, dz - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(z) \frac{\sin mz}{z}\, dz.$$

Если $a$ и $b>0$, то в силу утверждения 1 уменьшаемое и вычитаемое в правой части имеет предел $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, и, следовательно, разность стремится к нулю, что и доказывает утверждение 4. Если же $a<0$ и $b>0$, то, заменяя в вычитаемом переменную интегрирования $z$ на $(-z)$, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{-a} \varphi(-z)\frac{\sin mz}{z}\,dz.$$

Так как $b$ и $(-a)>0$, то можем применить к обоим интегралам утверждение 1 и получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz \to \frac{1}{2}\varphi(+0)+\frac{1}{2}\varphi(-0) = \frac{\varphi(-0)+\varphi(+0)}{2}.$$

Перейдем теперь к доказательству утверждения 1, т. е. покажем, что при $b>0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(z)\frac{\sin mz}{z}\,dz \to \frac{1}{2}\varphi(+0). \tag{13}$$

При доказательстве будем пока считать, что $\varphi(z)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и монотонна в промежутке $(0, b)$.

Мы имели раньше следующий результат:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Это есть непрерывная функция $c$, равная нулю при $c=0$ и стремящаяся к $\frac{\pi}{2}$ при $c\to+\infty$. Мы можем отсюда заключить, что при всех положительных $c$ написанный интеграл остается по абсолютной величине меньшим некоторого определенного положительного числа $M$. Рассмотрим теперь интеграл с двумя положительными пределами

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{15}$$

Мы имеем, очевидно,

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < M+M=2M,$$

т. е. интеграл (15) при любых положительных $a$ и $b$ остается по абсолютной величине меньшим некоторого определенного положительного числа $2M$.

Прежде чем переходить к доказательству (13), рассмотрим более простой интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx.$$

Совершая замену переменных $t = mx$ и пользуясь (14), получим при беспредельном возрастании $m$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{mb} \frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \varphi(+0)\frac{\sin mx}{x}\,dx \to \frac{1}{2}\varphi(+0).$$

Таким образом для доказательства (13) нам достаточно показать, что

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b [\varphi(x) - \varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx \to 0,$$

т. е. что при достаточно больших $m$ левая часть написанного по абсолютной величине меньше любого положительного числа $\varepsilon$. Разобьем промежуток интегрирования $(0, b)$ на два: $(0, \delta)$ и $(\delta, b)$, где $\delta$ — малое положительное число, которое будет фиксировано в дальнейшем. Покажем, что каждый из двух интегралов

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x) - \varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^b [\varphi(x) - \varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx \qquad (16)$$

при достаточно больших $m$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ по абсолютной величине. Ввиду конечного числа разрывов функции $\varphi(x)$ можно взять $\delta$ настолько малым, чтобы в промежутке $(0, \delta)$ функция $\varphi(x)$ не имела разрывов, так что $\varphi(x \pm 0) = \varphi(x)$. Принимая во внимание, что по условию $\varphi(x)$ монотонна, и применяя к первому из интегралов (16) теорему о среднем, получим:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x) - \varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}[\varphi(\delta) - \varphi(+0)]\int_0^\delta \frac{\sin mx}{x}\,dx,$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [\varphi(x) - \varphi(+0)]\frac{\sin mx}{x}\,dx\right| < \frac{1}{\pi}\left|\varphi(\delta) - \varphi(+0)\right|\cdot 2M.$$

По определению символа $\varphi(+0)$ разность $\varphi(\delta) - \varphi(+0) \to 0$ при $\delta \to 0$ и, следовательно, мы можем приблизить $\delta$ настолько к нулю, чтобы правая

часть написанного равенства была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. При этом первый из интегралов (16) будет по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при любом $m$. Фиксируя таким образом положительное число $\delta$, обратимся ко второму из интегралов (16). Применяя к нему также теорему о среднем, можем написать его в виде

$$\frac{1}{\pi}[\varphi(\delta)-\varphi(+0)]\int_{\delta}^{\xi}\frac{\sin mx}{x}dx+\frac{1}{\pi}[\varphi(b-0)-\varphi(+0)]\int_{\xi}^{b}\frac{\sin mx}{x}dx. \tag{17}$$

Множители, стоящие перед интегралами, суть постоянные, и нам достаточно доказать, что оба интеграла стремятся к нулю при возрастании $m$. Рассмотрим, например, первый из интегралов и совершим в нем замену $t = mx$. Получим интеграл:

$$\int_{m\delta}^{m\xi}\frac{\sin t}{t}dt. \tag{18}$$

При беспредельном возрастании $m$ пределы $m\delta$ и $m\xi$ беспредельно возрастают, так как $\delta$ — фиксированное положительное число и $\xi$ не меньше $\delta$. Но раз интеграл

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

есть сходящийся интеграл, то интеграл (18) при беспредельном возрастании его обоих пределов должен стремиться к нулю [**82**]. Аналогично рассматривается и второй из интегралов в выражении (17), а поэтому все это выражение стремится к нулю, т. е. второй из интегралов (16) стремится к нулю и, следовательно, при достаточно больших $m$ он по абсолютной величине меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Равенство (13) и, следовательно, все утверждения леммы доказаны нами в предположении, что $\varphi(z)$ не только удовлетворяет условиям Дирихле, но и монотонна. Остается показать, что (13) верно и в том случае, когда $\varphi(z)$ удовлетворяет только условиям Дирихле. В силу условий Дирихле промежуток $(0, b)$ можно разбить на конечное число частей, в каждой из которых $\varphi(z)$ монотонна. Пусть $(0, b)$ можно разбить хотя бы на три части $(0, b_1)$, $(b_1, b_2)$ и $(b_2, b)$, в каждой из которых $\varphi(z)$ монотонна. Интеграл (13) разобьется на три:

$$\int_{0}^{b}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz=$$
$$=\int_{0}^{b_1}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz+\int_{b_1}^{b_2}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz+\int_{b_2}^{b}\varphi(z)\frac{\sin mz}{z}dz. \tag{19}$$

К каждому слагаемому правой части применима лемма, так как в промежутках $(0, b_1)$ $(b_1, b_2)$ и $(b_2, b)$ функция $\varphi(z)$ монотонна. Следовательно первое слагаемое стремится к $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, остальные два — к нулю, и интеграл (19) стремится к $\frac{1}{2}\varphi(+0)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в интеграле Дирихле (12) число $m$ может беспредельно возрастать любым образом, не обязательно принимая только целые значения. Полученный результат имеет своим источником тот факт, что функция $\frac{\sin mz}{z}$ при больших значениях $m$ очень часто меняет знак и, кроме того, принимает большие значения при $z$, близких к нулю.

**153. Теорема Дирихле.** Пользуясь леммой из предыдущего номера, мы докажем без труда теорему Дирихле [143]. Нам надо доказать, в силу (3), что выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \qquad (20)$$

стремится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ при беспредельном возрастании $n$. Рассмотрим вместо (20) выражение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{z}\,dz. \qquad (21)$$

Верхние пределы в обоих интегралах положительны, и функции $f(x-2z)$ и $f(x+2z)$ удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке интегрирования. Кроме того, $m=2n+1\to\infty$, и, по доказанной в предыдущем номере лемме, выражение (21) стремится к пределу $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Остается доказать, что разность выражений (20) и (21) стремится к нулю. Для этого достаточно показать, что интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz$$

стремятся к нулю. Докажем это для первого интеграла.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)\sin(2n+1)z\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(z)\sin(2n+1)z\,dz, \qquad (22)$$

где

$$\psi(z)=f(x-2z)\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right).$$

Первый множитель $f(x-2z)$ имеет в промежутке интегрирования конечное число разрывов первого рода (или непрерывен). Второй

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\frac{z-\sin z}{z\sin z}=\frac{z-\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)}{z\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)}$$

при $z\to 0$ стремится к нулю и никаких разрывов в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет. Следовательно к интегралу (22) применима лемма из [**150**], и этот интеграл стремится к нулю. Таким образом утверждение теоремы Дирихле доказано.

Мы дополним доказанную теорему еще двумя предложениями, которые мы приведем без доказательства. Полученное нами предложение обнаруживает лишь то, что во всякой точке промежутка $x$ ряд Фурье $S[f(x)]$ сходится и имеет суммой $f(x)$, но в этом предложении ничего не упоминается о характере сходимости в промежутке $(-\pi, \pi)$. Предложения, которые мы сейчас формулируем, восполняют этот пробел.

1. *Во всяком промежутке, в котором функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, кроме того, непрерывна, и который лежит внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, ряд $S[f(x)]$ сходится равномерно.*

2. *Если $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, непрерывна во всем промежутке $(-\pi, \pi)$, и сверх того*

$$f(-\pi+0)=f(\pi-0),$$

*то ряд $S[f(x)]$ сходится равномерно при всех значениях $x$.*

Теорема Дирихле налагает сравнительно мало ограничений на разлагаемую функцию $f(x)$. Но все же теорема разложения в ряд Фурье не имеет места для любой функции $f(x)$, и даже существуют непрерывные функции, которые не могут быть разложены в ряд Фурье.

Читатель покажет без труда, что предложения, аналогичные указанным выше, имеют место для рядов, расположенных только по косинусам или только по синусам в случае, если функция определена в промежутке $(0, \pi)$, со следующими изменениями:

При условиях теоремы Дирихле для промежутка $(0, \pi)$ сумма ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx; \qquad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos kt\,dt \tag{23}$$

равна

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad \text{при } 0<x<\pi \tag{24}$$

и

$$f(+0)\text{ — при } x=0;\ f(\pi-0)\text{ — при } x=\pi;$$

сумма же ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx; \quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin kt\,dt \tag{25}$$

будет (24) при $0<x<\pi$ и нуль при $x=0$ и $x=\pi$.

Все эти результаты получаются очень просто, если продолжить функцию $f(x)$ в соседний промежуток $(-\pi, 0)$ четным образом в случае ряда (23) и нечетным в случае ряда (25), как это было сделано в [**145**].

**154. Приближение к непрерывной функции полиномами.** Нашей следующей задачей является доказательство формулы замкнутости (40) из [**147**]. Это доказательство будет основано на некоторых результатах из теории приближений функций полиномами. К изложению этих результатов, которые являются важными и сами по себе, мы сейчас и переходим. В основе всего здесь лежит следующая теорема:

Теорема I (Вейерштрасса). *Если $f(x)$ — любая непрерывная в замкнутом конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ функция, то можно построить последовательность полиномов $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots$, которая стремится равномерно* [**I, 144**] *к $f(x)$ во всем замкнутом промежутке $(a, b)$.*

Заметим прежде всего, что при помощи преобразования $x' = \frac{x-a}{b-a}$ можно промежуток $(a, b)$ привести к промежутку $(0,1)$, и полиномы от $x$ будут полиномами от $x'$ и обратно. Можно поэтому считать, что промежуток $(a, b)$ есть $(0,1)$. Докажем сначала два элементарных алгебраических тождества. Напишем формулу бинома Ньютона

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^m v^{n-m} = (u+v)^n. \tag{26}$$

Дифференцируя это тождество по $u$ и умножая на $u$, а затем проделывая то же самое с полученным тождеством, будем иметь два новых тождества:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n} m C_n^m u^m v^{n-m} &= nu(u+v)^{n-1}, \\ \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m u^m v^{n-m} &= nu(nu+v)(u+v)^{n-2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Полагая в (26) $u = x$ и $v = 1 - x$, будем иметь:

$$1 = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{28}$$

Умножая (26) на $n^2x^2$, первое из (27) — на $(-2nx)$, второе из (27) — на единицу и складывая, получим при $u = x$ и $v = 1 - x$:

$$\sum_{m=0}^{n} (m - nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = nx(1-x).$$

Нетрудно показать [I, 60], что правая часть этого равенства, положительная в промежутке (0,1), принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$, откуда следует:

$$\sum_{m=0}^{n} (m - nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{1}{4} n. \tag{29}$$

Покажем теперь, что полиномы

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \tag{30}$$

равномерно стремятся к $f(x)$ в промежутке (0,1). Умножая обе части (28) на $f(x)$ и вычитая из полученного равенства равенство (30), можем написать:

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Нам надо доказать, что при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое $N$, не зависящее от $x$, что

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right| < \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Так как при $0 \leqslant x \leqslant 1$ произведение $C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \geqslant 0$, то

$$\left| \sum_{m=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right] C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

и достаточно доказать неравенство:

$$\sum_{m=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m} < \varepsilon \quad \text{при } n > N. \tag{31}$$

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна в промежутке (0,1) [I, 35], т. е. существует такое $\delta$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Пусть $x$ — фиксированное значение из промежутка (0,1). Разобьем сумму (31) на две части $S_1$ и $S_2$. К первой сумме отнесем те сла-

гаемые, у которых $m$ удовлетворяют условию $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$. В силу выбора $\delta$ имеем для первой суммы, состоящей из положительных слагаемых, оценку:

$$S_1 < \sum_{(I)} \frac{\varepsilon}{2} C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

где $(I)$ указывает, что суммирование ведется по значениям $m$, удовлетворяющим неравенству $\left|x-\frac{m}{n}\right|<\delta$. Если мы просуммируем по всем значениям $m$ от 0 до $n$, то сумма может только увеличиться, т. е.

$$S_1 < \sum_{m=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} C_n^m x^m (1-x)^{n-m} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

т. е. в силу (28), $S_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ при любом $n$. Переходим ко второй сумме

$$S_2 = \sum_{(II)} \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)\right| C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

где суммирование распространяется на те значения $m$, которые удовлетворяют неравенству $\left|x-\frac{m}{n}\right| \geqslant \delta$ или $|nx-m| \geqslant n\delta$, и оценим эту сумму. Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке $(0,1)$, должна удовлетворять в этом промежутке неравенству вида: $|f(x)| \leqslant M$, где $M$ — определенное положительное число **[I, 35]** и, следовательно, $\left|f(x)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right| \leqslant |f(x)| + \left|f\left(\frac{m}{n}\right)\right| \leqslant 2M$. Кроме того, умножим слагаемые суммы $S_2$ на множители $\frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2}$, которые не меньше единицы. Вынося $2M$ и $\frac{1}{n^2\delta^2}$, не зависящие от переменной суммирования $m$, за знак суммы, получим:

$$S_2 \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{(II)} (m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Все слагаемые положительны, и если мы просуммируем по всем значениям $m$ от $m=0$ до $m=n$, то значение суммы может только увеличиться. Принимая во внимание (29), получим:

$$S_2 \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{m=0}^{n} (m-nx)^2 C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Числа $M$ и $\delta$ — определенные положительные числа, и чтобы $S_2$ удовлетворяло неравенству $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, достаточно взять $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$. Мы получим то число $N = \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, которое нам надо было найти. Действительно, при $n > N$ обе суммы $S_1$ и $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, и неравенство (31) удовлетворено; теорема Вейерштрасса доказана. Нетрудно видеть, что доказанную теорему можно формулировать следующим образом: *если $f(x)$ — непрерывная функция в замкнутом промежутке $(a, b)$ и $\varepsilon$ — любое заданное положительное число, то существует такой полином $P(x)$ от $x$, что во всем промежутке $(a, b)$ выполняется неравенство*:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{32}$$

Основываясь на теореме Вейерштрасса, докажем аналогичную теорему для периодических функций.

Теорема II. *Если $f(x)$ — непрерывная периодическая функция периода $2\pi$ и $\varepsilon$ — любое заданное положительное число, то можно найти такой тригонометрический полином*

$$T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \tag{33}$$

*что при всяком $x$*:

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{34}$$

Заметим прежде всего, что, в силу периодичности, достаточно удовлетворить неравенству (34) в основном промежутке $(-\pi, \pi)$. Положим сначала, что $f(x)$ — четная функция, и введем вместо $x$ новую переменную $t = \cos x$, т. е. $x = \arccos t$, причем мы берем главное значение этой функции, т. е. при изменении $t$ от 1 до $(-1)$ функция $x = \arccos t$ непрерывно меняется от 0 до $\pi$. Функция $f(x) = f(\arccos t)$ будет непрерывной функцией $t$ в промежутке $(-1, 1)$ и, по теореме Вейерштрасса, существует такой полином $P(t)$, что

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1),$$

и, возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

При замене $x$ на $(-x)$ значения $f(x)$ не изменяются ввиду четности $f(x)$ и значения $P(\cos x)$ также не изменятся ввиду четности $\cos x$, т. е. написанное неравенство справедливо и при $-\pi \leqslant x \leqslant 0$, т. е. во всем основном промежутке. Но, как известно **[I, 176]**, целые положительные степени $\sin x$ и $\cos x$ выражаются линейно через синусы и косинусы кратных дуг, так что полином от $\cos x$, т. е. $P(\cos x)$, можно представить в виде (33), и теорема доказана.

Рассмотрим теперь любую непрерывную периодическую функцию $f(x)$. Если мы положим:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]; \quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)], \tag{35}$$

то $f(x)$ будет равно сумме $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, причем $\varphi(x)$ — функция четная и $\psi(x)$ — нечетная, и обе — периодические. При заданном $\varepsilon$ существует, по доказанному, такой полином $P(t)$, что $|\varphi(x)-P(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Если мы докажем, что существует такой полином $Q(t)$, что

$$|\psi(x)-\sin x\, Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi), \tag{36}$$

то тригонометрический полином

$$T(x)=P(\cos x)+\sin x\, Q(\cos x)$$

будет удовлетворять условию (34). Введем попрежнему новую переменную $t=\cos x$ и рассмотрим функцию $\psi(x)=\psi(\arccos t)$ в промежутке $-1\leqslant t\leqslant 1$. Функция $\psi(x)$, как всякая непрерывная, нечетная и периодическая функция, обращается в нуль при $x=0$ и $x=\pi$, и, следовательно, $\psi(\arccos t)$ обращается в нуль на концах промежутка, т. е. при $t=\pm 1$. Из формулы (30) вытекает, что если $f(x)$ обращается в нуль на концах промежутка (0,1), т. е. $f(0)=f(1)=0$, то и полином $P_n(x)$ обладает тем же свойством. Пользуясь преобразованием $t=2x-1$, можем свести промежуток (0,1) к промежутку $(-1, 1)$ и утверждать, что найдется такой полином $R(t)$, равный нулю при $t=\pm 1$, что

$$|\psi(\arccos t)-R(t)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad -1\leqslant t\leqslant 1.$$

Мы можем при этом написать $R(t)=(1-t^2)R_1(t)$, где $R_1(t)$ — тоже полином, и предыдущее неравенство переписывается в виде:

$$|\psi(x)-\sin^2 x R_1(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{37}$$

Для функции $\sin x R_1(\cos x)=\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)$, непрерывной в промежутке $(-1, 1)$, можно построить такой полином $Q(t)$, что

$$\left|\sqrt{1-t^2}\,R_1(t)-Q(t)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad -1\leqslant t\leqslant 1,$$

т. е.

$$|\sin x R_1(\cos x)-Q(\cos x)|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

и тем более

$$|\sin^2 x R_1(x)-\sin x Q(x)|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{37$_1$}$$

ибо $|\sin x| \leqslant 1$. Из (37) и $(37_1)$ следует:

$$|\psi(x) - \sin x Q(\cos x)| \leqslant |\psi(x) - \sin^2 x R_1(\cos x)| + \\ + |\sin^2 x R_1(\cos x) - \sin x Q(\cos x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. неравенство (36) доказано в промежутке $(0, \pi)$. Но так как функции $\psi(x)$ и $\sin x Q(\cos x)$ — нечетны, то неравенство тем самым справедливо и во всем промежутке $(-\pi, \pi)$.

Приведенные выше доказательства теорем I и II принадлежат акад. С. Н. Бернштейну.

**155. Формула замкнутости.** Из доказанной только что теоремы довольно просто вытекает справедливость формулы замкнутости из [**147**] для системы тригонометрических функций. Положим сначала, что заданная в промежутке $(-\pi, \pi)$ функция $f(x)$ непрерывна и $f(-\pi) = f(\pi)$.

Продолжая $f(x)$ вовне этого промежутка по периодичности, получим непрерывную периодическую функцию, и при заданном $\varepsilon$ будет существовать тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий неравенству (34).

Из этого неравенства вытекает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - T(x)]^2\, dx < \varepsilon^2. \tag{38}$$

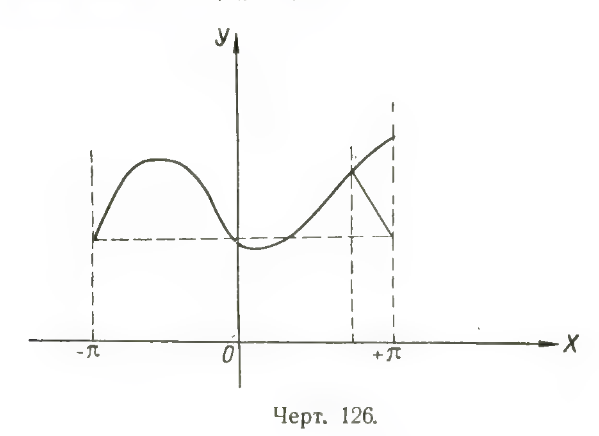
Пусть $n$ — порядок тригонометрического полинома, т. е. значение числа $m$ в формуле (33). Но при любом выборе тригонометрического полинома порядка не выше $n$ величина интеграла (38) имеет наименьшее значение $\varepsilon_n^2$, когда за тригонометрический полином мы выбираем сумму первых $(2n+1)$ членов ряда Фурье функции $f(x)$. Отсюда вытекает, что $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, и ввиду того, что положительное $\varepsilon$ можно выбирать сколь угодно малым, отсюда следует, что $\varepsilon_n$, которое не увеличивается при возрастании $n$, должно стремиться к нулю при $n \to \infty$, а это, как известно [**147**], и равносильно формуле замкнутости для $f(x)$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $f(x)$ непрерывна в промежутке $(-\pi, \pi)$, но ее значения $f(-\pi)$ и $f(\pi)$ неодинаковы. Как всегда, существует такое положительное число $M$, что $|f(x)| \leqslant M$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Пусть $\eta$ — произвольное заданное положительное число и пусть $\delta$ — положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta < \frac{\pi\eta}{8M^2}; \quad \delta < \pi. \tag{39}$$

Построим новую функцию $f_1(x)$ по следующему правилу. В промежутке $(-\pi, \pi-\delta)$ функция $f_1(x)$ совпадает с $f(x)$, в промежутке

$(\pi-\delta, \pi)$ график $f_1(x)$ есть отрезок прямой, соединяющий точку $x=\pi-\delta$, $y=f(\pi-\delta)$ с точкой $x=\pi$, $y=f(-\pi)$ (черт. 126). Функция $f_1(x)$ есть непрерывная функция в промежутке $(-\pi, \pi)$, имеющая одинаковые значения $f(-\pi)$ при $x=\pm\pi$, и мы имеем, очевидно, как и для $f(x)$, $|f_1(x)|\leqslant M$.




Черт. 126.

В силу доказанного выше, при любом заданном положительном $\eta$ можно найти такой тригонометрический полином, что:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\,dx<\frac{\eta}{4}. \tag{40}$$

Принимая во внимание, что $f(x)=f_1(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi-\delta)$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx.$$

Откуда, принимая во внимание, что $|f(x)-f_1(x)|\leqslant|f(x)|+|f_1(x)|\leqslant \leqslant 2M$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f[x)-f_1(x)]^2\,dx\leqslant\frac{2M^2}{\pi}\int_{\pi-\delta}^{\pi}dx=\frac{2M^2\delta}{\pi},$$

или, в силу (39):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx<\frac{\eta}{4}. \tag{41}$$

Составим интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\{[f(x)-f_1(x)]+[f_1(x)-T(x)]\}^2\,dx.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$, можем написать:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-f_1(x)]^2\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f_1(x)-T(x)]^2\,dx,$$

а отсюда, в силу (40) и (41), следует:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\eta.$$

Обозначая через $n$ порядок тригонометрического полинома $T(x)$ и рассуждая, как и выше, получим отсюда $\varepsilon_n^2\leqslant\eta$, и ввиду произвольной малости $\eta$ имеем $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. формула замкнутости имеет место и для $f(x)$ с указанными выше свойствами. Совершенно так же можно доказать, что формула замкнутости имеет место в том случае, когда $f(x)$ ограничена в промежутке $(-\pi, \pi)$ и имеет конечное число точек разрыва. Если все точки разрыва суть точки разрыва первого рода, то не надо оговаривать ограниченности функции. Чтобы провести доказательство, можно выделить точки разрыва достаточно узенькими промежутками и построить новую функцию $f_1(x)$, непрерывную в промежутке $(-\pi, \pi)$, совпадающую с $f(x)$ вне упомянутых промежутков и имеющую прямолинейные графики внутри этих промежутков. Для $f_1(x)$ можно по предыдущему построить тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий неравенству (40), а упомянутые промежутки можно выбрать настолько узенькими, чтобы выполнялось неравенство (41). В остальном доказательство проводится, как и выше. Итак, формула замкнутости доказана нами для всех функций, имеющих конечное число разрывов первого рода (или непрерывных). Заметим, что она имеет место и для гораздо более широкого класса функций.

**153. Свойства замкнутых систем функций.** Приведем теперь некоторые следствия формулы замкнутости, причем мы будем проводить все рассуждения не для системы тригонометрических функций, а для любой системы ортогональных и нормированных функций

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \psi_3(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \qquad (42)$$

в промежутке $(a, b)$. Положим, что по отношению к этой системе имеет место формула замкнутости для любых функций с конечным числом разрывов первого рода. Только о таких функциях мы и будем говорить дальше. Введем обобщенные коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx.$$

Формула замкнутости имеет вид:

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{43}$$

Переходим теперь к некоторым важным следствиям этой формулы.

1. *Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две какие угодно функции, а $c_k$ и $d_k$ — их коэффициенты Фурье*:

$$c_k = \int_a^b f(x)\,\psi_k(x)\,dx; \quad d_k = \int_a^b \varphi(x)\,\psi_k(x)\,dx, \tag{44}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k, \tag{45}$$

*причем ряд, стоящий справа, сходится абсолютно.*

В самом деле, заменив в равенстве (43) функцию $f(x)$ на $f(x) + \xi\varphi(x)$, где $\xi$ — произвольный постоянный параметр, мы будем иметь:

$$\int_a^b [f(x) + \xi\varphi(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b [f(x) + \xi\varphi(x)]\,\psi_k(x)\,dx\right]^2,$$

или, в силу (44):

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx + 2\xi \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx + \xi^2 \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2\xi \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k + \xi^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi$, мы получим (45).

Абсолютная сходимость ряда из формулы (45) очевидна из того, что

$$|c_k d_k| \leqslant \frac{1}{2}(c_k^2 + d_k^2),$$

ряд же $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_k^2 + d_k^2)$, как известно, сходится.

2. *Если $\varphi(x)$ зависит от некоторых параметров, но при всех значениях этих параметров*

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx < M,$$

*где постоянная $M$ не зависит от параметров, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k \tag{46}$$

*сходится равномерно относительно этих параметров.*

Доказательство основано на простом, но вместе с тем весьма важном неравенстве: *каковы бы ни были вещественные постоянные*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m,$$

*имеем всегда*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2, \tag{47}$$

*причем знак равенства будет только тогда, когда величины $\alpha_i$, $\beta_i$ пропорциональны между собой:*

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\beta_m}{\alpha_m}.$$

В самом деле, пусть $\xi$ — какое угодно вещественное число. Составим сумму

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} (\xi\alpha_k - \beta_k)^2, \tag{48}$$

которая, очевидно, неотрицательна. Знак равенства может иметь здесь место тогда и только тогда, когда

$$\xi\alpha_k - \beta_k = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

т. е.

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\beta_m}{\alpha_m} = \xi,$$

и в этом случае очевидно:

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k\Big)^2 = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2.$$

Вообще же говоря, раскрывая в выражении (48) скобки, мы получим трехчлен второй степени:

$$S_m = A\xi^2 - 2B\xi + C,$$

где

$$A = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2; \quad B = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\beta_k; \quad C = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2,$$

который всегда остается положительным. При этом, как известно из элементарной алгебры, должно быть $B^2-AC<0$, т. е. $B^2<AC$, что и дает неравенство (47).

Возвращаемся к нашему утверждению 2. Составим сумму

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k d_k;$$

по неравенству (47) имеем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k d_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} d_k^2}.$$

С другой стороны, если в (43) заменить $f(x)$ на $\varphi(x)$ и $c_k$ на $d_k$, очевидно, получим, как следствие:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} d_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \int_a^b [\varphi(x)]^2\, dx < M.$$

Члены же ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ по условию не зависят от параметров, а потому при заданном наперед сколь угодно малом положительном $\varepsilon$ можно выбрать число $N$, не зависящее от параметров, такое, что при всяком $n>N$ и при всяком $p>0$ имеется неравенство:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

При этом получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k d_k\right| < \varepsilon \text{ при } n>N,$$

откуда и вытекает равномерная сходимость ряда (46).

3. *Если $x_1$ и $x_2$ — какие угодно значения в промежутке* $(a, b)$, *то*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\, dx, \tag{49}$$

*причем ряд в правой части сходится равномерно при всех значениях $x_1$, $x_2$ в промежутке* $(a, b)$.

Если бы мы знали, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x) \tag{50}$$

и что этот ряд сходится равномерно, то формула (49) была бы очевидной [I, 146].

Но замечательно то, что формула эта оказывается всегда справедливой, даже если ряд (50) не сходится, т. е. оказывается, что этот ряд можно интегрировать почленно так, как будто бы он был равномерно сходящимся и имел сумму, равную $f(x)$.

Для доказательства формулы (49) положим в формуле (45):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ 0 & \text{„} \quad a \leqslant x < x_1 \text{ или } x_2 < x \leqslant b. \end{cases}$$

Величины $x_1$ и $x_2$ оказываются здесь теми параметрами, от которых зависит функция $\varphi(x)$. Упомянутое в п. 2 число $M$ существует, ибо:

$$\int_a^b [\varphi(x)]^2 dx \leqslant \int_a^b dx = b - a.$$

Далее, так как $\varphi(x)$ есть 0 вне промежутка $(x_1, x_2)$, то

$$d_k = \int_a^b \varphi(x) \psi_k(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\, dx$$

и, в силу (45):

$$\int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(x)\, dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. В применении к обычным рядам Фурье можно доказать что их можно почленно интегрировать так, как будто бы они были равномерно сходящимися и имели суммой разлагаемую функцию $f(x)$ не только для промежутка внутри $(-\pi, \pi)$, но вообще для какого угодно промежутка. При этом функция $f(x)$ должна быть продолжена периодически вне промежутка $(-\pi, \pi)$ так, как это было указано в [143].

Замечание 2. Отметим, что неравенство (47) применимо не только к суммам, но и к интегралам, и тогда оно имеет вид (неравенство Буняковского)

$$\left[\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f_1^2(x)\, dx \cdot \int_a^b f_2^2(x)\, dx. \tag{51}$$

В самом деле, составим выражение:

$$\int_a^b [f_1(x) + \xi f_2(x)]^2 dx = \int_a^b f_1^2(x)\, dx + 2\xi \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx + \xi^2 \int_a^b f_2^2(x)\, dx,$$

где $\xi$ — любое вещественное число. Из вида левой части непосредственно следует, что это выражение ни при каких вещественных $\xi$ не может быть отрицательным. Но если трехчлен $A + 2B\xi + C\xi^2$ при всех вещественных $\xi$ неотрицателен, то $B^2 - AC \leqslant 0$, т. е. $B^2 \leqslant AC$. В применении к предыдущему трехчлену это и дает неравенство (51).

**157. Характер сходимости рядов Фурье.** Ряды, которые мы получили в [144], обладают тем недостатком, что они плохо сходятся. Некоторые из

них не будут абсолютно и равномерно сходящимися, например ряд (10) [144] при $x = \frac{\pi}{2}$ обращается в ряд:

$$2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$$

не абсолютно сходящийся; ряд (10), кроме того, не может быть и равномерно сходящимся, так как представляет прерывную функцию [I, 146]. Таким же недостатком обладает и ряд, представляющий прерывную функцию, имеющую значения $c_1$ и $c_2$. Существует зависимость между характером разлагаемой функции, ее прерывностью или непрерывностью, и ее рядом Фурье. Эту зависимость мы исследуем здесь более подробно. Относительно функции $f(x)$ мы предположим раз навсегда, что она сама и ее последовательные производные, о которых будет говориться, суть функции, удовлетворяющие условиям Дирихле, и периодически продолжаются вовне промежутка $(-\pi, \pi)$. Обозначим через

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{\tau_0-1}^{(0)}$$

точки разрыва функции $f(x)$ внутри $(-\pi, \pi)$, через

$$x_1', x_2', \ldots, x_{\tau_1-1}'$$

точки разрыва ее производной $f'(x)$ внутри $(-\pi, \pi)$ и вообще через

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{\tau_k-1}^{(k)}$$

точки разрыва производной $f^{(k)}(x)$. К точкам же разрыва нужно будет присоединить и концы промежутка $(-\pi, \pi)$, если предельные значения:

$$f(\mp\pi \pm 0), \quad f'(\mp\pi \pm 0), \ldots, f^{(k)}(\mp\pi \pm 0)$$

между собой не совпадают.

Обозначим для симметрии $x_0^{(0)} = -\pi$ и $x_{\tau_0}^{(0)} = \pi$ и аналогично для производных. Наше предыдущее условие для производных сводится к тому, что внутри всякого промежутка $(x_s^{(k)}, x_{s+1}^{(k)})$ $(s = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1)$ существует непрерывная производная $f^{(k)}(x)$. В силу условий Дирихле эта производная будет иметь определенные предельные значения и на концах промежутка.

Преобразуем теперь выражения для коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Начнем с коэффициента:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Разобьем промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ на отдельные части:

$$(-\pi, x_1^{(0)}), (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), \ldots, (x_{\tau_0-1}^{(0)}, \pi),$$

в каждой из которых функция $f(x)$ непрерывна. Интегрируя по частям, мы имеем:

$$\int f(x) \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} f(x) - \frac{1}{n} \int f'(x) \sin nx \, dx.$$

Так как, с другой стороны:

$$\int\limits_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx = \lim_{\varepsilon',\,\varepsilon''\to 0} \int\limits_{x_{i-1}^{(0)}+\varepsilon'}^{x_i^{(0)}-\varepsilon''} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon',\,\varepsilon''\to 0} \frac{\sin nx}{n} f(x)\Bigg|_{x=x_{i-1}^{(0)}+\varepsilon'}^{x=x_i^{(0)}-\varepsilon''} - \frac{1}{n}\int\limits_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx,$$

то, принимая во внимание непрерывность функции $\sin nx$, мы получим:

$$\int\limits_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f(x)\cos nx\,dx = \frac{\sin nx_i^{(0)}}{n} f(x_i^{(0)}-0) - \frac{\sin nx_{i-1}^{(0)}}{n} f(x_{i-1}^{(0)}+0) - $$

$$- \frac{1}{n}\int\limits_{x_{i-1}^{(0)}}^{x_i^{(0)}} f'(x)\sin nx\,dx.$$

Суммируя по $i$ от 1 до $\tau_0$, окончательно будем иметь:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\{\sin nx_1^{(0)}[f(x_1^{(0)}+0) - f(x_1^{(0)}-0)] + \ldots + \sin nx_{\tau_0}^{(0)}[f(x_{\tau_0}^{(0)}+0) -$$

$$- f(x_{\tau_0}^{(0)}-0)]\} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin nx\,dx,$$

причем $x_0^{(0)} = -\pi$, $x_{\tau_0}^{(0)} = +\pi$, и, в силу периодичности $f(x)$, $f(x_{\tau_0}^{(0)}+0) = f(x_0^{(0)}+0)$. В данном случае $\sin nx_{\tau_0}^{(0)} = 0$, но мы сохраняем соответствующее слагаемое для симметрии с дальнейшими формулами.

Обозначим для краткости скачки функции $f(x)$ в точках разрыва $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots, x_{\tau_0}^{(0)}$ соответственно через:

$$\delta_1^{(0)} = f(x_1^{(0)}+0) - f(x_1^{(0)}-0);\ \ldots,\ \delta_{\tau_0}^{(0)} = f(x_{\tau_0}^{(0)}+0) - f(x_{\tau_0}^{(0)}-0).$$

Предыдущая формула перепишется тогда в виде:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)}\sin nx_i^{(0)} - \frac{b_n'}{n}, \tag{52}$$

где $a_n'$ и $b_n'$ обозначают коэффициенты Фурье производной $f'(x)$. Точно так же, исходя из формулы:

$$\int f(x)\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n} f(x) + \int f'(x)\cos nx\,dx,$$

получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \cos n x_i^{(0)} + \frac{a_n'}{n}. \qquad (53)$$

Формулы (52) и (53) важны сами по себе, так как они показывают, что *если периодическая функция $f(x)$ имеет скачки, то ее коэффициенты Фурье при $n \to \infty$ будут порядка $\frac{1}{n}$ и притом главные части коэффициентов $a_n$ и $b_n$ будут соответственно равны:*

$$-\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \sin n x_i^{(0)}; \qquad \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_0} \delta_i^{(0)} \cos n x_i^{(0)}, \qquad (54)$$

*остаток же будет порядка выше, чем $\frac{1}{n}$.*

В самом деле, остаток этот будет вида

$$-\frac{b_n'}{n}, \quad \frac{a_n'}{n};$$

величины же $a_n'$ и $b_n'$, как коэффициенты Фурье функции $f'(x)$, стремятся к 0 при $n \to \infty$, т. е. будут величинами бесконечно малыми при $n \to \infty$. Но формулы (52) и (53) важны еще и потому, что, пользуясь ими, мы сможем *выделить из коэффициентов Фурье* $a_n$ и $b_n$, которые стремятся к нулю при $n \to \infty$, *составляющие различных порядков малости по сравнению с* $\frac{1}{n}$.

Для этой цели обозначим вообще через $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ коэффициенты Фурье производной $k$-го порядка $f^{(k)}(x)$, а через $\delta_1^{(k)}, \ldots, \delta_{\tau_k}^{(k)}$ — ее скачки в точках $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{\tau_k}^{(k)} = \pi$:

$$\delta_1^{(k)} = f^{(k)}(x_1^{(k)} + 0) - f^{(k)}(x_1^{(k)} - 0); \ldots; \delta_{\tau_k}^{(k)} = f^{(k)}(\pi + 0) - f^{(k)}(\pi - 0).$$

Применим формулы (52) и (53) к коэффициентам $a_n'$, $b_n'$, для чего нужно только заменить $f(x)$ на $f'(x)$, $\delta_i^{(0)}$ на $\delta_i^{(1)}$, $x_i^{(0)}$ на $x_i^{(1)}$, $\tau_0$ на $\tau_1$; мы получим:

$$\left.\begin{aligned} a_n' &= -\frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_1} \delta_i^{(1)} \sin n x_i^{(1)} - \frac{b_n''}{n}, \\ b_n' &= \frac{1}{\pi n} \sum_{i=1}^{\tau_1} \delta_i^{(1)} \cos n x_i^{(1)} + \frac{a_n''}{n}, \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

где $a_n''$ и $b_n''$ — коэффициенты Фурье $f''(x)$.

Точно так же, продолжая эти рассуждения:

$$\left.\begin{aligned} a''_n &= -\frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\sin nx_i^{(2)} - \frac{b'''_n}{n}, \\ b''_n &= \frac{1}{\pi n}\sum_{i=1}^{\tau_2}\delta_i^{(2)}\cos nx_i^{(2)} + \frac{a'''_n}{n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Положив для краткости:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\sin nx_i^{(k)}; \quad B_k = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{\tau_k}\delta_i^{(k)}\cos nx_i^{(k)} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

мы из предыдущих формул будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -\frac{A_0}{n} - \frac{B_1}{n^2} + \frac{A_2}{n^3} + \frac{B_3}{n^4} - \dots + \frac{\rho'_k}{n^k}, \\ b_n &= \frac{B_0}{n} - \frac{A_1}{n^2} - \frac{B_2}{n^3} + \frac{A_3}{n^4} + \dots + \frac{\rho''_k}{n^k}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где $\rho'_k$, $\rho''_k$ имеют различные выражения в зависимости от вида числа $k$; выражения эти приведены в следующей табличке:

| $k$ | $4m$ | $4m+1$ | $4m+2$ | $4m+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\rho'_k$ | $a_n^{(k)}$ | $-b_n^{(k)}$ | $-a_n^{(k)}$ | $b_n^{(k)}$ |
| $\rho''_k$ | $b_n^{(k)}$ | $a_n^{(k)}$ | $-b_n^{(k)}$ | $-a_n^{(k)}$ |

Здесь $a_n^{(k)}$ и $b_n^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(x)$.

Из выражений $A_k$ и $B_k$ видно, что эти величины зависят от $n$, но величина $n$ входит лишь под знак тригонометрической функции, а потому при беспредельном возрастании $n$ величины $A_s$ и $B_s$ при фиксированном $s$ остаются ограниченными. Коэффициентами при тригонометрических функциях в выражениях $A_s$ и $B_s$ стоят скачки производной $f^{(s)}(x)$. Если этих скачков нет, то $A_s = B_s = 0$. С другой стороны, если производная $f^{(k)}(x)$ есть функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, то множители $\rho'_k$ и $\rho''_k$, которые с точностью до знака совпадают с одним из коэффициентов Фурье функции $f^{(k)}(x)$, будут порядка не ниже $\frac{1}{n}$ при большом $n$, так как в [151] мы видели, что коэффициенты Фурье функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, порядка не ниже $\frac{1}{n}$. Мы получаем таким образом следующую теорему:

*Если периодическая непрерывная функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до* $(k-1)$-го *порядка включительно, а производная* $k$-го *порядка есть функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, то коэффи-*

*циенты Фурье* $a_n$, $b_n$ *функции* $f(x)$ *будут порядка не ниже* $\frac{1}{n^{k+1}}$, т. е. будут иметь оценку:

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}}; \qquad |b_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}},$$

где $M$ — некоторое положительное число.

Заметим, что при $k \geqslant 1$ ряд Фурье функции $f(x)$ будет равномерно сходящимся. Действительно, из доказанной теоремы следует, что в этом случае коэффициенты $a_n$ и $b_n$ будут удовлетворять неравенству

$$|a_n| < \frac{M}{n^2}; \qquad |b_n| < \frac{M}{n^2},$$

а общий член ряда будет иметь оценку:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| < \frac{2M}{n^2},$$

откуда и следует абсолютная и равномерная сходимость ряда, так как ряд $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ есть ряд сходящийся [I, 122].

Формулы (57) остаются в силе и для рядов Фурье в случае промежутка $(-l, l)$. Нужно только положить:

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \sin \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l}, \\ B_k &= \left(\frac{l}{\pi}\right)^k \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\tau_k} \delta_i^{(k)} \cos \frac{n\pi x_i^{(k)}}{l}, \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{58}$$

а выражения для $\rho_k'$, $\rho_k''$, которые выписаны в табличке, умножить на $\left(\frac{l}{\pi}\right)^k$, причем здесь

$$\delta_{\tau_k}^{(k)} = f^{(k)}(l+0) - f^{(k)}(l-0) = f^{(k)}(-l+0) - f^{(k)}(-l-0) \ldots \tag{59}$$

**158. Улучшение сходимости рядов Фурье.** Как мы видели в предыдущем, присутствие в выражении для коэффициентов Фурье $a_n$ и $b_n$ функции $f(x)$ членов порядка $\frac{1}{n}$, которые делают ряд Фурье плохо сходящимся обуславливается наличием скачков у функции $f(x)$. Функция может иметь сколько угодно производных внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, но достаточно одного скачка в конце промежутка, т. е., собственно говоря, несовпадения предельных значений $f(\mp \pi \pm 0)$, чтобы ряд Фурье этой функции стал практически негодным для вычисления. Далее, в приложениях очень часто важно исследовать не функцию $f(x)$, разложенную в ряд Фурье, а ее производные первого, второго и даже третьего порядка. Между тем, если коэффициенты Фурье самой функции $f(x)$ порядка $\frac{1}{n^{k+1}}$, то при дифференцировании ряда

коэффициенты будут уже порядка $\frac{1}{n^k}$, что ясно из равенств:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-a_n \cos nx - b_n \sin nx).$$

Обратно, при каждом интегрировании порядок коэффициентов будет повышаться на единицу, ибо

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \cos nx + a_n \sin nx}{n},$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Таким образом при дифференцировании сходимость ряда Фурье ухудшается; так, например, если коэффициенты Фурье функции $f(x)$ были порядка $\frac{1}{n^2}$, что будет в том случае, если эта функция непрерывна и периодична, а $f'(x)$ может иметь точки разрыва, то ряд, который получится почленным дифференцированием для вычисления $f'(x)$, будет иметь коэффициенты порядка $\frac{1}{n}$, а ряд для $f''(x)$ совсем потеряет смысл, так как его коэффициенты не будут даже стремиться к нулю. Таким образом может оказаться, что ряд Фурье функции $f(x)$ совершенно не годится для вычисления производных от функции $f(x)$ ни при каких значениях $x$, и это произойдет для такой функции, которая лишь *в одной точке* промежутка не имеет производной, а во всех остальных имеет таковые и любого порядка.

Поэтому возникает задача *улучшения сходимости ряда Фурье*, т. е. преобразование его к такому ряду, коэффициенты которого настолько высокого порядка малости, что ухудшение сходимости при дифференцировании не мешает вычислять производные; например, если мы желаем беспрепятственно вычислять почленным дифференцированием производные до третьего порядка включительно, то желательно, чтобы коэффициенты ряда были порядка не ниже $\frac{1}{n^5}$, ибо тогда для третьей производной получим ряд, коэффициенты которого будут иметь порядок $\frac{1}{n^2}$, и вычисление с этим равномерно сходящимся рядом будет практически удобно.

Улучшить сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ можно следующим образом. Пусть в формулах (57) имеются члены порядка $\frac{1}{n}$, т. е. функция $f(x)$ имеет скачки $\delta_i^{(0)}$.

Всегда можно построить простую вспомогательную функцию $\varphi_0(x)$, которая имеет те же скачки, что и $f(x)$. Тогда разность

$$f_1(x) = f(x) - \varphi_0(x)$$

не будет уже иметь скачков, и ряд Фурье $S(f_1)$ для функции $f_1(x)$ будет иметь коэффициенты порядка, по крайней мере $\frac{1}{n^2}$. За $\varphi_0(x)$ проще всего брать функцию, график которой есть „ступенчатая линия“, т. е. состоит из отрезков, параллельных оси $OX$, или вообще из отрезков прямых, причем в первом случае:

$$\varphi_0'(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad f_1'(x) = f'(x),$$

а во втором, если мы будем считать угловые коэффициенты всех отрезков одинаковыми и равными $m_0$, то

$$f_1'(x) - f'(x) = -m_0,$$

и таким образом функция $f_1'(x)$ имеет те же самые скачки, что и $f'(x)$.

Определив так или иначе функцию $\varphi_0(x)$, мы получим:

$$f(x) = \varphi_0(x) + f_1(x),$$

где $\varphi_0(x)$ — известная и весьма простая функция, состоящая из отрезков параллельных прямых, а $f_1(x)$ имеет ряд Фурье, коэффициенты которого имеют порядок не ниже $\frac{1}{n^2}$. Исправляем теперь функцию $f_1(x)$. Мы имеем:

$$f'(x) = f_1'(x) + m_0.$$

Поступая с $f_1'(x)$ так же, как мы выше поступали с $f(x)$, мы можем написать:

$$f_1'(x) = f_2(x) + \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ — функция, состоящая из отрезков параллельных прямых, и $f_2(x)$ разлагается в ряд Фурье, коэффициенты которого порядка не ниже $\frac{1}{n^2}$. Интегрируя последнее равенство, получим для $f_1(x)$ и тем самым для $f(x)$ выражение в виде суммы ряда Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^3}$ и кусков парабол второй степени. Если бы мы занялись дальше исправлением $f''(x)$, то получили бы для $f(x)$ выражение в виде суммы ряда Фурье с коэффициентами порядка не ниже $\frac{1}{n^4}$ и кусков парабол третьей степени и т. д.

Изложенный способ применяется главным образом тогда, когда функция неизвестна, а дан только ее ряд Фурье, причем его коэффициенты имеют вид (57). При этом надо по виду коэффициентов определить точки разрывов и скачки функции $f(x)$ и ее производных, а затем применить указанный выше прием улучшения сходимости.

Можно поступить и иначе, а именно: можно просуммировать те части ряда Фурье, которые происходят от первых слагаемых выражений (57) для коэффициентов $a_n$ и $b_n$. Именно эти слагаемые и создают плохую сходимость ряда Фурье. Оставшийся после суммирования ряд Фурье будет уже сходиться лучше, чем раньше.

При упомянутом выше суммировании надо пользоваться следующими формулами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{-\pi-x}{2} & (-2\pi<x<0)\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{2} & (0<x<2\pi)\\[2mm] 0 & (x=0 \text{ и } x=\pm 2\pi)\end{cases} \qquad (60_1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}\dfrac{2\pi^2+6\pi x+3x^2}{12} & (-2\pi\leqslant x\leqslant 0)\\[2mm] \dfrac{2\pi^2-6\pi x+3x^2}{12} & (0\leqslant x\leqslant 2\pi)\end{cases} \qquad (60_2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\begin{cases}\dfrac{2\pi^2 x+3\pi x^2+x^3}{12} & (-2\pi\leqslant x\leqslant 0)\\[2mm] \dfrac{2\pi^2 x-3\pi x^2+x^3}{12} & (0\leqslant x\leqslant 2\pi).\end{cases} \qquad (60_3)$$

Первая из написанных формул получается, если разложить функцию $\frac{\pi-x}{2}$ в промежутке $(0, \pi)$ по синусам. Вторая получается из первой путем интегрирования по $x$ от 0 до $x$, причем надо пользоваться равенством [144]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Точно так же и третья формула получается из второй путем интегрирования. Дальнейшее интегрирование могло бы нам дать и дальнейшие формулы указанного выше типа. При этом мы считаем длину промежутка равной $\pi$. Этого всегда можно достигнуть простым преобразованием независимого переменного.

Указанная выше идея улучшения сходимости ряда Фурье путем постепенного исправления функции $f(x)$ и ее производных так же, как и приведенный ниже пример, принадлежат акад. А. Н. Крылову [1]).

**159. Пример.** Рассмотрим ряд Фурье:

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin nx \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi). \qquad (61)$$

Мы имеем здесь

$$b_n=-\frac{2n\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-1)}.$$

Для того чтобы представить $b_n$ в виде (53), разложим дробь

$$\frac{n}{n^2-1}$$

---

1) „О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики".

по степеням $\frac{1}{n}$, доведя разложение до членов порядка $\frac{1}{n^4}$.

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}$$

и

$$b_n=-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3}-\frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi n^3(n^2-1)}. \tag{62}$$

Нам надо таким образом просуммировать два ряда:

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} \quad \text{и} \quad -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n^3}. \tag{63}$$

Обозначая первую из сумм через $S_1(x)$, можем переписать ее в виде

$$S_1(x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

К каждой из этих сумм можно применить формулу $(60_1)$. Рассмотрим сначала первую сумму. При изменении $x$ от 0 до $\pi$ аргумент $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, и формула $(60_1)$ дает:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{2x-\pi}{4\pi}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Обращаясь ко второй сумме, замечаем, что при изменении $x$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ аргумент $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, при изменении $x$ от $\frac{\pi}{2}$ до $\pi$ аргумент $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Формула $(60_1)$ дает в этом случае:

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{n}=\begin{cases}\dfrac{2x+\pi}{4\pi} & \left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{2x-3\pi}{4\pi} & \left(\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)\\ 0 & \left(x=\frac{\pi}{2}\right).\end{cases}$$

Складывая, получим для $S_1(x)$ следующее конечное выражение:

$$S_1(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{x-\pi}{\pi} & \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right) \\ 0 & \left(x = \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{64}$$

Вторую из сумм (63) мы могли бы вычислить, пользуясь формулой (60$_3$), но можно поступать и иначе. Обозначим эту сумму через $S_2(x)$. Нетрудно видеть, что, интегрируя $S_1(x)$ дважды по $x$, мы получим $-S_2(x)$ с точностью до полинома первой степени. Интегрируя выражения (64) два раза, получим:

$$\frac{x^3}{6\pi}\left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right); \quad \frac{(x-\pi)^3}{6\pi} \quad \left(\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\right)$$

и, следовательно:

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi} + C_1'x + C_2' & \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{(x-\pi)^2}{6\pi} + C_1''x + C_2'' & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right). \end{cases} \tag{65}$$

Для определения постоянных $C$ заметим, что ряд Фурье для $S_2(x)$ имеет коэффициенты порядка $\frac{1}{n^3}$, а ряд для $S_2'(x)$ имеет коэффициенты порядка $\frac{1}{n^2}$, и, следовательно, оба ряда сходятся равномерно и дают функцию, непрерывную при $x = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что оба выражения (65) и их производные должны совпадать при $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi^3}{48\pi} + C_1'\cdot\frac{\pi}{2} + C_2' = \frac{\pi^3}{48\pi} + C_1''\cdot\frac{\pi}{2} + C_2'';$$

$$-\frac{\pi^2}{8\pi} + C_1' = -\frac{\pi^2}{8\pi} + C_1''. \tag{66}$$

Кроме того, из вида второй из сумм (63) следует $S_2(0) = S_2(\pi) = 0$, что в силу (65) дает:

$$C_2' = 0; \quad C_1''\pi + C_2'' = 0. \tag{67}$$

Из уравнений (66) и (67) можем определить все четыре постоянные:

$$C_1' = C_1'' = \frac{\pi}{24}; \quad C_2' = 0; \quad C_2'' = -\frac{\pi^2}{24};$$

подставляя в (65), получим выражение $S_2(x)$:

$$S_2(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{6\pi} + \frac{\pi}{24}x & \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{(x-\pi)^3}{6\pi} + \frac{\pi}{24}(x-\pi) & \left(\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\right). \end{cases}$$

Окончательно для ряда (61) получим выражение:

$$f(x) = S_1(x) + S_2(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\sin nx, \tag{68}$$

что и решает нашу задачу. Функция $f(x)$ выражается через известные функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$, состоящие из кусков прямых и парабол, и ряда Фурье, коэффициенты которого порядка

$$\frac{1}{n^3(n^2-1)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{n^5}.$$

Мы можем беспрепятственно вычислить производные первых трех порядков функции $f(x)$, в то время как при формуле (61) мы не только не можем ее дифференцировать, но и самый ряд неравномерно сходится.

## § 16. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

**160. Формула Фурье.** Изложение теории рядов Фурье мы закончим исследованием предельного случая, когда промежуток $(-l, l)$, в котором изучается ряд Фурье, стремится к $(-\infty, +\infty)$, т. е. $l \to +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна во всяком конечном промежутке и сверх того абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е. существует интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = Q.$$

По теореме Дирихле внутри $(-l, l)$ мы имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Помня, что

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt,$$

мы получим отсюда:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\frac{n\pi(t-x)}{l}\,dt.$$

Что произойдет с этой формулой, когда $l \to +\infty$? Первое слагаемое очевидно стремится к нулю, ибо

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} |f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l} \to 0.$$

Вводя новую переменную $\alpha$, которая принимает равноотстоящие значения в промежутке $(0, \infty)$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \ \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \ \alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \ \ldots,$$

получая каждый раз приращения $\Delta\alpha = \frac{\pi}{l}$, мы оставшуюся сумму можем написать в виде:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{(\alpha)}\Delta\alpha\int_{-l}^{+l} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt.$$

При больших $l$ интеграл, стоящий под знаком суммы, мало отличается от

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

и можно думать, что вся сумма при $l\to+\infty$ будет стремиться к пределу:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,$$

и таким образом мы имеем:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt. \qquad (1)$$

В точках разрыва непрерывности, если таковые имеются, надо только заменить $f(x)$ на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Формула эта, которая получается из ряда Фурье при $l\to+\infty$, называется формулой Фурье. Мы приходим таким образом к предложению: *если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле во всяком конечном промежутке и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, то при всех $x$ имеет место равенство*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (2)$$

Теорема эта называется обычно *теоремой Фурье*, а интеграл, стоящий в левой части этой формулы, *интегралом Фурье функции* $f(x)$. Предыдущее рассуждение не является строгим, его можно сделать таковым при помощи некоторых дополнительных рассуждений. Мы не будем этого делать, а приведем другое, строгое, доказательство формулы Фурье, основанное на результатах из [**152**].

Формула (2) будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Обозначая интеграл, стоящий в левой части, через $J(\lambda, x)$, мы можем написать:

$$J(\lambda,\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int_0^{\lambda} \cos\alpha(t-x)\,d\alpha, \tag{3}$$

т. е. можем переставить порядок интегрирования по $t$ и по $\lambda$.

Это вытекает из того, что в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt \tag{4}$$

сходится *равномерно* при всех значениях $\alpha$. Действительно, интегралы

$$\int_N^{N'} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt,\qquad \int_{-N'}^{-N} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\qquad (N<N')\ \ldots \tag{5}$$

по абсолютному значению не превосходят

$$\int_N^{N'} |f(t)|\,dt, \tag{6}$$

и, стало быть, при данном $\varepsilon$ можно найти такое $N_0$, не зависящее от $\alpha$, что при всех $N$ и $N'>N_0$ интегралы (5) будут меньше $\varepsilon$ по абсолютной величине, ибо этим свойством, в силу абсолютной интегрируемости $f(t)$, обладает интеграл (6).

Но тогда интеграл (4) можно интегрировать по параметру $\alpha$ под знаком интеграла [**84**], что и дает нам:

$$J(\lambda,\ x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int_0^{\lambda} \cos\alpha(t-x)\,d\alpha.$$

Внутренний интеграл по $\alpha$ правой части формулы (3) можем вычислить непосредственно и получим:

$$J(\lambda,\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt, \tag{7}$$

и нам остается найти:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}\,dt.$$

Разбив промежуток интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на два промежутка $(-\infty, x)$, $(x, +\infty)$ и введя вместо $(t-x)$ переменную $(-z)$ в первом и $z$

во втором промежутке, мы перепишем (7) в виде:

$$J(\lambda, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz.$$

Оба эти интеграла имеют вид интегралов Дирихле, но только с бесконечными пределами. Тем не менее нетрудно показать, что они обладают свойствами обычных интегралов Дирихле, т. е. при $\lambda \to \infty$ должно получиться:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz \to \frac{1}{2} f(x-0) \\ &\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x+z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz \to \frac{1}{2} f(x+0), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

после чего окажется действительно:

$$J(\lambda, x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

что и докажет теорему Фурье.

Остается еще доказать формулы (8). Ограничимся доказательством первой из этих формул. Пусть $\varepsilon$ — любое заданное малое положительное число. При $z > 1$ множитель $\frac{\sin \lambda z}{z}$ по абсолютной величине меньше единицы при любом вещественном $\lambda$, а функция $f(x-z)$ по условию абсолютно интегрируема в промежутке $(0, \infty)$. Мы можем поэтому найти такое число $N > 1$, что при всяком $\lambda$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_N^\infty |f(x-2z)| \, dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассматривая интеграл Дирихле в конечном промежутке

$$\frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz,$$

можем утверждать, что он стремится к $\frac{1}{2} f(x-0)$ при $\lambda \to \infty$, т. е. при всех достаточно больших $\lambda$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем очевидно:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) =$$

$$= \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^N f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right] + \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz,$$

откуда, в силу последних неравенств, при всех достаточно больших $\lambda$ будем иметь:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x-2z) \frac{\sin \lambda z}{z} dz - \frac{1}{2} f(x-0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольной малости $\varepsilon$ это и дает первую из формул (8). Вторая доказывается буквально так же.

Формула (2) может быть преобразована, если функция $f(x)$ четная или нечетная.

В самом деле, раскрывая $\cos\alpha(t-x)$, имеем:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\alpha t \cos\alpha x \, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\alpha t \sin\alpha x \, dt \right], \qquad (9)$$

причем оба интеграла по $t$ имеют, очевидно, смысл ввиду абсолютной интегрируемости $f(t)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Если функция $f(t)$ — четная, то функция $f(t)\cos\alpha t$ — четная, а функция $f(t) \sin\alpha t$ — нечетная, и, следовательно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t \, dt = 2\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t \, dt;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t \, dt = 0,$$

так что

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos\alpha x \, d\alpha \int_0^\infty f(t)\cos\alpha t \, dt.$$

Если же функция $f(x)$ — нечетная, то таким же образом получим:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin\alpha x \, d\alpha \int_0^\infty f(t)\sin\alpha t \, dt.$$

Если функция $f(x)$ определена только в промежутке $(0, \infty)$, ее можно продолжить в соседний промежуток $(-\infty, 0)$ четным или нечетным образом и тогда мы для одной и той же функции $f(x)$,

считая ее для простоты непрерывной, получим две формулы:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\quad(x>0),\tag{10}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\quad(x>0).\tag{11}$$

Нужно только помнить, что для первой из них функция $f(x)$, продолжаясь четно, дает непрерывную функцию от $x$, так что первая формула верна и при $x=0$; во второй же формуле, если $f(0)\neq 0$, мы получим разрыв, и правая часть при $x=0$ равняется не $f(0)$, а нулю.

В формуле (9) первое интегрирование совершается по $t$, и, введя две функции

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt;\qquad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt,$$

мы можем переписать формулу (9) в виде

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha,$$

считая для простоты $f(x)$ непрерывной. В этой формуле мы имеем разложение $f(x)$ в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ на гармонические колебания, причем частоты $\alpha$ этих колебаний непрерывно меняются от 0 до $+\infty$, а функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ дают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты $\alpha$. Для конечного промежутка $(-l, l)$ мы имели частоты $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$, образующие арифметическую прогрессию.

Если в формуле (10) положить

$$f_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt,\tag{$12_1$}$$

то ее можно переписать в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha.\tag{$12_2$}$$

В этих двух формулах $f(x)$ и $f_1(\alpha)$ совершенно одинаково выражаются одна через другую.

Если считать в формуле $(12_2)$ $f(x)$ — заданной и $f_1(\alpha)$ — искомой, то формула $(12_2)$ представляет собою так называемое *интегральное уравнение* для $f_1(\alpha)$, поскольку эта функция входит под знак интеграла (интегральное уравнение Фурье). Формула $(12_1)$ дает решение

этого интегрального уравнения. Совершенно так же формулу (11) мы можем представить в виде следующих формул:

$$f_1(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt, \qquad (13_1)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_1(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (13_2)$$

Примеры. 1. В формуле (10) положим:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant x<1\\ 0 & \text{ » } \ x>1.\end{cases}$$

Мы получим тогда для интеграла, стоящего в правой части равенства:

$$\int_0^\infty \cos\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt=\int_0^\infty\cos\alpha x\,d\alpha\int_0^1\cos\alpha t\,dt=\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

и следовательно

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{2} & \text{ » } \ x=1\\ 0 & \text{ » } \ x>1.\end{cases}$$

2. Полагая в формуле (11)

$$f(x)=e^{-\beta x}\quad(\beta>0),$$

мы в правой части имеем интеграл:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin\alpha x\,d\alpha\int_0^\infty e^{-\beta t}\sin\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha$$

и получаем таким образом:

$$\int_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{-\beta x} & \text{при } x>0\\ 0 & \text{ » } \ x=0.\end{cases}$$

3. Точно так же, полагая в формуле (10)

$$f(x)=e^{-\beta x}\quad(\beta>0),$$

найдем:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+\beta^2}\,d\alpha=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}.$$

Часто формулу Фурье пишут в комплексной форме

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha(t-x)i}\,dt. \qquad (14)$$

Нетрудно получить эту формулу из формулы (2). Заменяя под интегралом

$$e^{\alpha(t-x)i}=\cos\alpha(t-x)+i\sin\alpha(t-x),$$

получим два интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt \quad\text{и}\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt.$$

Во втором из них переменная $\alpha$ входит под знак синуса, так что подинтегральная функция есть нечетная функция от $\alpha$ и, следовательно, интегрируя по $\alpha$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, мы получим 0. Наоборот, в первом интеграле стоит четная функция от $\alpha$, и интегрирование по $\alpha$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ можно заменить интегрированием в промежутке $(0, \infty)$, приписав к интегралу множитель 2. Отсюда видно, что формула (14) равносильна формуле (2).

Считая $f(x)$ непрерывной, перепишем (14) в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha xi}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha ti}\,dt,$$

откуда видно, что, как и для формул (10) и (11), мы можем переписать ее в виде следующих двух формул:

$$f_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha ti}\,dt, \tag{15$_1$}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\alpha)\,e^{-\alpha xi}\,d\alpha. \tag{15$_2$}$$

Сделаем одно замечание по поводу интеграла Фурье в комплексной форме. Мы не можем утверждать, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt$$

с бесконечными пределами по отношению к переменной $\alpha$ имеет обычный смысл [82]. Мы можем лишь утверждать, что при любом конечном положительном значении $M$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha(t-x)\,dt=0,$$

и, следовательно, строго говоря, формулу Фурье в комплексной форме мы должны записывать в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{+M}e^{-\alpha xi}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{\alpha ti}\,dt.$$

В данном случае нижний предел стремится к $(-\infty)$, а верхний — к $(+\infty)$, имея одинаковые абсолютные значения. Для существования несобственного интеграла в обычном смысле необходимо, чтобы предел существовал при любом законе стремления нижнего предела к $(-\infty)$ и верхнего к $(+\infty)$.

**161. Ряды Фурье в комплексной форме.** Ряд Фурье можно представить в комплексной форме так же, как это мы только что сделали с интегралом Фурье.

Напомним формулы из [146]:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right);$$
$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi;\qquad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{16}$$

Покажем, что формулы эти равносильны следующим:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}};\qquad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)e^{-i\frac{n\pi\xi}{l}}\,d\xi. \tag{17}$$

Здесь значок $n$ принимает не только целые положительные, но и отрицательные значения. Определим отдельно $c_0$, $c_k$ и $c_{-k}$, где $k$ — целое положительное число. Согласно (17) и (16) имеем:

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\,d\xi=\frac{a_0}{2},$$

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}-i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k-ib_k}{2},$$

$$c_{-k}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\left(\cos\frac{k\pi\xi}{l}+i\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right)d\xi=\frac{a_k+ib_k}{2}.$$

Подставляя в ряд (17) и суммируя отдельно по положительным и отрицательным значкам, получим:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}.$$

Слагаемые двух написанных сумм при одинаковых $k$ суть мнимые сопряженные величины. Соединяя их в одно слагаемое, получим вещественную величину:

$$\frac{a_k-ib_k}{2}e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}=a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

и предыдущее выражение для $f(x)$ совпадает с рядом Фурье (16), откуда и следует равносильность (17) и (16).

**162. Кратные ряды Фурье.** Ряды и интегралы Фурье могут служить и для представления функций от двух и большего числа независимых переменных. Рассмотрим, например, функцию $f(x, y)$ периодическую, периода $2l$ относительно $x$ и периода $2m$ относительно $y$. Рассматривая функцию $f(x, y)$ как функцию от $x$, мы имеем [161]:

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} c_\sigma(y) e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}}, \tag{18}$$

где

$$c_\sigma(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(\xi, y) e^{-i\frac{\sigma\pi\xi}{l}} d\xi.$$

Функция $c_\sigma(y)$, в свою очередь, может быть разложена в ряд вида

$$c_\sigma(y) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\frac{\tau\pi y}{m}},$$

где

$$c_{\sigma\tau} = \frac{1}{2m}\int_{-m}^{+m} c_\sigma(\eta) e^{-i\frac{\tau\pi\eta}{m}} d\eta = \frac{1}{4lm}\int_{-l}^{+l}\int_{-m}^{+m} f(\xi, \eta) e^{-i\pi\left(\frac{\sigma\xi}{l}+\frac{\tau\eta}{m}\right)} d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

Подставив полученное выражение для $c_\sigma(y)$ в формулу (18), получим:

$$f(x, y) = \sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\frac{\tau\pi y}{m}}\right) e^{i\frac{\sigma\pi x}{l}},$$

откуда, раскрывая скобки, имеем формулу:

$$f(x, y) = \sum_{\sigma, \tau=-\infty}^{\infty} c_{\sigma\tau} e^{i\pi\left(\frac{\sigma x}{l}+\frac{\tau y}{m}\right)}, \tag{20}$$

которая обобщает ряд Фурье на случай двух переменных.

Таким же образом для периодической функции $f(x_1, x_2, x_3)$ от трех независимых переменных периода $2\omega_1$ относительно $x_1$, периода $2\omega_2$ относительно $x_2$ и периода $2\omega_3$ относительно $x_3$, мы имеем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3=-\infty}^{+\infty} c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} e^{i\pi\left(\frac{\sigma_1 x_1}{\omega_1}+\frac{\sigma_2 x_2}{\omega_2}+\frac{\sigma_3 x_3}{\omega_3}\right)}, \tag{21}$$

где

$$c_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{1}{8\omega_1\omega_2\omega_3}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}\int_{-\omega_2}^{\omega_2}\int_{-\omega_3}^{\omega_3} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-i\pi\left(\frac{\sigma_1\xi_1}{\omega_1}+\frac{\sigma_2\xi_2}{\omega_2}+\frac{\sigma_3\xi_3}{\omega_3}\right)} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3. \tag{22}$$

Выделяя вещественную часть в формулах (20) или (21), получим разложение в ряд Фурье в вещественной форме.

Ряд (20) при $l = m = \pi$ будет при этом иметь вид:

$$f(x, y) = \sum_{n, m=0}^{\infty} (a_{n, m}^{(1)} \cos nx \cos my + a_{n, m}^{(2)} \cos nx \sin my + \\ + a_{n, m}^{(3)} \sin nx \cos my + a_{n, m}^{(4)} \sin nx \sin my).$$

Мы не выписываем выражений для коэффициентов и не приводим исследованных условий разложимости функции $f(x, y)$ в ряд Фурье. Укажем лишь одно достаточное условие разложимости в некоторой точке $(x_0, y_0)$: 1) всюду существуют и ограничены частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$; 2) в окрестности точки $(x_0, y_0)$ существует смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, которая непрерывна в точке $(x_0, y_0)$. Формула Фурье для функции двух переменных имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{i[\alpha_1(\xi - x) + \alpha_2(\eta - y)]} d\eta, \quad (23)$$

причем интегрирование по $\alpha_1$ и $\alpha_2$ надо понимать так, как это указано в конце [**160**]. В вещественной форме будем иметь

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{0}^{\infty} d\alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos \alpha_1 (\xi - x) \cos \alpha_2 (\eta - y) d\eta. \quad (24)$$

Эта формула имеет место, если функция $f(x, y)$, определенная на всей плоскости, непрерывна, имеет частные производные первого порядка, при любом фиксированном $y$ абсолютно интегрируема по $x$ на промежутке $-\infty < x < +\infty$ и при любом фиксированном $x$ абсолютно интегрируема по $y$ на промежутке $-\infty < y < +\infty$.

Если, например, функция $f(x, y)$ есть четная функция от $x$ и $y$, то вместо формулы (24) можно писать:

$$f(x, y) = \\ = \frac{4}{\pi^2} \int_{0}^{\infty} \cos \alpha_1 x \, d\alpha_1 \int_{0}^{\infty} \cos \alpha_1 \xi \, d\xi \int_{0}^{\infty} \cos \alpha_2 \eta \, d\alpha_2 \int_{0}^{\infty} f(\xi, \eta) \cos \alpha_2 \eta \, d\eta. \quad (25)$$

Аналогичным образом может быть написана формула Фурье и для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ любого числа независимых переменных.

---

ГЛАВА VII

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## § 17. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

**163. Уравнение колебаний струны.** Вопрос об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными принадлежит к наиболее трудным и обширным отделам анализа, и здесь мы ограничимся рассмотрением основных задач из указанной области. Настоящий параграф мы посвятим задачам, связанным с так называемым волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\Delta u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u.$$

К этому уравнению мы пришли в [**116**] и [**118**] при рассмотрении звуковых и электромагнитных колебаний. Положим, что $u$ не зависит от $y$ и $z$, т. е. что $u$ имеет одинаковое значение во всех точках любой плоскости, перпендикулярной оси $X$. В этом случае волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

и в таких случаях говорят обычно, что имеется плоская волна. Мы покажем сейчас, что такое же уравнение получается при рассмотрении малых поперечных колебаний натянутой однородной струны.

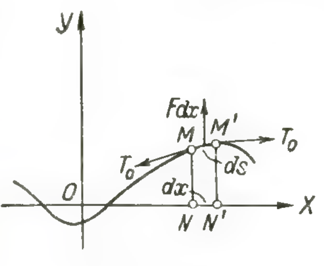
Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться. Допустим, что она находится под действием сильного натяжения $T_0$ и в состоянии равновесия без внешних сил направлена по оси $X$ (черт. 127). Если мы выведем ее из положения равновесия и, кроме того, подвергнем действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться, причем точка струны, занимавшая при равновесии положение $N$ с абсциссой $x$, к моменту $t$ займет положение $M$. Мы ограничимся рассмотрением только *поперечных ко-*

*лебаний*, предполагая, что все движение происходит в одной плоскости и что точки струны движутся перпендикулярно оси $X$. Смещение $\overline{NM}$ точек струны мы обозначим через $u$. Это смещение и будет искомой функцией двух независимых переменных $x$ и $t$.

Выделим элемент струны $MM'$, который при равновесии занимал положение $NN'$. Считая деформации малыми, мы будем пренебрегать квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Пусть $\alpha$ — острый угол, образованный направлением касательной к струне с осью $X$. Мы имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Обозначим через $F$ силу, действующую на струну перпендикулярно к оси $X$ и рассчитанную на единицу длины. На рассматриваемый элемент $MM'$ действуют следующие силы: натяжение в точке $M'$, направленное по касательной в точке $M'$, причем оно образует острый угол с осью $X$, натяжение в точке $M$, направленное по касательной в точке $M$ и образующее тупой угол с осью $X$, и сила $F\,dx$, направленная по оси $u$. Ввиду сделанного предположения малости деформаций мы считаем оба упомянутых выше натяжения равными по величине натяжению $T_0$. Положим сначала, что мы имеем равновесие струны под действием упомянутой силы $F$. Проектируя на ось $u$, будем иметь следующее условие равновесия:



Черт. 127.

$$T_0 \sin\alpha' - T_0 \sin\alpha + F\,dx = 0, \tag{1}$$

где $\alpha'$ — значение упомянутого угла $\alpha$ в точке $M'$, т. е.

$$\sin\alpha' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}; \quad \sin\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M},$$

и, следовательно:

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right] + F\,dx = 0. \tag{2}$$

Разность, стоящая в квадратных скобках, выражает приращение функции $\frac{\partial u}{\partial x}$, вызванное изменением $x$ на $dx$. Заменяя это приращение дифференциалом, получим [**I, 50**]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

Подставляя в (2) и сокращая на $dx$, будем иметь *уравнение равновесия струны*:

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = 0. \tag{3}$$

Для получения *уравнения движения* нам достаточно, по принципу Даламбера, к внешней силе добавить еще *силу инерции*, которую мы получим следующим образом: скорость точки $M$ есть очевидно $\frac{\partial u}{\partial t}$, а ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, и поэтому сила инерции элемента $\overline{MM'}$, равная с обратным знаком взятому произведению ускорения на массу, будет

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho \, dx,$$

где $\rho$ есть линейная плотность струны, т. е. масса единицы длины, а сила инерции, рассчитанная на единицу длины, будет

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

причем мы считаем $\rho$ постоянной величиной.

Итак, уравнение движения мы получим, заменяя в уравнении (3) $F$ на $F - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, что дает

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Разделив на $\rho$ и положив

$$\frac{T_0}{\rho} = a^2, \quad \frac{F}{\rho} = f, \tag{4}$$

мы получаем *уравнение вынужденных поперечных колебаний струны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f. \tag{5}$$

Если внешняя сила отсутствует, мы имеем $f = 0$ и получаем *уравнение свободных колебаний струны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

В четвертом томе мы укажем другой вывод уравнения (5) на основе принципа Гамильтона.

Выше мы предполагали, что внешняя сила распределена по всей струне непрерывно; но иногда приходится иметь дело с силой $P$, сосредоточенной в одной точке $C$. Этот случай можно рассматривать, либо как предельный случай предыдущего, считая, что сила действует на бесконечно малый элемент длины $\varepsilon$ около точки $C$, но так, что произведение ее величины на $\varepsilon$ стремится к конечному

пределу, отличному от нуля, при $\varepsilon \to 0$, либо же непосредственно, прилагая уравнение (2) к элементу $\overline{MM'}$ около точки $C$ и заменяя там $F\,dx$ на $P$. Заметим при этом, что мы не добавляем к $F\,dx$ силы инерции $\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\,dx\right)$, так как считаем, что она стремится к нулю при $dx \to 0$.

Считая, что концы элемента приближаются к точке $C$, и обозначив предельные значения, к которым стремится $\frac{\partial u}{\partial x}$, когда мы приближаемся к точке $C$ справа или слева, соответственно через

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-,$$

мы получаем в пределе из уравнения (2)

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-\right] = -P. \tag{7}$$

Мы видим, таким образом, что в точке $C$ действия сосредоточенной силы струна имеет угловую точку, т. е. точку с различными направлениями касательной слева и справа.

Как и вообще в динамике, одного уравнения движения (5) недостаточно для полного определения движения струны: нужно еще задать ее состояние в начальный момент $t = 0$, т. е. положение ее точек $u$ и их скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$, как известные функции от $x$:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{8}$$

Эти условия, которым должна удовлетворять искомая функция $u$ при $t = 0$, называются *начальными условиями*.

Теоретически можно рассматривать бесконечную струну, и в этом случае для нахождения решения достаточно уравнения (5) и условий (8), причем $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть заданы во всем бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. Этот случай может соответствовать рассмотрению плоских волн в безграничном пространстве. Как мы увидим в дальнейшем, полученные для бесконечной струны результаты дадут нам картину распространения возмущений и в ограниченной струне до того момента времени, когда в рассматриваемую точку придут возмущения, отраженные от концов струны.

Но если струна *ограничена с одной или с обеих сторон* в точках $x = 0$ и $x = l$, то нужно указать, что делается на ее концах. Пусть, например, конец струны $x = 0$ закреплен. В этом случае мы должны иметь

$$u\,|_{x=0} = 0. \tag{9}$$

Если закреплен и конец $x=l$, то мы получаем еще

$$u\big|_{x=l}=0, \tag{$9_1$}$$

и эти условия должны быть выполнены при всяком $t$.

Но концы струны могут быть не закреплены, а двигаться заданным образом. Тогда ординаты этих точек струны нужно считать заданными функциями от времени, т. е. положить

$$u\big|_{x=0}=\chi_1(t); \quad u\big|_{x=l}=\chi_2(t). \tag{10}$$

Как бы то ни было, если струна ограничена с одной или с обеих сторон, для каждого ее конца должно быть задано условие, которое называется *предельным условием.*

Итак, мы видим, что *для решения конкретной физической задачи не меньшее значение, чем само уравнение движения, имеют дополнительные начальные и предельные условия*, и что нас интересует не столько нахождение каких-нибудь решений или даже общего решения уравнения движения, сколько нахождение именно тех решений, которые удовлетворяют поставленным начальным и предельным условиям.

**164. Решение Даламбера.** В случае свободных колебаний бесконечной струны искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворить уравнению (6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях (8)

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

причем ввиду неограниченности струны функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Можно найти самое общее решение уравнения (6), и притом в такой форме, что легко можно будет удовлетворить и условиям (8).

Для этого преобразуем уравнение (9) к новым независимым переменным:

$$\xi=x-at, \quad \eta=x+at$$

или

$$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi); \quad t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi).$$

Считая $u$ зависящим от $x$ и $t$ через посредство $\xi$ и $\eta$ и применяя правило дифференцирования сложных функций, выразим производные по прежним переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

Применяя эти же формулы еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta},$$

и уравнение (6) оказывается равносильным следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \tag{11}$$

Переписав уравнение (11) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0,$$

заключаем, что $\frac{\partial u}{\partial\xi}$ не зависит от $\eta$, т. е. является функцией только от $\xi$. Положив

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\theta(\xi),$$

получаем, интегрируя:

$$u=\int\theta(\xi)\,d\xi+\theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ есть произвольная функция от $\eta$ („постоянная" при интегрировании по $\xi$ может зависеть от $\eta$). Первое слагаемое можно считать здесь произвольной функцией от $\xi$, ибо $\theta(\xi)$ есть произвольная функция $\xi$, и, обозначив ее через $\theta_1(\xi)$, имеем:

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta),$$

или, переходя к старым переменным $(x,\ t)$,

$$u(x,\ t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{12}$$

где $\theta_1$ и $\theta_2$ — произвольные функции своих аргументов. Это самое общее решение уравнения (6) называется решением Даламбера; оно содержит две произвольные функции $\theta_1$ и $\theta_2$. Для их определения мы воспользуемся начальными условиями (8), которые, ввиду равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left[-\theta_1'(x-at)+\theta_2'(x+at)\right]$$

и равенства (12), дают:

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\quad -\theta_1'(x)+\theta_2'(x)=\frac{\varphi_1(x)}{a} \tag{13}$$

или, интегрируя и меняя знак на обратный:

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz+C.$$

Положив $x=0$, определяем произвольную постоянную $C$:

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0).$$

Не ограничивая общности, можем считать $C=0$, т. е.

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0, \tag{14}$$

ибо, если бы оказалось $C\neq 0$, то, введя вместо функций $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ функции

$$\theta_1(x)-\frac{C}{2},\quad \theta_2(x)+\frac{C}{2},$$

мы, не меняя равенств (13), удовлетворили бы и (14).

Итак, мы имеем:

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\quad \theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz. \tag{15}$$

Отсюда мы без труда определяем функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$:

$$\theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz;\quad \theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz. \tag{16}$$

Подставив полученные выражения в формулу (12), находим:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)\,dz+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)\,dz,$$

или окончательно:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\,dz. \tag{17}$$

Формула (17) дает, очевидно, дважды непрерывно дифференцируемое решение (так называемое классическое решение) задачи, если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывную производную $\varphi_1'(x)$ при $-\infty<x<+\infty$. Однако нередко приходится иметь дело с задачами, в которых начальное возмущение задается функциями, не удовлетворяющими этим условиям. Например, если струна в начальный момент имеет форму ломаной линии, то $\varphi(x)$ не имеет определенной производной в вершине ломаной. Тем не менее разумно считать, что формула (17) дает решение задачи, хотя функция $u(x,\ t)$ и не всюду имеет непрерывные производные до второго порядка. В этом случае говорят, что задача имеет так называемое обобщенное решение. Теория обобщенных решений будет изложена в четвертом томе.

**165. Частные случаи.** Формула (17) дает полное решение поставленной задачи. Для лучшего уяснения полученного решения разберем различные частные случаи.

1. *Начальный импульс равен нулю,* т. е. начальные скорости точек струны равны нулю. При этом условии $\varphi_1(x)=0$, и формула (17) дает:

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \tag{18}$$

в то время как в начальный момент

$$u\,|_{t=0}=u(x, 0)=\varphi(x).$$

Каков физический смысл решения (18)? Числитель выражения (18) состоит из двух слагаемых, и мы остановимся на первом: $\varphi(x-at)$.

Положим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t=0$ из точки $x=c$ струны, передвигается в положительном направлении оси $OX$ со скоростью $a$, т. е. его абсцисса меняется по формуле: $x=c+at$ или $x-at=c$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемое формулой $u=\varphi(x-at)$, будет оставаться все время постоянным, а именно равным $\varphi(c)$. Самое явление, определяемое функцией $u=\varphi(x-at)$, называется *распространением прямой волны.* Возвратясь к формуле Даламбера (12), мы можем сказать, что слагаемое $\theta_1(x-at)$ дает прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси $OX$ со скоростью $a$. Точно так же второе слагаемое $\theta_2(x+at)$ определяет такое колебание струны, при котором возмущение распространяется со скоростью $a$ в отрицательном направлении оси $OX$ в том смысле, что в момент $t$ точка с абсциссой $c-at$ будет иметь то же отклонение $u$, которое имела точка $x=c$ при $t=0$. Соответствующее явление назовем *распространением обратной волны.*

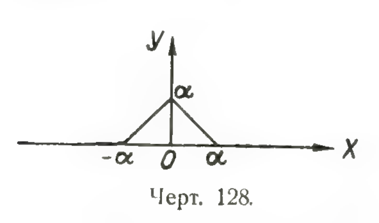
*Величина $a$ есть скорость распространения возмущений или колебаний (поперечных).* Формула (4) показывает, что

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \tag{19}$$

т. е. *что скорость распространения поперечных колебаний обратно пропорциональна корню квадратному из плотности струны и прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения.*

Указанное выше решение (18), которое является средним арифметическим прямой волны $\varphi(x-at)$ и такой же обратной волны $\varphi(x+at)$, может быть получено следующим образом: строим два одинаковых экземпляра графика $u=\varphi(x)$ струны при $t=0$ и вообразим, что они налегают друг на друга, а затем раздвигаются в обе стороны со скоростью $a$. График струны в момент $t$ получится как средняя арифметическая раздвинутых таким образом графиков, т. е. этот график струны в момент $t$ будет делить пополам отрезки ординат между раздвинутыми графиками.

Пусть, например, в начальный момент струна имеет вид, изображенный на черт. 128:



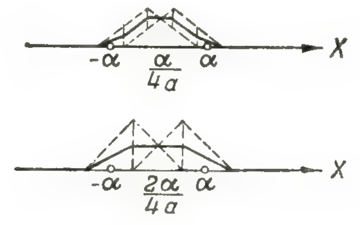

Черт. 128.

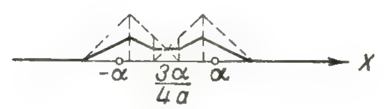
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ вне промежутка } (-\alpha, \alpha), \\ x+\alpha, \text{ при } -\alpha \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+\alpha, \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \alpha. \end{cases}$$

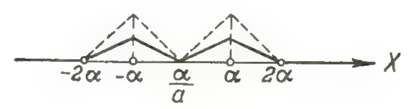
На черт. 129 изображены графики струны в моменты

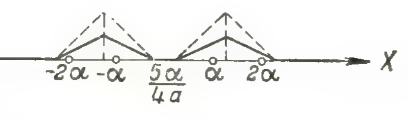
$$t = \frac{\alpha}{4a}, \frac{2\alpha}{4a}, \frac{3\alpha}{4a}, \frac{\alpha}{a}, \frac{5\alpha}{4a}, \frac{2\alpha}{a}.$$

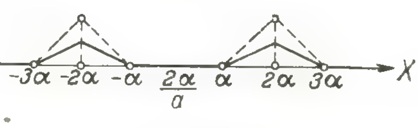
Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси: одну для переменной $x$ и другую для $t$. На черт. 130 нами отмечена одна ось $X$. Всякая точка нашей плоскости определяется двумя координатами $(x, t)$, т. е. такая точка характеризует определенную точку струны $x$ в определенный момент времени $t$. Нетрудно при этом определить графически те точки струны, начальные возмущения которых дошли в момент $t_0$ до точки $x_0$.



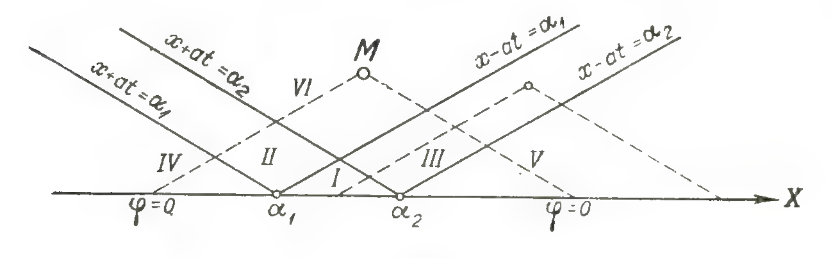




-3α -2α -α 2α/a α 2α 3α X

Черт. 129.




Черт. 130.

Это будут, согласно предыдущему, точки с абсциссами $x_0 \pm at_0$, так как $a$ есть скорость распространения колебаний. Для нахожде-

ния их на оси $X$ достаточно провести через точку $(x_0, t_0)$ две прямые:

$$\left.\begin{aligned} x - at = x_0 - at_0, \\ x + at = x_0 + at_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и в пересечении их с осью $OX$ и получатся искомые точки. Прямые (20) называются *характеристиками точки* $(x_0, t_0)$. Вдоль первой из этих прямых $\varphi(x - at)$ сохраняет постоянное значение, т. е. эта прямая дает те значения $(x, t)$, при которых прямая волна дает то же отклонение, что и при значениях $(x_0, t_0)$. Вторая из прямых (20) играет ту же роль для обратной волны. Можно сказать коротко, что *возмущения распространяются по характеристикам*.

Применяя указанное построение, можем обнаружить следующие факты.

Пусть начальное возмущение имелось лишь в некотором промежутке $(\alpha_1, \alpha_2)$ струны (черт. 130), т. е. $\varphi(x) = 0$ вне этого промежутка. Ограничиваясь лишь верхней полуплоскостью $(x, t)$, т. е. $t > 0$, которая одна имеет физический смысл, проведем характеристики точек $\alpha_1$ и $\alpha_2$ оси $OX$, начерченные сплошными линиями. Эти характеристики разобьют всю полуплоскость на *шесть* областей. Область (I) соответствует таким точкам, до которых в данный момент доходит как прямая, так и обратные волны. Область (II) соответствует тем точкам, до которых в данный момент доходит только обратная волна; в область же (III), наоборот, доходит только прямая волна. Точки областей (IV) и (V) таковы, что к данному моменту до них возмущение еще не дошло. Наконец, до точек области (VI) возмущение успело дойти и пройти через них, и в данный момент они находятся в состоянии покоя. Это ясно из того, что если через какую-нибудь из точек $M$ этой области провести характеристики, то они пересекут ось $OX$ в некоторой точке $x = c$ вне отрезка начального возмущения, и, следовательно, значения $\varphi(x \pm at) = \varphi(c)$ будут равны нулю. Кроме того, если провести через $M$ прямую, перпендикулярную оси $OX$, то нижняя часть этой прямой, которой соответствуют при неизменном $x$ более ранние моменты времени, пересечет по крайней мере одну из областей (I), (II), (III), а верхняя часть этой прямой, которой соответствуют более поздние моменты времени, будет вся находиться в области (VI). Этим замечательным свойством — приходить к первоначальному состоянию после прохождения волн — струна обладает не при всяком начальном возмущении, как будет видно ниже.

2. *Начальное смещение равно нулю* и имеется только начальный импульс.

Мы получим тогда решение

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\, dz. \tag{21}$$

Если обозначим какой-нибудь неопределенный интеграл функции $\frac{1}{2a}\varphi_1(x)$ через $\Phi_1(x)$, то получим:

$$u(x, t) = \Phi_1(x+at) - \Phi_1(x-at), \tag{22}$$

т. е. также будем иметь дело с распространением прямой и обратной волны. Если начальное возмущение ограничивалось лишь промежутком $(\alpha_1, \alpha_2)$, мы получаем то же построение, что и в случае 1, с тем, однако, важным различием, что в области (VI) смещение будет уже отлично от нуля и будет выражаться интегралом

$$\frac{1}{2a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(z)\,dz. \tag{23}$$

Действительно, для точек области (VI), по самому построению этой области, мы имеем $x+at > \alpha_2$ и $x-at < \alpha_1$, т. е. в формуле (21) интегрирование надо производить по промежутку, заключающему $(\alpha_1, \alpha_2)$ внутри себя. Но по условию вне $(\alpha_1, \alpha_2)$ функция $\varphi_1(z)$ равна нулю, так что остается интеграл лишь по $(\alpha_1, \alpha_2)$, и мы получаем для $u(x, t)$ выражение (23), которое представляет собою некоторую постоянную.

Таким образом действие начального импульса приводится к тому, что с течением времени точки струны будут сдвигаться на отрезок, длина которого выражается интегралом (23), и оставаться без движения в этом новом положении.

Можно истолковать еще формулу (21) следующим образом. Пусть точка $x$ лежит правее промежутка $(\alpha_1, \alpha_2)$, т. е. $x > \alpha_2$. При $t = 0$ промежуток интегрирования $(x-at, x+at)$ вырождается в точку $x$, а затем, при увеличении $t$, он расширяется в обе стороны со скоростью $a$. При $t < \frac{x-\alpha_2}{a}$ он не будет иметь общих точек с $(\alpha_1, \alpha_2)$, функция $\varphi_1(z)$ будет в нем равна нулю, и формула (21) даст $u(x, t) = 0$, т. е. покой в точке $x$. Начиная с момента $t = \frac{x-\alpha_2}{a}$, промежуток $(x-at, x+at)$ будет налегать на промежуток $(\alpha_1, \alpha_2)$, в котором $\varphi_1(z)$ отлично от нуля, и точка $x$ начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку $x$). Наконец, при $t > \frac{x-\alpha_1}{a}$ промежуток $(x-at, x+at)$ будет содержать целиком промежуток $(\alpha_1, \alpha_2)$, интегрирование по промежутку $(x-at, x+at)$ будет сводиться к интегрированию по $(\alpha_1, \alpha_2)$, так как вне этого последнего промежутка $\varphi_1(z)$ по условию обращается в нуль, т. е. при $t > \frac{x-\alpha_1}{a}$ мы имеем постоянное значение $u(x, t)$, определяемое выражением (23). Момент $t = \frac{x-\alpha_1}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку $x$.

Сделаем некоторые замечания по поводу общего случая. Отметим, что в общем случае может оказаться, что прямая или обратная волна вовсе отсутствует. Действительно, положим, например, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, входящие в начальные условия, удовлетворяют соотношению:

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int^{x}\varphi_1(z)\,dz=0. \tag{24}$$

При этом, в силу второй из формул (16), функция $\theta_2(x)$ будет тождественно равна нулю, и в общем решении (12) обратная волна будет отсутствовать. Если в правой части (24) мы вместо нуля поставим постоянную, то $\theta_2(x)$ обратится в постоянную, а в формуле (12) это постоянное слагаемое можно отнести к $\theta_1(x-at)$, т. е. обратная волна также будет отсутствовать. Вернемся к примеру, рассмотренному нами в случае 1. Чертеж 128 дает график начального отклонения (начальная скорость равна повсюду нулю). Последний из черт. 129 дает график струны в некоторый момент $t=t_0$, состоящий из двух отдельных кусков. Правый кусок, соответствующий промежутку $(\alpha, 3\alpha)$, будет передвигаться направо, а левый кусок — налево со скоростью $a$. Но мы можем описывать дальнейшие явления при $t>t_0$, приняв момент $t=t_0$ за начальный момент, подсчитав для этого момента отклонения $u$ и скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ и применяя общую формулу (17), в которой надо только в правой части заменить $t$ на $(t-t_0)$, так как $t_0$ принято за начальный момент времени. В данном случае начальные условия будут отличны от нуля только на промежутках $(-3\alpha, -\alpha)$ и $(\alpha, 3\alpha)$. В общем случае возмущения на каждом из этих промежутков дали бы и прямую и обратную волны. Но в данном случае, как мы видели выше, возмущения, например на промежутке $(\alpha, 3\alpha)$, дают только прямую волну. Это происходит потому, что на этом промежутке, кроме начальных отклонений, изображенных на последнем из черт. 129, возникнут в результате колебаний такие скорости при $t=t_0$, что обратная волна будет отсутствовать. Совершенно так же возмущение на участке $(-3\alpha, -\alpha)$ не даст прямой волны. Это явление соответствует одной из формулировок принципа Гюйгенса.

**166. Ограниченная струна.** Пусть имеется конечная струна, закрепленная на концах, и пусть абсциссы концов струны будут $x=0$ и $x=l$.

Кроме начальных условий (8)

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы при $0 < x < l$, нужно удовлетворить еще предельным условиям:

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=l} = 0. \tag{25}$$

Решение Даламбера (12)

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{12}$$

конечно, годится в этом случае, но определение функций $\theta_1$ и $\theta_2$ по формулам (16)

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz; \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, а следовательно и $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, определены лишь в промежутке $(0, l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $(x \pm at)$ в формуле (12) могут лежать и вне этого промежутка.

Стало быть, для возможности применения способа характеристик нужно продолжить функции $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0, l)$. С точки зрения физической это продолжение сводится к определению такого начального возмущения *бесконечной* струны, чтобы движение ее участка $(0, l)$ было то же, как если бы он был закреплен в концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Подставляя в правую часть (12) $x = 0$ и $x = l$ и приравнивая результат нулю, выразим предельные условия в виде

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(-at) + \theta_2(at) &= 0; \\ \theta_1(l - at) + \theta_2(l + at) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

или, обозначив переменный аргумент $at$ просто через $x$,

$$\left.\begin{aligned} \theta_1(-x) &= -\theta_2(x); \\ \theta_2(l + x) &= -\theta_1(l - x). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Когда $x$ изменяется в промежутке $(0, l)$, аргумент $(l - x)$ изменяется в этом же промежутке, и правые части равенств (28) нам известны. Но при этом аргументы $(-x)$ и $(l + x)$ изменяются соответственно в промежутках $(-l, 0)$ и $(l, 2l)$, и второе из уравнений (28) дает нам значения $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$, а первое дает $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$. Далее, при изменении $x$ в промежутке $(l, 2l)$ аргумент $(l - x)$ изменяется в промежутке $(-l, 0)$, и правые части равенств (28) нам известны на основании предыдущего вычисления.

При этом аргументы $(-x)$ и $(l+x)$ изменяются в промежутках $(-2l, -l)$ и $(2l, 3l)$, так что формулы (28) дают нам $\theta_2(x)$ в промежутке $(2l, 3l)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(-2l, -l)$. Продолжая так и дальше, мы убедимся в том, что формулы (28) дают нам определенные значения для функции $\theta_1(x)$ при $x \leqslant 0$ и $\theta_2(x)$ при $x \geqslant l$, что нам и надо для применения формулы (12) при $t > 0$. Совершенно так же, если менять $x$ в промежутке $(-l, 0)$, то левые части формул (28) известны, и мы получаем $\theta_2(x)$ в промежутке $(-l, 0)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Меняя затем $x$ в промежутке $(-2l, -l)$, получим $\theta_2(x)$ в промежутке $(-2l, -l)$ и $\theta_1(x)$ в промежутке $(2l, 3l)$ и т. д., т. е. формулы (28) дают нам определенные значения $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ при всех вещественных $x$.

Если мы заменим во втором из уравнений (28) $x$ на $(l+x)$ и воспользуемся первым уравнением, то получим:

$$\theta_2(x+2l) = -\theta_1(-x) = \theta_2(x),$$

т. е. оказывается, что функция $\theta_2(x)$ имеет период $2l$. После этого первое из уравнений (28) покажет нам, что и функция $\theta_1(x)$ имеет период $2l$. Из этого вытекает, что для фактического знания $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ при всех вещественных $x$ нам достаточно провести только первую из описанных выше операций продолжения этих функций, т. е. достаточно изменять $x$ только в промежутке $(0, l)$. Формулы (28) дадут нам $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$ и $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$, т. е. $\theta_1(x)$ будет известно в промежутке $(-l, +l)$, а $\theta_2(x)$ — в промежутке $(0, 2l)$. Остальные значения этих функций получаются из их периодичности.

Определив таким путем функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$, нетрудно продолжить и функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, так как, в силу уравнений (26), мы имеем:

$$\varphi(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x); \quad \frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz = \theta_2(x) - \theta_1(x),$$

т. е.

$$\varphi_1(x) = a\,[\theta_2'(x) - \theta_1'(x)].$$

Заменяя в первом из уравнений (28) $x$ на $(-x)$, а также дифференцируя, получим:

$$\theta_1(x) = -\theta_2(-x); \quad \theta_1'(-x) = \theta_2'(x); \quad \theta_1'(x) = \theta_2'(-x).$$

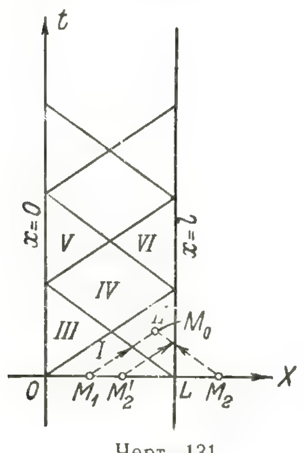
Пользуясь этими соотношениями и первыми из уравнений (28), можем написать:

$$\varphi(-x) = \theta_1(-x) + \theta_2(-x) = -\theta_2(x) - \theta_1(x) = -\varphi(x)$$

$$\varphi_1(-x) = a\,[\theta_2'(-x) - \theta_1'(-x)] = a\,[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = -\varphi_1(x),$$

т. е. для $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ получаем чрезвычайно простой закон продолжения: они продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(-l, 0)$ по закону нечетности, а затем с периодом $2l$. Если при этом мы получим на всей оси $x$ функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ такие, что $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, а $\varphi_1(x)$ — непрерывную производную $\varphi_1'(x)$, то, согласно формуле (17), мы будем иметь дважды непрерывно дифференцируемое решение нашей задачи.

Обращаемся вновь к плоскости $xt$. Ввиду ограниченности струны, надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t>0$, заключающуюся между прямыми $x=0$, $x=l$ (черт. 131). Выясним физический смысл решения (12), в котором функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены уже при всех значениях $x$, как указано выше. Проведя через точки $O$ и $L$ характеристики до встречи с противоположными границами полосы, через полученные точки пересечения опять проводим характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д.




Черт. 131.

Мы разобьем таким образом полосу на области (I), (II), (III), ... Точки области (I) соответствуют тем точкам струны, до которых успели дойти возмущения лишь от внутренних точек, а потому фиктивно добавленные бесконечные части струны здесь на движение не влияют. В точках вне области (II) мы имеем уже возмущение, дошедшее от фиктивной части струны; возьмем, например, точку $M_0(x_0, t_0)$ в области (II).

Так как

$$u(x_0, t_0) = \theta_1(x_0 - at_0) + \theta_2(x_0 + at_0),$$

то в этой точке имеются две волны: одна — прямая, дошедшая от начально возмущенной точки $M_1$ струны с абсциссой $x = x_0 - at_0$, другая — обратная из точки $M_2$ с абсциссой $x = x_0 + at_0$, причем, в данном случае $M_1$ есть реальная точка из промежутка $(0, l)$, $M_2$ — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что, в силу (28):

$$\theta_2(x_0 + at_0) = \theta_2(l + x_0 + at_0 - l) = -\theta_1(2l - x_0 - at_0),$$

и таким образом обратная волна $\theta_2(x_0 + at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\theta_1(2l - x_0 - at_0)$ от начально возмущенной точки $M_2'(2l - x_0 - at_0)$ (симметричной с $M_2$ относительно точки $L$), кото-

рая дойдя до конца струны $L$ в момент

$$t = \frac{l-(2l-x_0-at_0)}{a} = \frac{x_0+at_0-l}{a},$$

изменила свое направление и знак на обратные и к моменту $t_0$ дошла в таком виде до точки $M_0$; другими словами, *действие закрепленного конца $x=l$ свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.*

То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца $x=0$; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x=0$. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны.

Если бы вместо предельного условия (25) мы, например, в конце $x=l$ имели бы условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\ ^{1)},$$

то вместо второго из уравнений (27) мы получили бы:

$$\theta_1'(l-at)+\theta_2'(l+at)=0,$$

или, заменяя опять $at$ на $x$:

$$\theta_2'(l+x) = -\theta_1'(l-x).$$

Интегрируя это соотношение, имеем очевидно

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x)+C,$$

где $C$ — некоторая постоянная, которую, не ограничивая общности, можно считать равной нулю, в чем предоставляем убедиться читателю. Таким образом мы имеем

$$\theta_2(l+x)=\theta_1(l-x). \qquad (29)$$

Физический смысл этого условия сводится также *к отражению от конца $x=l$, но с сохранением и знака и величины смещения.*

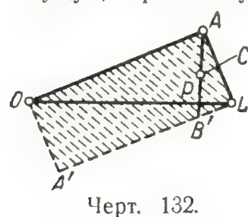
Особенно простой пример применения изложенного выше способа характеристик и отражений дает нам „защепленная струна“, которая в начальный момент была оттянута за одну из ее точек без начальной скорости. Читатель без труда докажет нижеследующий изящный способ определения фигуры струны в любой момент $t$ по ее начальной фигуре.

---

[1]) Оно встречается в теории *продольных колебаний стержней*, которые подчиняются такому же дифференциальному уравнению (5) или (6) с другим физическим значением постоянной $a$. Поставленное условие означает, что конец стержня *свободен.*

На черт. 132 линией $OAL$ изображена начальная форма струны, пунктирной—симметричное ее изображение относительно середины струны $x = \frac{l}{2}$. Опустим на $OL$ перпендикуляр $AP$ до встречи его с прямой $A'L$ в точке $B'$, находим середину $C$ отрезка $AB'$ и определяем таким образом направление $LC$.

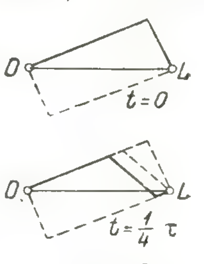
Фигура струны в любой момент получится, если мы будем передвигать секущую, параллельную направлению $\overline{LC}$, от точки $A$ к точке $A'$; в частности в момент $\tau = \frac{l}{a}$ струна займет положение пунктирной ломаной $OA'L$.



Черт. 132.

На черт. 133 изображены последовательные формы, принимаемые струной в моменты:

$$0, \quad \frac{1}{4}\tau, \quad \frac{1}{2}\tau, \quad \frac{3}{4}\tau, \quad \tau.$$



Черт. 133.

**167. Способ Фурье.** Поперечные колебания струны, закрепленной в концах, могут быть трактованы и с помощью рядов Фурье, и хотя в этом частном случае этот способ и не так прост, как предыдущий, мы его изложим, так как он применяется во многих других задачах, к которым способ характеристик не применяется. Напишем еще раз уравнения нашей задачи в другом порядке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{30}$$

$$u\,\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\,\Big|_{x=l} = 0, \tag{31}$$

$$u\,\Big|_{t=0} = \varphi(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{32}$$

Вместо того, чтобы искать общее решение уравнения (30), *будем искать частное его решение в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от $t$, а другая только от $x$*:

$$u = T(t)\,X(x). \tag{33}$$

Подставив это в (30), имеем:

$$X(x)\,T''(t) = a^2 T(t)\,X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

В левой части полученного уравнения стоит функция, зависящая только от $t$, в правой же — только от $x$, и равенство возможно лишь в том случае, если и левая и правая части не зависят ни от $t$, ни от $x$, т. е. представляют собой одну и ту же постоянную.

Обозначим эту постоянную через $(-k^2)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-k^2; \tag{34}$$

откуда получаем два уравнения

$$X''(x)+k^2X(x)=0; \quad T''(t)+a^2k^2T(t)=0. \tag{35}$$

Общие интегралы этих уравнений при $k\neq 0$ будут [**27**]:

$$X(x)=C\cos kx+D\sin kx; \quad T(t)=A\cos akt+B\sin akt,$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные постоянные.

Согласно (33) для $u$ получим:

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)(C\cos kx+D\sin kx). \tag{36}$$

Будем теперь подбирать постоянные так, чтобы удовлетворялись предельные условия (31), т. е. чтобы в выражении (36) множитель, содержащий $x$, обращался в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Это дает:

$$C\cdot 1+D\cdot 0=0; \quad C\cos kl+D\sin kl=0.$$

Из первого уравнения следует $C=0$, и второе дает $D\sin kl=0$. Если считать $D=0$, то, в силу $C=D=0$, решение (36) будет тождественный нуль. Такое решение не представляет для нас интереса. Поэтому мы должны считать $D\neq 0$, но $\sin kl=0$.

Мы получаем таким образом уравнение для определения параметра $k$, который до сих пор оставался совершенно произвольным [1]):

$$\sin kl=0,$$

т. е.

$$k=\pm\frac{\pi}{l}, \quad \pm\frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \quad \pm\frac{n\pi}{l}, \ \ldots \tag{37}$$

Если мы подставим в (36) $k=\frac{n\pi}{l}$ или $k=-\frac{n\pi}{l}$, то разница будет лишь в знаке у синусов, и ввиду наличия произвольных постоянных множителей эти два решения будут по существу одинаковыми. Таким образом из значений (37) для $k$ достаточно взять лишь положительные. Полагая в формуле (36) $C=0$ и обозначая произвольные постоянные $AD$ и $BD$ через $A$ и $B$, получим:

$$u=(A\cos akt+B\sin akt)\sin kx.$$

---

[1]) Если бы мы в уравнении (34) обозначили постоянную через $(+k^2)$ вместо $(-k^2)$, то получили бы $X(x)=Ce^{kx}+De^{-kx}$ и не смогли бы вовсе удовлетворить предельным условиям (31).

Такое же обстоятельство будет иметь место и при $k=0$. Аналогичное замечание относится и к дальнейшим задачам, к которым мы будем применять способ Фурье.

Мы должны еще подставить вместо $k$ одно из значений (37). Подставляя вместо $k$ различные значения, мы можем и постоянные $A$ и $B$ считать различными. Мы получаем, таким образом, бесчисленное множество решений:

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (38)$$

Эти решения удовлетворяют как уравнению (30), так и предельным условиям (31). Заметим теперь, что благодаря линейности и однородности уравнений (30) и (31), если мы имеем решения $u_1$, $u_2$, ..., им удовлетворяющие, то и их сумма будет также им удовлетворять (как и в аналогичном случае обыкновенных линейных однородных уравнений). Мы имеем таким образом следующее решение уравнений (30) и (31):

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (39)$$

Остается подобрать постоянные $A_n$ и $B_n$ так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (32). Продифференцируем решение (39) по $t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi a}{l} A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{n\pi a}{l} B_n \cos \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (40)$$

Полагая в (39) и (40) $t = 0$, получим, в силу (32):

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}; \qquad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (41)$$

Написанные ряды представляют собою разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ по синусам в промежутке $(0, l)$. Коэффициенты таких разложений определяются по известным нам формулам [**146**], и это дает нам следующие значения $A_n$ и $B_n$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz; \qquad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi_1(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (42)$$

Подставляя эти значения в формулу (39), получим ряд, формально удовлетворяющий всем поставленным требованиям. Достаточные условия, налагаемые на $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, при которых его сумма действительно дает решение рассматриваемой задачи, будут даны ниже.

**168. Гармоники и стоячие волны.** Введем амплитуду $N_n$ и начальную фазу $\varphi_n$ гармонического колебания

$$A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} = N_n \sin\left(\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n\right).$$

Каждый член ряда (39), дающего решение задачи

$$\left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l} = N_n \sin \left(\frac{n\pi at}{l} + \varphi_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (43)$$

представляет собою так называемую *стоячую волну*, при которой точки струны совершают гармоническое колебательное движение с одинаковой фазой и с амплитудой

$$N_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

зависящей от положения этой точки. При таком колебании струна издает звук, *высота* которого зависит от *частоты* колебаний

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad (44)$$

а сила — от наибольшей амплитуды $N_n$ колебаний. Придавая $n$ значения 1, 2, 3, ..., мы получаем *основной тон струны и ряд последовательных обертонов*, частоты которых или числа колебаний в секунду пропорциональны членам натурального ряда целых чисел 1, 2, 3, ... При некоторых значениях $x$ амплитуда $N_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ может быть отрицательной. Можно ее взять по абсолютной величине, добавив к фазе $\pi$.

Решение (39), т. е. звук, издаваемый струной, складывается из этих отдельных тонов, или *гармоник*; амплитуды их, а потому и влияние их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники, и всё их действие сводится к созданию *тембра* звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих обертонов.

В точках

$$x = 0, \ \frac{l}{n}, \ \frac{2l}{n}, \ \ldots, \ \frac{(n-1)\,l}{n}, \ l \quad (45)$$

амплитуда колебаний $n$-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin \frac{n\pi x}{l} = 0$, и точки (45) называются *узлами* $n$-й гармоники. В точках же:

$$x = \frac{l}{2n}, \ \frac{3l}{2n}, \ \ldots, \ \frac{(2n-1)\,l}{2n} \quad (45_1)$$

амплитуда колебаний $n$-й гармоники достигает наибольшей величины, ибо функция $\sin \frac{n\pi x}{l}$ в этих точках имеет максимальное абсолютное значение, и точки $(45_1)$ называются *пучностями* для $n$-й гармоники. Струна колеблется при этом так, как будто бы она состояла из $n$ различных кусков, не связанных между собой, но закрепленных в ограничивающих узлах. Если мы прижмем нашу струну как

раз посередине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. 3-й, 5-й, ... гармоник, напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет, и струна будет издавать не свой основной звук, а его октаву, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое бо̀льшим.

Изложенный способ в отличие от способа характеристик можно назвать *способом стоячих волн*; обычно же он называется *способом Фурье*.

Нетрудно обнаружить полное тождество решения, представляемого рядом (39), с тем, которое было найдено выше в **[166]**. В самом деле, заметим сначала, что в **[166]** мы показали, что применение формулы Даламбера (16) к ограниченной струне требует, чтобы функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, заданные в промежутке $(0, l)$, были продолжены в промежуток $(-l, 0)$ по закону нечетности, а затем с периодом $2l$. Но такой способ продолжения вполне равносилен разложению этих функций в ряд Фурье по синусам **[145]**, т. е. вполне равносилен формулам (41) для любого $x$. Подставляя эти выражения $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ в формулу Даламбера (17), мы и придем, как нетрудно видеть, к решению (39):

$$u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l} + \sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz$$

или

$$u = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\sin\frac{n\pi(x-at)}{l} + \sin\frac{n\pi(x+at)}{l}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\left[\cos\frac{n\pi(x-at)}{l} - \cos\frac{n\pi(x+at)}{l}\right],$$

откуда и вытекает непосредственно (39).

Способ Фурье в данном случае имеет недостатки по сравнению со способом характеристик, а именно ряд (39) часто сходится очень медленно и не годится не только для вычисления, но даже для строгого доказательства того, что этот ряд есть действительно решение, так как при этом приходится его дифференцировать почленно два раза, что введет в $n$-м члене множитель $n^2$. Зависимость искомой функции от начальных данных $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, выражаемая рядом (39), гораздо сложнее по внешнему виду, чем зависимость, определяемая по способу характеристик. Зато способ Фурье обнаруживает весьма важное обстоятельство, а именно — существование

бесконечного множества различных собственных гармонических колебаний струны, из которых складывается самое общее ее колебание.

Принимая во внимание сказанное в [166], можно утверждать, что сумма ряда (39) будет давать решение нашей задачи с непрерывными производными до второго порядка, если функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ обладают указанными в [166] свойствами. Если же функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(l)=\varphi''(l)=0$, а $\varphi_1(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0$, то, как можно показать, ряд (39) можно дифференцировать по $x$ и $t$ дважды. Можно рассматривать решение волнового уравнения и при меньших предположениях о начальных данных, о чем мы будем говорить в четвергом томе. В дальнейшем при применении метода Фурье мы не будем оговаривать тех условий, при которых получаемые ряды действительно дают решение задачи. Общая точка зрения на метод Фурье будет нами изложена в четвертом томе. Цель настоящего изложения — указать метод решения и получаемый при этом аппарат. Отметим еще, что из рассуждений, приведенных в [164], и метода характеристик [166] непосредственно следует, что решение поставленной выше задачи как для бесконечной, так и для конечной струны, единственно. В дальнейшем мы займемся вопросом единственности решения для общего волнового уравнения.

**169. Вынужденные колебания.** В [163] было выведено уравнение вынужденных колебаний струны под действием силы $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \quad \left[f(x, t)=\frac{1}{\rho}F(x, t)\right]. \tag{46}$$

К этому уравнению нужно присоединить предельные условия (берем случай закрепленной струны) и начальные условия

$$u\big|_{x=0}=0; \qquad u\big|_{x=l}=0, \tag{47}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{48}$$

Эти вынужденные колебания общего типа можно представить себе как результат сложения двух колебательных движений, из которых одно есть чисто вынужденное колебание, т. е. такое, которое совершается под действием силы $F$, причем струна в начальный момент не выведена из состояния покоя, другое есть свободное колебание, которое струна совершает без действия силы, только вследствие начального возмущения. Аналитически это приводит к введению вместо $u$ двух новых функций $v$ и $w$, по формуле

$$u=v+w,$$

где функция $v$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{49}$$

$$v|_{x=0} = 0; \qquad v|_{x=l} = 0, \tag{50}$$

$$v|_{t=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{51}$$

и дает чисто вынужденное колебание, а функция $w$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$w|_{x=0} = 0, \qquad w|_{x=l} = 0,$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

и дает свободное колебание. Составив сумму $u = v + w$, мы убедимся без труда, что она дает решение нашей задачи, т. е. уравнений (46), (47) и (48).

Методы нахождения свободных колебаний $w$ были указаны в предыдущих номерах, так что здесь мы остановимся только на нахождении функции $v$. Как и в случае свободных колебаний, мы будем искать функцию $v$ в виде ряда:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{52}$$

так что предельные условия (50) удовлетворяются сами собой, и функции $T_n(t)$, конечно, отличаются от тех, которые мы имели в [**167**], ибо уравнение (49) не однородно.

Подставив ряд (52) в уравнение (49), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T''(t) \sin \frac{n\pi x}{l} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} + f(x, t),$$

откуда, заменяя $\frac{an\pi}{l}$ величиной $\omega_n$ (44) [**168**],

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)] \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{53}$$

Функция $f(x, t)$, рассматриваемая как функция от $x$, может быть разложена в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ в ряд Фурье в виде:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{54}$$

коэффициенты которого $f_n(t)$, определяемые по формулам

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(z,\ t)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \tag{55}$$

зависят от $t$. Сравнивая разложения (53) и (54) для одной и той же функции $f(x,\ t)$, мы получаем ряд уравнений

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,), \tag{56}$$

определяющих функции $T_1(t)$, $T_2(t)$, ...

При таком определении $T_n(t)$ функция (52) удовлетворяет дифференциальному уравнению (49) и предельным условиям (50). Для удовлетворения же оставшимся начальным условиям (51) достаточно подчинить функции $T_n(t)$ этим условиям, т. е. положить:

$$T_n(0) = 0, \qquad T_n'(0) = 0, \tag{57}$$

ибо тогда ясно, что

$$v\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0; \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Решение уравнений (56) и (57) было указано в [**28**], откуда нетрудно вывести:

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,$$

или, подставляя выражение (55) для $f_n(\tau)$:

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^t d\tau\int_0^l f(z,\ \tau)\sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \tag{58}$$

Подставив это в (52), мы и получим выражение $v(x,\ t)$. Нетрудно показать, что если $f(x,\ t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $f(0,\ t) = f(l,\ t) = 0$, то сумма ряда (52) есть решение задачи (49)—(51).

До сих пор мы рассматривали неоднородность или в начальных условиях (у функции $w$), или в дифференциальном уравнении (у функции $v$). Естественно рассмотреть неоднородность и в предельных условиях. Считая уравнение и начальные условия однородными и обозначая искомую функцию опять буквою $u$, мы получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u\Big|_{x=0} = \omega(t); \qquad u\Big|_{x=l} = \omega_1(t); \qquad u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Мы рассмотрим этот случай неоднородности в предельных условиях в томе IV.

**170. Сосредоточенная сила.** Исследуем формулу (58) для силы, сосредоточенной в одной точке $C$ $(x=c)$. Величину этой силы мы обозначим не через $P$, как это мы делали в [**163**], а через $\rho P$. Как было указано [**163**], этот случай можно рассматривать как предельный того случая, когда сила $F$ действует только на малом промежутке $(c-\delta, c+\delta)$ и тем самым равна нулю вне этого промежутка, причем полная величина силы

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} F(z, t)\,dz \to \rho P(t) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

По формуле (4) имеем:

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\,dz \to P(t) \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Принимая во внимание, что по условию $f(z, t)$ равна нулю вне промежутка $c-\delta \leqslant z \leqslant c+\delta$, и пользуясь первой теоремой о среднем [**I, 95**], причем предполагается, что $f(z, t)$ знакопостоянна в промежутке

$$c-\delta \leqslant z \leqslant c+\delta,$$

получим:

$$\int_0^l f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz = \sin\frac{n\pi\zeta}{l}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(z, t)\,dz,$$

где $\zeta$ есть некоторое значение из промежутка $(c-\delta, c+\delta)$.

В пределе, при $\delta \to 0$:

$$\int_0^l f(z, t)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz \to P(t)\sin\frac{n\pi c}{l},$$

и тогда функция $T_n(t)$, определяемая как предел выражения в правой части (58) при $\delta \to 0$, обратится в

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,$$

а вынужденное колебание определится по формуле:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l\omega_n}\sin\frac{n\pi c}{l}\int_0^t P(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (59)$$

Эта формула показывает, что в вынужденных колебаниях могут отсутствовать некоторые обертоны, именно те, для коих

$$\sin\frac{n\pi c}{l} = 0,$$

т. е. те, которые имеют узел в точке $C$ приложения силы.

Остановимся на случае гармонически колеблющейся вынуждающей силы, когда нужно будет положить:

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

или, считая для простоты фазу $\varphi_0 = 0$:

$$P(t) = P_0 \sin \omega t.$$

Формула для $T_n(t)$ дает тогда:

$$T_n(t) = \frac{P_0}{l\omega_n} \sin\frac{n\pi c}{l} \int_0^t 2\sin\omega\tau \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{P_0}{l\omega_n} \sin\frac{n\pi c}{l} \int_0^t \{\cos[\omega_n t - (\omega_n - \omega)\tau] - \cos[\omega_n t - (\omega_n + \omega)\tau]\}\,d\tau =$$

$$= \frac{-2\omega P_0}{l\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\omega_n t + \frac{2P_0}{l(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\omega t.$$

Если частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из частот $\omega_n$ собственных колебаний, все знаменатели $(\omega_n^2 - \omega^2)$ отличны от нуля; но если $\omega$ приближается к одной из частот $\omega_n$, соответствующий знаменатель уменьшается и член $T_n(t)$ становится весьма большим по сравнению с прочими, т. е. происходит явление *резонанса*. Наконец, если $\omega = \omega_n$, то предыдущее выражение для $T_n(t)$ теряет смысл и должно быть заменено другим.

Подставив полученные выражения $T_n(t)$ в формулу (52), имеем:

$$v(x, t) = \frac{-2\omega P_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\omega_n t \sin\frac{n\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{2P_0}{l} \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Первое слагаемое в правой части имеет вид свободных колебаний, второе же имеет ту же частоту, что и возмущающая сила. Отнеся первое слагаемое к свободным колебаниям $\omega(x, t)$, мы займемся только вторым слагаемым, обозначив его через $V(x, t)$:

$$V(x, t) = \frac{2P_0}{l} \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

или, положив $\alpha^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2\pi^2}$:

$$V(x, t) = \frac{2P_0 l}{a^2\pi^2} \sin\omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi c}{l}}{n^2 - \alpha^2} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{60}$$

Сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2 - \alpha^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

может быть вычислена по способу, указанному в [159], но мы, не останавливаясь на этом, укажем другое решение той же задачи, рассматривая сосредоточенную силу не как предельный случай непрерывно распределенной, а непосредственно.

Точка $C$ приложения силы разбивает струну на два участка $(0, c)$ и $(c, l)$. Рассматривая оба эти куска отдельно, обозначим ординату первого участка через $u_1(x, t)$, второго же — через $u_2(x, t)$. Для этих функций $u_1$ и $u_2$ мы получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < c, \tag{61}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad c < x < l, \tag{$61_1$}$$

так как внешних сил внутри промежутков $(0, c)$ и $(c, l)$ не имеется. Далее, мы имеем условия закрепления концов:

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l} = 0, \tag{62}$$

условие непрерывности струны в точке $x = c$:

$$u_1|_{x=c} = u_2|_{x=c}, \tag{63}$$

и, наконец, условие равновесия сил, действующих в точке $x = c$ [163]:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=c} - \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=c} = -\frac{\rho}{T_0} P(t) = -\frac{1}{a^2} P(t)\ ^{1)}. \tag{64}$$

Мы ограничимся только случаем гармонической силы

$$P(t) = P_0 \sin \omega t$$

и из вынужденных колебаний, ею вызываемых, выделим колебания той же частоты $\omega$. Эти колебания мы ищем в виде:

$$u(x, t) = X(x) \sin \omega t,$$

где, однако, функция $X(x)$ должна иметь различные выражения в промежутках $(0, c)$ и $(c, l)$, и в связи с этим мы положим:

$$u_1 = X_1(x) \sin \omega t, \quad u_2 = X_2(x) \sin \omega t. \tag{65}$$

Подставив это в уравнения (61) и ($61_1$), мы имеем:

$$-\omega^2 \sin \omega t X_1(x) = a^2 X_1''(x) \sin \omega t,$$

откуда

$$X_1''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X_1(x) = 0,$$

---

[1]) В формуле (7) [163] при наших теперешних обозначениях нужно написать $\rho P(t)$ вместо $P$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ вместо $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_-$.

и аналогично

$$X_2''(x)+\frac{\omega^2}{a^2}X_2(x)=0.$$

Это дает, в силу [27]:

$$X_1(x)=C_1'\cos\frac{\omega}{a}x+C_2'\sin\frac{\omega}{a}x;\quad X_2(x)=C_1''\cos\frac{\omega}{a}x+C_2''\sin\frac{\omega}{a}x.$$

Условия (62) дают нам:

$$C_1'=0,\quad C_1''\cos\frac{\omega l}{a}+C_2''\sin\frac{\omega l}{a}=0,$$

откуда следует, что можно положить:

$$C_1''=C_2\sin\frac{\omega l}{a},\quad C_2''=-C_2\cos\frac{\omega l}{a},$$

где $C_2$ — произвольная постоянная. Обозначая для симметрии произвольную постоянную $C_2'$ через $C_1$, мы получаем:

$$X_1(x)=C_1\sin\frac{\omega x}{a},\quad X_2(x)=C_2\sin\frac{\omega(l-x)}{a}.$$

Условие непрерывности (63) дает тогда:

$$C_1\sin\frac{\omega c}{a}\sin\omega t=C_2\sin\frac{\omega(l-c)}{a}\sin\omega t.$$

Остается только удовлетворить последнему условию (64), из которого получается

$$-\frac{\omega}{a}C_2\cos\frac{\omega(l-c)}{a}\sin\omega t-\frac{\omega}{a}C_1\cos\frac{\omega c}{a}\sin\omega t=-\frac{P_0}{a^2}\sin\omega t.$$

Итак, постоянные $C_1$ и $C_2$ определяются из системы уравнений

$$C_1\sin\frac{\omega c}{a}-C_2\sin\frac{\omega(l-c)}{a}=0;\quad C_1\cos\frac{\omega c}{a}+C_2\cos\frac{\omega(l-c)}{a}=\frac{P_0}{a\omega},$$

что дает после легких вычислений

$$C_1=\frac{P_0}{a\omega}\frac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}};\quad C_2=\frac{P_0}{a\omega}\frac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}},$$

и формулы (65) дадут тогда решение задачи в виде:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{P_0}{a\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega(l-c)}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t, & \text{при } 0<x<c,\\[2ex] \dfrac{P_0}{a\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega c}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t, & \text{при } c<x<l.\end{cases}\qquad(66)$$

Читатель проверит без труда тождественность решений (66) и (60) для $V(x,t)$, разлагая (66) в ряд Фурье по синусам.

**171. Формула Пуассона.** По аналогии с бесконечной струной займемся теперь решением общего волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{67}$$

в безграничном пространстве при заданных начальных условиях. Предварительно выведем одно вспомогательное предложение. Для удобства записи дальнейших формул обозначим координаты $(x, y, z)$ через $(x_1, x_2, x_3)$. Пусть $\omega(x_1, x_2, x_3)$ — любая функция, непрерывная со своими производными до второго порядка в некоторой области $D$ или во всем пространстве. Все дальнейшие рассуждения будут относиться к этой области. Рассмотрим значения функции $\omega$ на поверхности $C_r(x_1, x_2, x_3)$ сферы с центром в точке $(x_1, x_2, x_3)$ и радиусом $r$. Координаты точек этой сферы могут быть выражены по формулам:

$$\xi_1 = x_1 + \alpha_1 r; \quad \xi_2 = x_2 + \alpha_2 r; \quad \xi_3 = x_3 + \alpha_3 r,$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — направляющие косинусы радиусов упомянутой сферы. Мы их можем записать в виде:

$$\alpha_1 = \sin\theta\cos\varphi; \quad \alpha_2 = \sin\theta\sin\varphi; \quad \alpha_3 = \cos\theta,$$

причем угол $\theta$ меняется от 0 до $\pi$ и угол $\varphi$ — от 0 до $2\pi$. Обозначим через $d_1\sigma$ элемент площади сферы единичного радиуса и через $d_r\sigma$ элемент площади сферы радиуса $r$:

$$d_1\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi; \quad d_r\sigma = r^2\, d_1\sigma = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Рассмотрим среднее арифметическое значений функций $\omega$ по поверхности сферы $C_r(x_1, x_2, x_3)$, т. е. интеграл от функции $\omega(x_1, x_2, x_3)$ по поверхности упомянутой сферы, деленный на площадь этой поверхности. Величина этого интеграла зависит, очевидно, от выбора центра $(x_1, x_2, x_3)$ и радиуса $r$ сферы, т. е. упомянутое среднее арифметическое будет функцией четырех переменных $(x_1, x_2, x_3, r)$. Мы можем записать это среднее арифметическое двояким образом:

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \omega(x_1 + \alpha_1 r;\ x_2 + \alpha_2 r;\ x_3 + \alpha_3 r)\, d_1\sigma \tag{68}$$

или

$$v(x_1, x_2, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{C_r} \omega(x_1 + \alpha_1 r;\ x_2 + \alpha_2 r;\ x_3 + \alpha_3 r)\, d_r\sigma.$$

Докажем, что при любом выборе функции $\omega$ функция $v$ удовлетворяет одному и тому же уравнению с частными производными, а именно:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \frac{2}{r} v_r = 0, \tag{69}$$

где, как всегда,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}.$$

В формуле (68) интегрирование совершается по поверхности единичной сферы, и мы можем дифференцировать по $x_i$ под знаком интеграла. Таким образом мы имеем:

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta\omega (x_i + \alpha_i r)\, d_1\sigma$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \alpha_k\, d_1\sigma.$$

Последний интеграл мы можем преобразовать в интеграл по поверхности сферы $C_r(x_1, x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{C_r} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \alpha_k\, d_r\sigma,$$

и, применяя формулу Остроградского, мы получим:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{D_r} \Delta\omega\, dv, \tag{70}$$

где $D_r$ есть сфера с центром $(x_1, x_2, x_3)$ и радиусом $r$. Последнее выражение есть произведение двух функций от $r$: дроби $1 : 4\pi r^2$ и интеграла. Производная по $r$ от тройного интеграла по сфере $D_r$ равна интегралу от той же подинтегральной функции по поверхности $C_r$ этой сферы. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, выразить интеграл по $D_r$ через сферические координаты. Таким образом дифференцируя еще раз $r$, получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi r^3} \iiint_{D_r} \Delta\omega\, dv + \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{C_r} \Delta\omega\, d_r\sigma.$$

Подставляя все указанные выше выражения для производных в уравнение (69), мы убедимся непосредственно в том, что это уравнение действительно удовлетворено. Если $r \to 0$, то из формулы (68) непосредственно вытекает, что $v(x_1, x_2, x_3)$ стремится к $\omega(x_1, x_2, x_3)$, а из (70) вытекает, что $\frac{\partial v}{\partial r}$ стремится к нулю, так как тройной интеграл формулы (70), согласно теореме о среднем, имеет порядок $r^3$, а в знаменателе стоит $r^2$. Мы приходим таким образом к следующей теореме:

Теорема. *При любом выборе функции* $\omega$, *допускающей непрерывные производные до второго порядка, функция* $v$, *определяемая равенством* (68), *удовлетворяет уравнению* (69) *и начальным данным*

$$v\Big|_{r=0} = \omega(x_1, x_2, x_3); \qquad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0. \tag{71}$$

Покажем, пользуясь этой теоремой, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tv(x_1, x_2, x_3, at) \tag{72}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) \tag{73}$$

и начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, x_3). \tag{74}$$

Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v(x_1, x_2, x_3, at) + at\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2a\,\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r} + a^2 t\,\frac{\partial^2 v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r^2},$$

$$\Delta u = t\,\Delta v(x_1, x_2, x_3, at),$$

где, например, $\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, at)}{\partial r}$ есть значение производной $\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3, r)}{\partial r}$ при $r = at$. Подставляя предыдущие выражения в уравнение (73), мы получаем для $v$ уравнение (69) при $r = at$, которое, как доказано выше, действительно имеет место. Начальные условия (74) непосредственно получаются из (71). Поскольку уравнение (73) есть линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, мы можем утверждать, что функция $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$ также удовлетворяет этому уравнению. Определим ее начальные данные при $t = 0$. Принимая во внимание начальные условия (74), мы получим непосредственно для функции $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$:

$$u_1\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, x_3).$$

Для производной $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ мы имеем, в силу (73):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)\Big|_{t=0},$$

или, дифференцируя первое из начальных условий (74) по координатам, мы получим отсюда

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Таким образом производная по $t$ от построенного выше решения волнового уравнения (73), удовлетворяющего начальным условиям (74), является решением того же уравнения и удовлетворяет начальным условиям:

$$\left.u_1\right|_{t=0} = \omega(x_1,\ x_2,\ x_3);\quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{$74_1$}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям координат и взяв в первом случае начальных условий (74) за $\omega(x,\ y,\ z)$ некоторую функцию $\varphi_1(x,\ y,\ z)$, и во втором случае начальных условий ($74_1$) взяв за $\omega(x,\ y,\ z)$ какую-либо другую функцию $\varphi(x,\ y,\ z)$ и сложив таким образом построенные решения, будем иметь решение уравнения (67), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\left.u\right|_{t=0} = \varphi(x,\ y,\ z);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,\ y,\ z). \tag{75}$$

Обозначая для краткости письма через $T_r\{\omega(M)\}$ — среднее арифметическое от функции $\omega$ по сфере с центром $M(x,\ y,\ z)$ и радиусом $r$, мы можем написать, согласно сказанному выше, упомянутое решение уравнения (67), удовлетворяющее начальным условиям (75), в виде

$$u(M,\ t) = tT_{at}\{\varphi_1(M)\} + \frac{\partial}{\partial t}[tT_{at}\{\varphi(M)\}]. \tag{76}$$

Эта формула называется обычно *формулой Пуассона*. Ее можно, очевидно, записать в виде:

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,d_1\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\,d_1\sigma\right], \tag{$76_1$}$$

где $d_1\sigma = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ и $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ — координаты переменной точки вышеупомянутой сферы:

$$\alpha = x + at\sin\theta\cos\varphi,\quad \beta = y + at\sin\theta\sin\varphi;\quad \gamma = z + at\cos\theta. \tag{77}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что функция $u$, определенная формулой (76), действительно удовлетворяет уравнению (67) и условиям (75), если $\varphi_1(x,\ y,\ z)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и $\varphi(x,\ y,\ z)$ до третьего порядка. Последнее обстоятельство связано с тем, что в формуле (76) второе слагаемое содержит дифференцирование по $t$.

Однако, если $\varphi(x,\ y,\ z)$ и $\varphi_1(x,\ y,\ z)$ обладают более плохими дифференциальными свойствами, как это бывает, например,

в задачах с сосредоточенными начальными возмущениями, то и тогда естественно считать, что формула ($76_1$) дает решение задачи. Только в этом случае решение будет не классическим, а обобщенным (см. том IV).

В дальнейшем мы увидим, что поставленная задача может иметь только одно решение.

Положим, что начальное возмущение сосредоточено в некотором ограниченном объеме $(v)$ с поверхностью $(\sigma)$, т. е. что $\varphi(N)$ и $\varphi_1(N)$ равны нулю вне $(v)$, и пусть точка $M$ находится вне $(v)$. При $t<\frac{d}{a}$, где $d$ — кратчайшее расстояние от $M$ до $(\sigma)$, сфера $(S_{at})$ находится вне $(v)$, обе вышеупомянутые функции равны нулю на $(S_{at})$, и формула (76) дает $u(M, t)=0$, т. е. покой в точке $M$. В момент $t=\frac{d}{a}$ поверхность $(S_{at})$ коснется $(\sigma)$, и передний фронт волны пройдет через $M$. Наконец, при $t>\frac{D}{a}$, где $D$ — наибольшее расстояние от $M$ до точек поверхности $(\sigma)$, сфера $(S_{at})$ будет опять находиться вне $(v)$ [весь объем $(v)$ будет внутри $(S_{at})$], и формула (76) опять дает $u(M, t)=0$. Моменту $t=\frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку $M$, после чего в этой точке $u(M, t)$ обращается в нуль, а не в постоянную, как это было для струны (т. е. для плоской волны). Передний фронт волны в заданный момент $t$ представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от $(\sigma)$, равное $at$. Нетрудно показать, что эта поверхность будет огибающей для семейства сфер, имеющих центры на поверхности $(\sigma)$ и радиус $at$. Постоянная $a$ является, как мы видим, *скоростью распространения фронта волны*.

**172. Цилиндрические волны.** Отнесем пространство к прямолинейным прямоугольным осям и предположим, что функции $\varphi(x, y, z)$ и $\varphi_1(x, y, z)$ зависят только от $x$ и $y$, т. е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси $OZ$. Если передвигать точку $M(x, y, z)$ параллельно оси $OZ$, то, очевидно, правая часть формулы ($76_1$) не будет менять своего значения, т. е. функция $u(x, y, z, t)$ также не будет зависеть от $z$, и формула ($76_1$) даст нам решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{78}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x, y). \tag{79}$$

Мы можем рассматривать это решение, оставаясь исключительно на плоскости $XY$. Для этого нам надо интегралы формулы ($76_1$), которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости $XY$. Возьмем точку $M(x, y)$ на плоскости $XY$. Точки с координатами $(\alpha, \beta, \gamma)$, определяемыми по формулам (77) при $z=0$, суть переменные точки сферы $(S_{at})$ с центром $M(x, y, 0)$ и радиусом $at$. Элемент площади поверхности этой сферы будет $dS_{at}=a^2t^2\,d_1\sigma$. Части этой сферы, находящиеся над и под плоскостью $XY$, проектируются на плоскость $XY$ в виде круга $(C_{at})$ с центром $M$ и радиусом $at$. Элемент площади проекции $dC_{at}$ связан с элементом площади поверхности сферы $dS_{at}$ формулой [62]

$$dS_{at}=\frac{dC_{at}}{\cos(n, Z)},$$

где $n$ — направление нормали к $(S_{at})$, т. е. радиуса этой сферы, образующее острый угол с осью $OZ$. Если $N$ — переменная точка сферы, $N_1$ — ее проекция на плоскость $XY$, то из элементарных геометрических соображений ясно, что

$$\cos(n, Z)=\frac{\overline{NN_1}}{\overline{MN}}=\frac{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}{at},$$

где $(\alpha, \beta)$ — координаты переменной точки круга $(C_{at})$. Подставляя всё это в первый из интегралов формулы ($76_1$) и принимая во внимание, что круг $(C_{at})$ получится как от верхней, так и от нижней части сферы $(C_{at})$, мы получим следующее преобразование первого интеграла формулы ($76_1$):

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma)\,d_1\sigma=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{(S_{at})}\varphi_1(\alpha, \beta)\,dS_{at}=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\iint_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\,dC_{at}.$$

Применяя то же преобразование ко второму интегралу и обозначая элемент площади $dC_{at}$ на плоскости $XY$ в виде $d\alpha\,d\beta$, мы получаем окончательно следующую формулу для искомой функции, удовлетворяющей уравнению (78) и условиям (79):

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_{(C_{at})}\frac{\varphi_1(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint_{(C_{at})}\frac{\varphi(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}}\right]. \quad (80)$$

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью $(B)$ на плоскости $XY$ с контуром $(l)$, т. е. $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю вне $(B)$. Положим, что точка $M$ лежит вне $(B)$. Для моментов времени $t < \frac{d}{a}$, где $d$ — кратчайшее расстояние от $M$ до контура $(l)$, круг $(C_{at})$ не имеет общих точек с $(B)$, функции $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю во всем круге $(C_{at})$, и формула (80) дает $u(x, y, t) = 0$. В момент $t = \frac{d}{a}$ в точку $M$ придет передний фронт волны. Для значений $t > \frac{D}{a}$, где $D$ — наибольшее расстояние от $M$ до точек $(l)$, круг $(C_{at})$ будет содержать внутри себя всю область $(B)$, и интегрирование в формуле (80) надо совершать просто по области $(B)$, так как $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ обращаются в нуль вне $(B)$, т. е.

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)} \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}} + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(B)} \frac{\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha - x)^2 - (\beta - y)^2}}\right].$$

В данном случае, после прохождения заднего фронта волны в момент $t = \frac{D}{a}$ функция $u(x, y, t)$ не обращается ни в нуль, как в случае трехмерного пространства, ни в постоянную, как в случае струны. Но ввиду присутствия $a^2t^2$ в знаменателе мы можем все же утверждать, что $u(x, y, t)$ будет стремиться к нулю при беспредельном возрастании $t$.

Говорят, что в рассматриваемом случае имеет место явление диффузии волн после прохождения заднего фронта. Мы провели всё рассуждение, оставаясь на плоскости $XY$. В трехмерном пространстве уравнению (78) соответствуют так называемые цилиндрические волны.

**173. Случай $n$-мерного пространства.** Полученные в [171] результаты непосредственно обобщаются на случай любого числа измерений. Мы будем рассматривать $n$-мерное пространство с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Объем сферы радиуса $r$ в таком пространстве определяется формулой [99]:

$$v_n(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-2)\cdot n}\, r^n \qquad (n \text{ — четно}),$$

$$v_n(r) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-2)\, n}\, r^n \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Дифференцируя эти выражения по $r$, мы получим величину площади поверхности сферы:

$$\sigma_n(r) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-2)}\,r^{n-1} \qquad (n \text{ — четно}),$$

$$\sigma_n(r) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-2)}\,r^{n-1} \qquad (n \text{ — нечетно}).$$

Направляющие косинусы $\alpha_k$ радиусов сферы выражаются через $(n-1)$ углов по формулам:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta_1\\
\alpha_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2\\
\alpha_3 &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-2} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\\
\alpha_{n-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi\\
\alpha_n &= \sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\varphi,
\end{aligned}$$

где

$$0\leqslant\theta_k\leqslant\pi;\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Элемент площади поверхности единичной сферы будет:

$$d_1\sigma = \sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\ldots d\theta_{n-2}\,d\varphi,$$

и для сферы радиуса $r$:

$$d_r\sigma = r^{n-1}d_1\sigma.$$

Положим, что в пространстве $R_n$ задана функция $\omega$ с непрерывными производными до второго порядка. Ее среднее арифметическое по сфере с центром $(x_1, \ldots, x_n)$ и радиусом $r$ будет определяться формулой:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = \frac{1}{\sigma_n(1)}\int\ldots\int \omega(x_1+\alpha_1 r,\ x_2+\alpha_2 r,\ \ldots,\ x_n+\alpha_n r)\,d_1\sigma$$

или

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = \frac{1}{\sigma_n(r)}\int\ldots\int \omega(x_1+\alpha_1 r,\ x_2+\alpha_2 r,\ \ldots,\ x_n+\alpha_n r)\,d_r\sigma.$$

Совершенно так же, как и выше, мы можем показать, что функция $v$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \Delta v + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

и начальным условиям:

$$v\Big|_{r=0} = \omega(x_1, \ldots, x_n);\qquad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0.$$

Пользуясь указанным результатом, можно получить окончательные формулы для волнового уравнения с любым числом независимых переменных. Мы приведем в общем случае лишь окончательные результаты.

Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \tag{81}$$

при начальных условиях:

$$u\Big|_{t=0} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при нечетном $n$ имеет вид

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{2^{\frac{n-3}{2}}}{1\cdot 3 \ldots (n-2)} \cdot \frac{\partial^{\frac{n-3}{2}}}{\partial (t^2)^{\frac{n-3}{2}}}\left[t^{n-2} T_{at}\{\omega(x_i)\}\right] \tag{$82_1$}$$

и при четном $n$

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) =$$

$$= \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{2\cdot 4 \ldots (n-2)} \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at} \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \frac{\partial^{\frac{n-2}{2}}}{\partial (r^2)^{\frac{n-2}{2}}}\left[r^{n-2} T_r\{\omega(x_i)\}\right] dr, \tag{$82_2$}$$

где $T_\rho\{\omega(x_i)\}$ — среднее арифметическое от функции $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по сфере с центром $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и радиусом $\rho$. Для проверки формул ($82_1$) и ($82_2$) нам достаточно потребовать, чтобы функция $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела при нечетном $n$ непрерывные производные до порядка $\frac{n+1}{2}$ и при четном $n$ до порядка $\frac{n+2}{2}$.

**174. Неоднородное волновое уравнение.** Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \tag{83}$$

в безграничном пространстве, и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$u\Big|_{t=0} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{84}$$

Добавляя к этому решению решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (75), получим решение уравнения (83), удовлетворяющее условиям (75).

Для решения поставленной выше задачи рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{85}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$w\Big|_{t=\tau}=0;\quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,\ y,\ z,\ \tau), \tag{86}$$

причем в качестве начального момента взято не $t=0$, а $t=\tau$, где $\tau$ — некоторый параметр. Функция $w$ будет выражаться формулой Пуассона, но только в этой формуле мы должны заменить $t$ на $(t-\tau)$, поскольку начальным моментом времени является не $t=0$, а $t=\tau$. Мы будем иметь таким образом:

$$w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)=$$

$$=\frac{t-\tau}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau),\ \ y+\alpha_2 a(t-\tau),\ \ z+\alpha_3 a(t-\tau),\ \tau]\,d_1\sigma, \tag{87}$$

где

$$\alpha_1=\sin\theta\cos\varphi;\quad \alpha_2=\sin\theta\sin\varphi;\quad \alpha_3=\cos\theta. \tag{88}$$

Отметим, что функция $w$, кроме обычных независимых переменных $(x,\ y,\ z,\ t)$, зависит от параметра $\tau$. Определим теперь функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ формулой:

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\int\limits_0^t w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)\,d\tau \tag{89}$$

и покажем, что она удовлетворяет неоднородному уравнению (83) и нулевым начальным условиям (84). Мы имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_0^t \frac{\partial w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)}{\partial t}\,d\tau+w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)\Big|_{\tau=t}. \tag{90}$$

Внеинтегральный член равен нулю в силу первого из условий (86). Дифференцируя еще раз по $t$, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int\limits_0^t \frac{\partial^2 w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)}{\partial t^2}\,d\tau+\frac{\partial w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)}{\partial t}\Big|_{\tau=t},$$

причем полученный внеинтегральный член равен $f(x,\ y,\ z,\ t)$ в силу второго из условий (86), т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int\limits_0^t \frac{\partial^2 w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)}{\partial t^2}\,d\tau+f(x,\ y,\ z,\ t).$$

При дифференцировании выражения (89) по координатам достаточно дифференцировать подинтегральную функцию:

$$\Delta u=\int\limits_0^t \Delta w(x,\ y,\ z,\ t;\ \tau)\,d\tau.$$

Из двух последних формул и уравнения (85) непосредственно вытекает, что $u$ удовлетворяет уравнению (83). Начальные условия (84) непосредственно следуют из формул (89) и (90), если принять во внимание, что в формуле (90) внеинтегральный член равен нулю, как было указано выше. Таким образом формула (89) дает решение уравнения (83) при начальных условиях (84). Подставляя в (89) вместо функции $w(x, y, z, t; \tau)$ ее выражение (87), получим:

$$u(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f[x+\alpha_1 a(t-\tau),\ y+\alpha_2 a(t-\tau),\ z+\alpha_3 a(t-\tau),\ \tau]\,d_1\sigma\right]d\tau.$$

Это выражение для $u$ преобразуем к другому виду. Вместо $\tau$ введем новую переменную интегрирования: $r = a(t-\tau)$. Совершая замену переменных, получим:

$$u(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(x+\alpha_1 r,\ y+\alpha_2 r,\ z+\alpha_3 r,\ t-\frac{r}{a}\right) r\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

или, умножая и деля на $r$:

$$u(x, y, z, t) = \\ = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f\left(x+\alpha_1 r,\ y+\alpha_2 r,\ z+\alpha_3 r,\ t-\frac{r}{a}\right)}{r} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Принимая во внимание формулы (88) для $\alpha_k$ и вспоминая выражение для элемента объема в сферических координатах, мы видим, что входящие в последнюю формулу три квадратуры равносильны тройному интегралу по сфере $D_{at}$ с центром $(x, y, z)$ и радиусом $at$. Вводя переменную точку

$$\xi = x+\alpha_1 r;\quad \eta = y+\alpha_2 r;\quad \zeta = z+\alpha_3 r,$$

и, принимая во внимание, что $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1$, получим

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

и выражение для $u$ запишется окончательно в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leq at} \frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)}{r}\,dv, \tag{91}$$

где неравенство $r \leqslant at$ характеризует упомянутую выше сферу $D_{at}$. Характерным в подинтегральной функции последнего выражения является тот факт, что функция $f$ берется в момент времени $t - \frac{r}{a}$, предшествующий моменту $t$, для которого вычисляется $u$. Разница $\frac{r}{a}$ в моментах времени дает то время, которое нужно для перехода из точки $(\xi, \eta, \zeta)$ в точку $(x, y, z)$ со скоростью $a$. Выражение (91) называется обычно *запаздывающим потенциалом*. Отметим еще, что основная формула (89) имеет простой физический смысл, а именно она показывает, что решение неоднородного уравнения (83), удовлетворяющее начальным условиям (84), является суммой импульсов $w(x, y, z, t; \tau)\,d\tau$, происходящих от наличия свободного члена и определяемых уравнениями (85) и (86).

Рассмотрим теперь неоднородное волновое уравнение для цилиндрических волн:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t) \tag{92}$$

при нулевых начальных условиях. Совершенно так же, как и выше, мы можем получить решение задачи в виде:

$$u(x, y, t) = \int_0^t w(x, y, t; \tau)\,d\tau,$$

где $w(x, y, t; \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

и начальным условиям

$$w\Big|_{t=\tau} = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x, y, \tau).$$

Принимая во внимание формулу (80), получим окончательно

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \left[\iint\limits_{\rho \leqslant a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\,d\xi\,d\eta\right] d\tau \tag{93}$$

$$[\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

Отметим, что в последней формуле мы имеем интегрирование по времени, чего не было в формуле (91), где зависимость от времени сводилась лишь к зависимости от времени радиуса сферы, по которой производилось интегрирование, и к зависимости от времени функции $f(x, y, z, t)$. В линейном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{94}$$

решение будет очевидно:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\right] d\tau. \tag{95}$$

**175. Точечный источник.** Если мы положим, что свободный член в уравнении (83) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить (так называемое обобщенное) решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$ и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant \varepsilon \tag{96}$$

и

$$\iiint_{C_\varepsilon} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = 4\pi\omega(t), \tag{97}$$

где $C_\varepsilon$ — сфера с центром в начале и радиусом $\varepsilon$. Обратимся к формуле (91) и будем считать, что $at > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу (96) достаточно произвести интегрирование по сфере $C_\varepsilon$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ величина $r$ будет равна расстоянию от точки $(x, y, z)$ до начала, т. е. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и мы получим, принимая во внимание (97):

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{r}\,\omega\left(t - \frac{r}{a}\right) \tag{98}$$

$$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

Кроме того надо считать, что $u(x, y, z, t) = 0$ при $r > at$, так как при $r > at$ область интегрирования в интеграле (91) не содержит внутри себя сферы $C_\varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon$. Отметим, что функция (98) при любом выборе дважды непрерывно дифференцируемой функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению и имеет особенность в начале координат.

В случае уравнения (92) мы должны совершенно так же, как и выше, считать:

$$f(x, y, t) = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} > \varepsilon$$

и

$$\iint_{\gamma_\varepsilon} f(x, y, t)\, dx\, dy = 2\pi\omega(t),$$

где $\gamma_\varepsilon$ — круг с центром в начале и радиусом $\varepsilon$. Обращаясь к формуле (93) и переходя к пределу, получим решение для точечного

источника в случае цилиндрических волн:

$$u(x, y, t)=\frac{1}{a}\int_0^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\omega(\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\tau \qquad (at>\rho), \tag{99}$$

$$u(x, y, t)=0 \quad \text{при} \quad at<\rho$$

$$(\rho=\sqrt{x^2+y^2}).$$

Формулы (98) и (99) отличаются, аналогично тому, что мы указывали в предыдущем параграфе. Воздействие точечного источника на точку $(x, y, z)$ в момент времени $t$ согласно формуле (98) зависит только от интенсивности источника в момент времени $t-\frac{r}{a}$. В случае формулы (90) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от момента $t=0$ до момента $t=\frac{\rho}{a}$.

В линейном случае (94), полагая, как всегда:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x, t)\,dx=\omega(t) \quad \text{и} \quad f(x, t)=0 \quad \text{при} \quad |x|>\varepsilon,$$

мы получаем, переходя к пределу в формуле (95):

$$\left.\begin{aligned} u(x, t)&=\int_0^{t-\frac{|x|}{a}} \omega(\tau)\,d\tau \quad \text{при } |x|<at,\\ u(x, t)&=0 \quad \text{при} \quad |x|>at. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

**176. Поперечные колебания мембран.** До сих пор мы рассматривали волновые уравнения на плоскости и в пространстве при отсутствии границ, так что, кроме дифференциального уравнения, имели только начальные условия. Предельные задачи для волнового уравнения на плоскости и в пространстве представляются гораздо более трудными, чем в линейном случае. Рассмотрим предельную задачу на плоскости в двух частных случаях — когда основной областью, для которой решается задача, является прямоугольник или круг. Мы будем физически толковать волновое уравнение на плоскости, как уравнение для поперечных колебаний мембраны.

Под мембраной мы понимаем весьма тонкую пластинку, которая, подобно струне, работает только на растяжение, но не на изгиб. Если мембрана находится под действием равномерного натяжения $T_0$ и в состоянии равновесия лежит в плоскости $(x, y)$ и если мы ограничимся лишь тем случаем, когда движение происходит параллельно оси $Oz$, то смещение $u$ точки $(x, y)$ мембраны будет функцией от $x$, $y$ и $t$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению струны, а именно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t), \tag{101}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}},$$

$\rho$ — поверхностная плотность мембраны, $\rho f$ — внешняя сила или нагрузка. На выводе уравнения (101) мы здесь останавливаться не будем.

Кроме дифференциального уравнения (101), нужно иметь в виду *предельное условие*, которому должна удовлетворять функция $u$ на контуре $(C)$ — границе мембраны. Мы остановимся лишь на том случае, когда на контуре $(C)$ мембрана закреплена, т. е.

$$u = 0 \quad \text{на} \quad (C). \tag{102}$$

Наконец, нужно задать начальное условие, т. е. смещение и скорость всех точек мембраны в начальный момент:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x, y). \tag{103}$$

**177. Прямоугольная мембрана.** Рассмотрим *свободные колебания прямоугольной мембраны*, контур которой есть прямоугольник со сторонами

$$x = 0, \quad x = l, \quad y = 0, \quad y = m \tag{104}$$

в плоскости $(x, y)$. Внешнюю силу мы будем считать отсутствующей, т. е. $f = 0$.

Итак, нам нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{105}$$

удовлетворяющее условиям (102) и (103).

Применяя опять способ стоячих волн (Фурье), ищем частное решение уравнения (105) в виде:

$$(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)\, U(x, y), \tag{106}$$

что дает нам

$$-\omega^2(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t)\, U(x, y) = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t),$$

откуда, полагая

$$\frac{\omega^2}{a^2} = k^2, \tag{107}$$

находим уравнение для $U$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0.$$

В свою очередь, ищем частное решение этого уравнения в виде:

$$U(x, y) = X(x)\, Y(y), \tag{108}$$

что дает нам:

$$X''(x)\, Y(y) + X(x)\, Y''(y) + k^2 X(x)\, Y(y) = 0,$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + k^2 Y(y)}{Y(y)} = -\lambda^2,$$

где $\lambda^2$ — пока неопределенная постоянная.

Итак, мы имеем два уравнения:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, \tag{109}$$

где

$$\mu^2 = k^2 - \lambda^2, \quad \mu^2 + \lambda^2 = k^2.$$

Уравнения (109) дают нам общий вид функций $X(x)$ и $Y(y)$:

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x; \qquad Y(y) = C_3 \sin \mu x + C_4 \cos \mu x.$$

Из условия

$$u = 0 \text{ на } (C)$$

получаем

$$U(x, y) = 0 \text{ на } (C),$$

а это последнее условие, в свою очередь, распадается на следующие условия:

$$X(0) = 0; \quad X(l) = 0; \quad Y(0) = 0; \quad Y(m) = 0,$$

откуда ясно, что $C_2 = C_4 = 0$, и если мы отбросим постоянные множители $C_1$ и $C_3$, не равные нулю, то окажется:

$$X(x) = \sin \lambda x, \qquad Y(y) = \sin \mu y, \tag{110}$$

причем, однако,

$$\sin \lambda l = 0, \qquad \sin \mu m = 0. \tag{111}$$

Из уравнений (111) вытекает, что $\lambda$ и $\mu$ имеют бесчисленное множество значений

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\sigma, \ldots; \; \mu = \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\tau, \ldots; \; \lambda_\sigma = \frac{\sigma\pi}{l}, \; \mu_\tau = \frac{\tau\pi}{m}. \tag{112}$$

Взяв по произволу по одному значению $\lambda$ и $\mu$ из рядов (112), получим соответствующее значение постоянной $k^2$:

$$k^2_{\sigma, \tau} = \lambda^2_\sigma + \mu^2_\tau = \pi^2 \left( \frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right),$$

а по этому значению $k^2$ найдем и соответствующее значение частоты $\omega$ из (107):

$$\omega^2_{\sigma, \tau} = a^2 k^2_{\sigma, \tau} = a^2 \pi^2 \left( \frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right). \tag{113}$$

Подставив в выражение (106) $\lambda_\sigma$ вместо $\lambda$, $\mu_\tau$ вместо $\mu$ и обозначив через $\alpha_{\sigma,\tau}$ $\beta_{\sigma,\tau}$ соответствующие значения $\alpha$ и $\beta$, мы получаем бесчисленное множество решений уравнения (105), удовлетворяющих предельному условию (102), в виде:

$$(\alpha_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t + \beta_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

т. е. бесчисленное множество собственных (свободных) гармонических колебаний мембраны, соответствующих таковым же колебаниям струны.

Постоянные $\alpha$, $\beta$ определяются из начальных условий. Положив $t = 0$ в формулах:

$$u = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} (\alpha_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t + \beta_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \omega_{\sigma,\tau} (\beta_{\sigma,\tau} \cos \omega_{\sigma,\tau} t - \alpha_{\sigma,\tau} \sin \omega_{\sigma,\tau} t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

получим на основании (103):

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x,\ y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \alpha_{\sigma,\tau} \sin\frac{\sigma\pi x}{l} \sin\frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(x,\ y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \beta_{\sigma,\tau}\omega_{\sigma,\tau} \sin\frac{\sigma\pi x}{l} \sin\frac{\tau\pi y}{m}.$$

Эти формулы суть не что иное, как разложения функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ в двойные ряды Фурье, и коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ определяются, как нетрудно видеть, по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\sigma,\tau} &= \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m \varphi_1(\xi,\ \zeta) \sin\frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin\frac{\tau\pi\eta}{m}\, d\xi\, d\eta, \\ \omega_{\sigma,\tau}\beta_{\sigma,\tau} &= \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m \varphi_2(\xi,\ \eta) \sin\frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin\frac{\tau\pi\eta}{m}\, d\xi\, d\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

что и дает решение поставленной задачи.

Случай мембраны отличается от случая струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. Для мембраны же может оказаться, что одной и той же частоте соответствует несколько фигур мембраны с различными положениями *узловых линий*, т. е. таких линий, на которых амплитуда колебаний приводится к нулю. Проще всего это можно исследовать на примере квадратной мембраны

$$l = m = r.$$

В этом случае частота $\omega_{\sigma,\tau}$ определяется по формуле

$$\omega_{\sigma,\tau} = \frac{a\pi}{r}\sqrt{\sigma^2+\tau^2} = \alpha\sqrt{\sigma^2+\tau^2}, \qquad (115)$$

где $\alpha = \frac{a\pi}{r}$ есть множитель, не зависящий от $\sigma$ и $\tau$.

Полагая $\sigma = \tau = 1$, получаем основной тон $u_{11}$ мембраны с частотой $\omega_{11} = \alpha\sqrt{2}$:

$$u_{11} = N_1 \sin(\omega_{11}t + \varphi_{11}) \sin\frac{\pi x}{r} \sin\frac{\pi y}{r}.$$

Узловых линий внутри мембраны при этом не имеется совсем.

Полагая затем

$$\sigma = 1,\quad \tau = 2 \quad \text{или} \quad \sigma = 2,\quad \tau = 1,$$

имеем два других тона одинаковой частоты

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5},$$

именно:

$$u_{12} = N_{12} \sin(\omega_{12}t + \varphi_{12}) \sin\frac{\pi x}{r} \sin\frac{2\pi y}{r},$$

$$u_{21} = N_{21} \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21}) \sin\frac{2\pi x}{r} \sin\frac{\pi y}{r}.$$

Узловые линии этих простейших колебаний суть соответственно:

$$y = \frac{r}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{r}{2}.$$

Но, кроме колебаний $u_{12}$, $u_{21}$, существует еще бесчисленное множество других колебаний той же частоты $\omega_{12}$, которые получаются линейной комбинацией $u_{12}$ и $u_{21}$. Полагая для простоты $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$, мы получаем колебание вида

$$\sin \omega t \left[N_1 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r} + N_2 \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r}\right],$$

где $\omega = \omega_{12} = \omega_{21}$, $N_1 = N_{12}$ и $N_2 = N_{21}$.

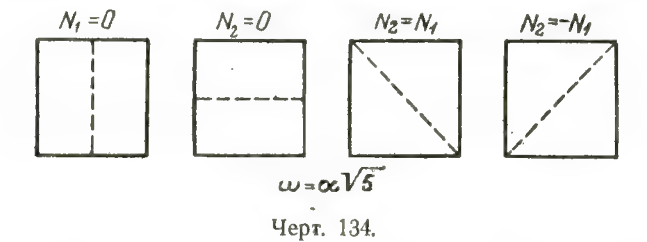
При $N_1 = N_2$ узловые линии определяются из уравнения

$$0 = \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{2\pi y}{r} + \sin \frac{2\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r} = 2 \sin \frac{\pi x}{r} \sin \frac{\pi y}{r} \left(\cos \frac{\pi x}{r} + \cos \frac{\pi y}{r}\right),$$

что дает узловую линию

$$x + y = r.$$

При $N_2 = -N_1$ точно таким же путем найдем узловую линию: $x - y = 0$.




Черт. 134.

Эти простейшие случаи изображены на черт 134. Более сложные узловые линии при той же частоте мы получим, когда $N_2 \neq \pm N_1$ и $N_1$, $N_2 \neq 0$.

Все они имеют уравнения вида

$$N_2 \cos \frac{\pi x}{r} + N_1 \cos \frac{\pi y}{r} = 0.$$

Полагая теперь

$$\sigma = 2, \quad \tau = 2,$$

получаем единственный тон частоты

$$\omega_{22} = \alpha \sqrt{8},$$

узловые линии которого суть (черт. 135):

$$x = \frac{r}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{r}{2}.$$

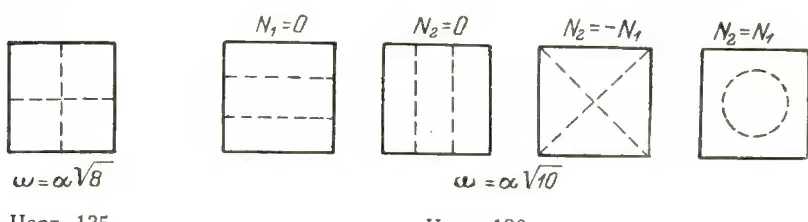
Следующий случай:

$$\sigma = 1, \quad \tau = 3, \quad \sigma = 3, \quad \tau = 1$$

приводит опять к бесчисленному множеству колебаний одной и той же частоты $\omega_{13} = \omega_{31} = \alpha \sqrt{10}$. Их узловые линии простейших случаях, аналогичных

случаю с частотой $\omega_{12} = \omega_{21} = \alpha\sqrt{5}$, изображены на черт. 136. Все эти фигуры представляют собою не что иное, как известные из акустики хладниевы фигуры.

*Вынужденные колебания мембраны* исследуются совершенно так же, как и вынужденные колебания струны, с тою лишь разницей, что внешняя сила $f(x, y, t)$ разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье.




Черт. 135. Черт. 136.

**178. Круглая мембрана.** Случай круглой мембраны дает нам пример разложения данной функции по функциям Бесселя, — пример, который важен и потому, что такие разложения встречаются в других весьма важных задачах математической физики.

Итак, мы исследуем свободные (собственные) колебания круглой мембраны, контур которой есть окружность радиуса $l$ с центром в начале координат. Попрежнему мы считаем, что на контуре мембрана не смещается. Вводя вместо прямоугольных координат $(x, y)$ полярные $(r, \theta)$, мы имеем тогда

$$u|_{r=l} = 0.$$

Как и в случае прямоугольной мембраны, будем искать частные решения уравнения (105) вида:

$$(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) U,$$

но только будем считать, что функция $U$ выражена через $(r, \theta)$, а не через $(x, y)$. Для функции $U$ мы получим то же дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0, \tag{116}$$

но только нужно преобразовать его к новым переменным $(r, \theta)$. Для этого достаточно выразить оператор Лапласа

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{117}$$

в полярных координатах. Мы знаем, что оператор Лапласа от трех переменных

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

выражается в цилиндрических координатах в виде [119]:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right].$$

Считая $U$ независящим от $z$, выразим (117) через полярные координаты. В дальнейшем длину радиуса-вектора мы будем обозначать буквой $r$ вместо $\rho$,

а полярный угол — буквой $\theta$ вместо $\varphi$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}.$$

Уравнение (116) перепишется:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + k^2 U = 0.$$

Ищем его частные решения в виде произведения:

$$U(r, \theta) = T(\theta) \cdot R(r),$$

что дает:

$$T(\theta)\left[R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + k^2 R(r)\right] + \frac{1}{r^2} T''(\theta) R(r) = 0,$$

или

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r) + k^2 r^2 R(r)}{R(r)} = -\lambda^2$$

и, наконец,

$$T''(\theta) + \lambda^2 T(\theta) = 0, \qquad (118)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r) = 0. \qquad (119)$$

Уравнение (118) имеет общее решение вида:

$$T(\theta) = C\cos\lambda\theta + D\sin\lambda\theta,$$

и так как функция $U$ по самому смыслу задачи должна быть однозначной периодической функцией от $\theta$ с периодом $2\pi$, то тем же свойством должна обладать и функция $T(\theta)$, что возможно лишь при условии, что $\lambda$ есть число целое. Ограничившись только положительными значениями $\lambda$, мы должны считать $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ и соответствующие выражения для функций $T(\theta)$ и $R(r)$ обозначим через:

$$T_0(\theta),\ T_1(\theta),\ T_2(\theta), \ldots,\ T_n(\theta), \ldots;\ R_0(r),\ R_1(r),\ R_2(r), \ldots,\ R_n(r), \ldots$$

Таким путем мы получаем бесчисленное множество решений уравнения (105) вида:

$$(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)(C\cos n\theta + D\sin n\theta)R_n(r) \quad (\omega = ak). \qquad (120)$$

Функция $R_n(r)$ удовлетворяет уравнению (119), если там заменить $\lambda$ на $n$:

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R_n(r) = 0. \qquad (121)$$

Как мы видели в [**49**], общий интеграл этого уравнения будет

$$R_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 K_n(kr), \qquad (122)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя и $K_n(x)$ — второе решение уравнения Бесселя, которое обращается в бесконечность при $x = 0$; так как по самому смыслу задачи искомые решения должны оставаться ограниченными во всех точках мембраны, в том числе и в начале координат $r = 0$, то в предыдущей формуле для $R_n(r)$ член с $K_n(kr)$ должен отсутствовать, т. е. $C_2 = 0$. Не ограничивая общности, мы можем считать $C_1 = 1$, т. е. положить:

$$R_n(r) = J_n(kr), \qquad (123)$$

и тогда предельное условие

$$u|_{r=l}=0$$

дает

$$J_n(kl)=0. \tag{124}$$

Положив $kl=\mu$, мы получаем трансцендентное уравнение для определения $\mu$

$$J_n(\mu)=0, \tag{125}$$

которое, как это доказывается в теории функций Бесселя, имеет бесчисленное множество положительных корней:

$$\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)},\ \ldots,\ \mu_m^{(n)},\ \ldots, \tag{126}$$

которым соответствуют значения

$$k_1^{(n)},\ k_2^{(n)},\ k_3^{(n)},\ \ldots;\ k_m^{(n)}=\frac{\mu_m^{(n)}}{l} \tag{127}$$

параметра $k$ и, в силу (107), значения

$$\omega_{m,n}=ak_m^{(n)} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{128}$$

частоты $\omega$. Первые девять корней первых шести функций Бесселя даны в прилагаемой таблице:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,404 | 3,832 | 5,135 | 6,379 | 7,586 | 8,780 |
| 2 | 5,520 | 7,016 | 8,417 | 9,760 | 11,064 | 12,339 |
| 3 | 8,654 | 10,173 | 11,620 | 13,017 | 14,373 | 15,700 |
| 4 | 11,792 | 13,323 | 14,796 | 16,224 | 17,616 | 18,982 |
| 5 | 14,931 | 16,470 | 17,960 | 19,410 | 20,827 | 22,220 |
| 6 | 18,076 | 19,616 | 21,117 | 22,583 | 24,018 | 25,431 |
| 7 | 21,212 | 22,760 | 24,270 | 25,749 | 27,200 | 28,628 |
| 8 | 24,353 | 25,903 | 27,421 | 28,909 | 30,371 | 31,813 |
| 9 | 27,494 | 29,047 | 30,571 | 32,050 | 33,512 | 34,983 |

Следующие корни могут быть вычислены по приближенной формуле:

$$k_m^{(n)}=\frac{1}{4}\pi(2n-1+4m)-\frac{4n^2-1}{\pi(2n-1+4m)}, \tag{129}$$

которая при данном $n$ будет тем точнее, чем больше $m$. Мы не можем здесь входить в обоснование формулы (129).

Из формулы (120) вытекает, что полученные нами частные решения можно представить в виде:

$$\begin{gathered}(\alpha_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\alpha_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\cos n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)+\\+(\beta_{m,n}^{(1)}\cos\omega_{m,n}t+\beta_{m,n}^{(2)}\sin\omega_{m,n}t)\sin n\theta\cdot J_n(k_m^{(n)}r)\\(m,\ n=1,\ 2,\ \ldots).\end{gathered} \tag{130}$$

Заметим еще, что при $\lambda=0$ уравнение (118) имеет решения — постоянное и $\theta$. Второе решение не годится, как не периодическое. В первом случае

формула (120) дает решение:

$$(\alpha_{m,0}^{(1)} \cos \omega_{m,0}t + \alpha_{m,0}^{(2)} \sin \omega_{m,0}t)\, J_0(k_m^{(0)} r).$$

Это решение также имеет вид (130) (при $n = 0$), с той лишь разницей, что при $n = 0$ второе слагаемое в формуле (130) обращается в нуль ввиду присутствия множителя $\sin n\theta$.

Нам остается теперь только удовлетворить начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(r, \theta). \tag{131}$$

С этой целью, приняв во внимание полученные частные решения, мы ищем $u$ в виде двойного ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} (\alpha_{m,n}^{(1)} \cos \omega_{m,n}t + \alpha_{m,n}^{(2)} \sin \omega_{m,n}t) \cos n\theta \cdot J_n(k_m^{(n)} r) +$$
$$+ \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} (\beta_{m,n}^{(1)} \cos \omega_{m,n}t + \beta_{m,n}^{(2)} \sin \omega_{m,n}t) \sin n\theta \cdot J_n(k_m^{(n)} r).$$

Вычислив:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} (\alpha_{m,n}^{(2)} \cos \omega_{m,n}t - \alpha_{m,n}^{(1)} \sin \omega_{m,n}t) \cos n\theta \cdot J_n(k_m^{(n)} r) +$$
$$+ \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} (\beta_{m,n}^{(2)} \cos \omega_{m,n}t - \beta_{m,n}^{(1)} \sin \omega_{m,n}t) \sin n\theta \cdot J_n(k_m^{(n)} r)$$

и положив в этих формулах $t = 0$, мы, в силу (131), приходим к необходимости разложить данные функции $\varphi_1(r, \theta)$ и $\varphi_2(r, \theta)$ в двойные ряды вида:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta) &= \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} (\alpha_{m,n}^{(1)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(1)} \sin n\theta) \cdot J_n(k_m^{(n)} r), \\ \varphi_2(r, \theta) &= \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \omega_{m,n} (\alpha_{m,n}^{(2)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(2)} \sin n\theta) \cdot J_n(k_m^{(n)} r). \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Разлагая функцию $\varphi_1(r, \theta)$, как периодическую функцию от $\theta$, в обыкновенный ряд Фурье, мы имеем:

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{\varphi_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^{(1)} \cos n\theta + \psi_n^{(1)} \sin n\theta),$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r, \theta) \cos n\theta\, d\theta; \quad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r, \theta) \sin n\theta\, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{133}$$

Сравнивая это разложение с первой из формул (132), находим без труда:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0^{(1)} = 2\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{m,0}^{(1)} J_0(k_m^{(0)}r); \quad \varphi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_{m,n}^{(1)} J_n(k_m^{(n)}r);\\ \psi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{m,n}^{(1)} J_n(k_m^{(n)}r).\end{aligned}\right\} \tag{134}$$

Коэффициенты $\varphi^{(1)}$ и $\psi^{(1)}$ очевидно зависят от $r$, как это показывают их выражения (133). Мы приходим таким образом к задаче о разложении данной функции от $r$ в ряд по функциям $J_n(k_m^{(n)}r)$ — при фиксированном $n$. Имея эти разложения, мы определим коэффициенты $\alpha$ и $\beta$, и поставленная задача будет решена.

Итак, пусть требуется разложить данную функцию $f(r)$ в ряд вида:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n(k_m^{(n)}r). \tag{135}$$

Допустив, что разложение это возможно и может быть интегрируемо почленно, мы покажем только, как определить коэффициенты $A_m$. Для этой цели мы докажем, что функции:

$$J_n(k_1^{(n)}r),\quad J_n(k_2^{(n)}r),\ \ldots,\ J_n(k_m^{(n)}r),\ \ldots$$

обладают свойством *обобщенной ортогональности*, а именно:

$$\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)}r)\, J_n(k_\tau^{(n)}r)\, r\, dr = 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq \tau. \tag{136}$$

Действительно, уравнение (121), если в нем заменить $k^2$ на $k_\sigma^{(n)2}$ и $k_\tau^{(n)2}$ и соответственно $R_n(r)$ на $J_n(k_\sigma^{(n)}r)$ и $J_n(k_\tau^{(n)}r)$, дает нам

$$\frac{d^2J_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr} + \left(k_\sigma^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(k_\sigma^{(n)}r) = 0,$$

$$\frac{d^2J_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr} + \left(k_\tau^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2}\right)J_n(k_\tau^{(n)}r) = 0.$$

Умножив первое уравнение на $rJ_n(k_\tau^{(n)}r)$, второе на $rJ_n(k_\sigma^{(n)}r)$, вычитая и интегрируя по $r$ от 0 до $l$, получим:

$$(k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2})\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)}r)\, J_n(k_\tau^{(n)}r)\, r\, dr =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{d^2J_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\sigma^{(n)}r) - \frac{d^2J_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr^2}J_n(k_\tau^{(n)}r)\right] r\, dr +$$

$$+ \int_0^l \left[\frac{dJ_n(k_\tau^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\sigma^{(n)}r) - \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)}r)}{dr}J_n(k_\tau^{(n)}r)\right] dr.$$

Интегрируя по частям, мы имеем:

$$\int \frac{d^2 J_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, r\, dr = \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\sigma^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} \cdot \frac{d\,[r J_n(k_\sigma^{(n)} r)]}{dr} dr = \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\sigma^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} \cdot \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} r\, dr - \int \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\sigma^{(n)} r)\, dr,$$

и точно так же

$$\int \frac{d^2 J_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr^2} J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr = \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} r J_n(k_\tau^{(n)} r) -$$

$$- \int \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} \cdot \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} r\, dr - \int \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\tau^{(n)} r)\, dr.$$

Отсюда выводим без труда:

$$(k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2}) \int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r) J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr =$$

$$= r \left[ \frac{dJ_n(k_\tau^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\sigma^{(n)} r) - \frac{dJ_n(k_\sigma^{(n)} r)}{dr} J_n(k_\tau^{(n)} r) \right] \Bigg|_{r=0}^{r=l}.$$

По самому определению чисел $k_\sigma^{(n)}$, $k_\tau^{(n)}$ мы имеем:

$$J_n(k_\sigma^{(n)} l) = J_n(k_\tau^{(n)} l) = 0,$$

откуда следует, что правая часть написанного равенства обращается в нуль при $r = l$. Ввиду присутствия множителя $r$ и конечности $J_n(x)$ и $J_n'(x)$ при $x = 0$ можно утверждать, что правая часть обращается в нуль и на нижнем пределе $r = 0$, но так как при $\sigma \neq \tau$ и $k_\sigma^{(n)} \neq k_\tau^{(n)}$, отсюда вытекает:

$$\int_0^l J_n(k_\sigma^{(n)} r) J_n(k_\tau^{(n)} r)\, r\, dr = 0,$$

что и требовалось доказать.

После того как доказана формула (136), определение коэффициентов $A_m$ в разложении (135) не представляет труда: умножив обе части равенства (135) на $J_n(k_p^{(n)} r)$, интегрируя по $r$ от 0 до $l$ и пользуясь формулой (136), мы находим сразу:

$$\int_0^l f(r) J_n(k_p^{(n)} r)\, r\, dr = A_p \int_0^l J_n^2(k_p^{(n)} r)\, r\, dr.$$

Итак, мы можем сказать, что если разложение (135) возможно и его можно почленно интегрировать, то коэффициенты $A_m$ определяются по

34 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

формулам:

$$A_m = \frac{\int\limits_0^l f(r)\, J_n(k_m^{(n)} r)\, r\, dr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r)\, r\, dr}.$$

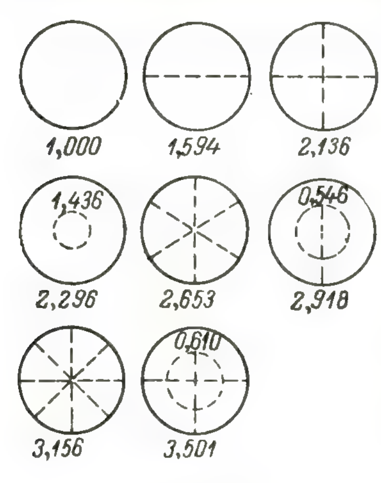
Формулы (133) и (134) дают нам теперь следующие выражения для коэффициентов $\alpha^{(1)}$ и $\beta^{(1)}$:

$$\alpha_{m,0}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\int\limits_0^l \varphi_0^{(1)} J_0(k_m^{(0)} r)\, r\, dr}{\int\limits_0^l J_n^2(k_m^{(0)} r)\, r\, dr} = \frac{1}{2\pi \int\limits_0^l J_0^2(k_m^{(0)} r)\, r\, dr} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_0^l \varphi_1(r, \theta)\, J_0(k_m^{(0)} r)\, r\, dr$$

$$\alpha_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int\limits_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r)\, r\, dr} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_0^l \varphi_1(r, \theta) \cos n\theta J_n(k_m^{(n)} r)\, r\, dr$$

$$\beta_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\pi \int\limits_0^l J_n^2(k_m^{(n)} r)\, r\, dr} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_0^l \varphi_1(r, \theta) \sin n\theta J_n(k_m^{(n)} r)\, r\, dr.$$

Пользуясь теми же соображениями, мы определим и коэффициенты $\alpha^{(2)}$, $\beta^{(2)}$ — нужно только заменить в предыдущих формулах $\varphi_1$ на $\varphi_2$ и разделить соответствующие выражения на $\omega_{m,n}$.



Черт. 137.

Как и в случае прямоугольной мембраны, общее движение круглой мембраны складывается из бесчисленного множества собственных гармонических колебаний, причем одной и той же частоте может соответствовать и бесчисленное множество различных случаев расположения узловых линий. На черт. 137 изображены некоторые случаи расположения узловых линий с указанием соответствующей частоты, причем за единицу принята частота основного тона; здесь же указаны и радиусы узловых линий, имеющих вид окружностей, и эти радиусы выражены в долях радиуса мембраны.

При применении метода Фурье в случае любого контура можно выделить лишь множитель, зависящий от $t$, согласно формуле (106), что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0, \qquad (137)$$

и надо определить те значения параметра $k$, при которых написанное уравнение имеет решения, отличные от нуля, удовлетворяющие предельному

условию (102), а также сами эти решения. В предыдущих примерах это нам удавалось сделать при помощи дальнейшего разделения переменных. В общем случае этот метод не применим, и надо рассматривать непосредственно уравнение (137). Задача, естественно, не решается в явной форме. Теоретическое решение указанной задачи и некоторые качественные результаты, к ней относящиеся, будут даны в томе IV. Предельная задача для волнового уравнения в трехмерном пространстве в случае прямоугольного параллелепипеда решается совершенно так же, как и в [177], но только мы приходим к рядам Фурье по трем переменным $x$, $y$ и $z$. Случай сферы опять приводит к функциям Бесселя. Мы будем говорить об этом в третьем томе, в связи с более подробным изложением теории функций Бесселя.

Подробное исследование сходимости рядов Фурье, получаемых при решении предельных задач для волнового уравнения в случае многих пространственных переменных будет дано в томе IV.

**179. Теорема единственности.** Докажем теперь единственность решения волнового уравнения как в случае безграничного пространства, при заданных начальных условиях, так и при наличии еще предельных условий. Для простоты письма будем считать скорость $a=1$, чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении $t$ на $at$. Для определенности возьмем случай трех независимых переменных, т. е. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{138}$$

и начнем с рассмотрения задачи с одними начальными условиями, заданными на всей плоскости:

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x, y); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x, y). \tag{139}$$

Мы уже имели раньше решение этой задачи [172]. Из самого метода этого решения можно было бы получить и единственность. Мы дадим сейчас другое доказательство единственности, которое будет применимо и для задачи с предельным условием. Если уравнение (138) с начальными условиями (139) имеет два решения: $u_1$ и $u_2$, то разность $u_2-u_1$ должна удовлетворять уравнению (138) и однородным начальным условиям:

$$u\big|_{t=0}=0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0. \tag{140}$$

Надо показать, что при этом $u$ должно тождественно равняться нулю при любых значениях $(x, y)$ и при любом $t>0$. Рассмотрим трехмерное пространство $(x, y, t)$ и возьмем в нем некоторую точку $N(x_0, y_0, t_0)$ такую, что $t_0>0$. Из этой точки, как вершины, проведем коническую поверхность:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(t-t_0)^2=0 \tag{141}$$

до ее пересечения с плоскостью $t=0$. Проведем еще плоскость $t=t_1$, где $0<t_1<t_0$, и пусть $D$ — трехмерная область, ограниченная

боковой поверхностью Г упомянутого конуса и частями плоскостей $t=0$ и $t=t_1$, находящимися внутри конуса ($D$ — усеченный конус). Нетрудно проверить следующее элементарное тождество:

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (142)$$

Проинтегрируем его обе части по упомянутой области $D$. Интеграл от левой части должен обращаться в нуль, поскольку $u$ является решением уравнения (138). Интеграл правой части мы можем преобразовать в интеграл по поверхности области $D$, пользуясь формулой Остроградского:

$$\int\int\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(n,\ t)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,\ x)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,\ y)\right\}ds. \quad (143)$$

На нижнем основании усеченного конуса $D$ функция $u$ и все ее частные производные первого порядка, в силу (140), равны нулю, и интеграл (143) по нижнему основанию равен нулю. На верхнем основании $\sigma_{t_1}$ мы имеем:

$$\cos(n,\ x)=\cos(n,\ y)=0 \quad \text{и} \quad \cos(n,\ t)=1.$$

На боковой поверхности Г конуса направляющие косинусы нормали удовлетворяют соотношению:

$$\cos^2(n,\ t)-\cos^2(n,\ x)-\cos^2(n,\ y)=0,$$

и интеграл (143) по Г может быть переписан в виде:

$$J=\int\int_{\Gamma}\frac{1}{\cos(n,\ t)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,\ t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,\ x)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,\ t)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,\ y)\right]^2\right\}ds,$$

и мы получим окончательно:

$$J+\int\int_{\sigma_{t_1}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0.$$

На поверхности Г имеем $\cos(n,\ t)>0$, и, следовательно, $J\geqslant 0$, а потому:

$$\int\int_{\sigma_{t_1}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]ds=0,$$

откуда следует, что во всех точках внутри полного конуса с вершиной $N(x_0, y_0, t_0)$ частные производные первого порядка функции $u$ равны нулю, и, следовательно, сама функция $u$ — постоянна. На основании конуса она равна нулю в силу (140), а следовательно, $u$ равно нулю и в точке $N$. Приведенное доказательство теоремы единственности без труда может быть распространено и на случай предельной задачи для уравнения (138). Положим, ищется решение уравнения (138) в некоторой области $B$ плоскости $(x, y)$ при заданных начальных и предельных условиях, причем предельные условия относятся к контуру $l$ области $B$. Построим цилиндр с основанием $B$ и с образующими, параллельными оси $t$. Каждой точке этого цилиндра соответствует определенная точка в области $B$ и определенный момент времени $t$. Положим, что в области $B$ мы имеем нулевые начальные данные (140) и пусть на контуре $l$ области $B$ мы имеем однородное предельное условие:

$$u|_l = 0. \tag{144}$$

Докажем, что функция $u$ равна нулю во всех точках упомянутого выше цилиндра. Возьмем такую точку $N$ и проведем через нее конус (141). Пусть $D$ — тело, ограниченное боковой поверхностью этого конуса, упомянутого выше цилиндра и плоскостями $t = 0$ и $t = t_1$. Проинтегрируем опять обе части тождества (142) по этой области. Все рассуждения останутся прежними, но только в правую часть войдет интеграл по боковой поверхности цилиндра. Если этот интеграл окажется равным нулю, то прежнее доказательство теоремы единственности сохранится полностью. В интеграле по боковой поверхности цилиндра подинтегральная функция совпадает с подинтегральной функцией интеграла (143). Но на боковой поверхности цилиндра мы имеем $\cos(n, t) = 0$, и, кроме того, на этой поверхности $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Последнее равенство непосредственно вытекает из того факта, что точки боковой поверхности цилиндра представляют собою точки контура $l$ в различные моменты времени $t$, а на контуре $l$ мы имеем при всяком $t$ однородное предельное условие (144). Таким образом подинтегральная функция интеграла (143) обращается в нуль на всей боковой поверхности цилиндра, и приведенное выше доказательство теоремы единственности сохраняется полностью и для формулированной только что предельной задачи. При доказательстве теоремы единственности нам приходилось интегрировать правую часть выражения (142) по области $D$ и применять формулу Остроградского. Эти операции являются вполне законными, если мы предположим, что функция $u$ имеет непрерывные производные до второго порядка, которые остаются ограниченными внутри области $D$.

Выше мы упоминали, что при исследовании практически интересных задач сталкиваются с необходимостью вводить в рассмотрение

так называемые обобщенные решения. В четвертом томе мы покажем, что теорема единственности имеет место и в этом более широком классе обобщенных решений.

**180. Применение интеграла Фурье.** Рассмотрим волновое уравнение в линейном случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{145}$$

для полубесконечной области $x \geqslant 0$ с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{146}$$

и предельным условием

$$u|_{x=0} = 0. \tag{147}$$

Нетрудно решить эту задачу методом, указанным в [166]. Действительно, достаточно продолжить функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, заданные в промежутке $(0, +\infty)$, на промежуток $(-\infty, 0)$ по закону нечетности и затем применить формулу (17) для бесконечной струны. Полагая в этой формуле $x = 0$, мы получим

$$u|_{x=0} = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \int\limits_{-at}^{+at} \varphi_1(z)\, dz,$$

и оба слагаемых обращаются в нуль в силу нечетности продолжения $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$, так что предельное условие наверно удовлетворено.

Если применим к поставленной задаче метод Фурье, то вместо ряда Фурье получим интеграл Фурье. Как мы видели в [167], применение метода Фурье с учетом предельного условия приводит к решениям вида:

$$u = (A \cos akt + B \sin akt) \sin kx.$$

Второго предельного условия нет, а потому все значения параметра $k$ являются допустимыми, т. е. мы приходим к сплошному спектру возможных частот $k$ полубесконечной струны. Вместо суммирования по дискретным значениям $k$, которое мы применяли в [167], мы в рассматриваемом случае должны применить интегрирование по параметру $k$, считая, конечно, $A$ и $B$ функциями $k$. Таким образом мы получим:

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [A(k) \cos akt + B(k) \sin akt] \sin kx\, dk. \tag{148}$$

Функции $A(k)$ и $B(k)$ должны определяться из начальных условий (146). Они дадут:

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(k) \sin kx\, dk; \qquad \varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ak\, B(k) \sin kx\, dk. \tag{149}$$

Сравнивая эти формулы с формулой Фурье для нечетной функции

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int\limits_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt \right] \sin \alpha x\, d\alpha.$$

мы определяем функции $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\xi)\sin k\xi\, d\xi;\qquad B(k)=\frac{1}{\pi ak}\int_0^\infty \varphi_1(\xi)\sin k\xi\, d\xi,$$

и, подставляя в формулу (148), получаем решение задачи

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^\infty\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi\sin kx\, d\xi\right\}dk,$$

или, принимая во внимание четность подинтегральной функции, как функции от $k$:

$$u(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\left[\varphi(\xi)\cos akt+\frac{1}{ak}\varphi_1(\xi)\sin akt\right]\sin k\xi d\xi\right\}\sin kx\, dk.$$

Нетрудно, пользуясь формулой Фурье, убедиться в том, что правая часть этой формулы совпадает с правой частью формулы (17) при условии нечетности $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$.

Совершенно аналогично можно рассмотреть в случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

предельную задачу для полуплоскости $y\geqslant 0$ с предельным условием

$$u|_{y=0}=0 \tag{150}$$

и любыми начальными условиями:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x,\ y);\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y) \tag{151}$$

$$(-\infty<x<+\infty;\quad y\geqslant 0).$$

Нетрудно проверить, что решение задачи будет давать формула (80) при условии нечетного продолжения функций $\varphi(x,\ y)$ и $\varphi_1(x,\ y)$ по аргументу $y$ на промежуток $(-\infty,\ 0)$. Действительно, при $y=0$ первое слагаемое формулы (80) может быть написано в виде:

$$\frac{1}{2\pi a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\int_{-\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}\frac{\varphi_1(\alpha,\ \beta)}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-\beta^2}}d\beta\right]d\alpha,$$

и внутренний интеграл равен нулю при любых $x$ и $t$, ибо подинтегральная функция есть нечетная функция от $\beta$. Совершенно аналогично и второе слагаемое формулы (80) обращается в нуль, так что условие (150) действительно выполнено. Мы могли бы и для рассматриваемой задачи применить метод Фурье, используя представление функции двух переменных интегралом Фурье. Проверка тождества полученного таким образом решения с решением, определяемым формулой (80), представляет бо́льшие трудности, чем в линейном случае. Совершенно аналогично можно рассмотреть волновое уравнение в полупространстве $z\geqslant 0$ при предельном условии $u=0$ при

$z=0$. Метод Фурье применим и для решения волнового уравнения для безграничного случая, когда имеются только начальные условия. Но его применения приводят к более сложным вычислениям, чем те, которые мы применяли выше.

## § 18. ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ

**181. Основные уравнения.** Оба изложенных выше способа: характеристик (Даламбера) и стоячих волн (Фурье) с успехом прменяются и при исследовании так называемого *телеграфного уравнения*, которое имеет основное значение в теории распространения квазистационарных электрических колебаний по кабелям.

Пусть имеем цепь, состоящую из прямого и обратного проводников длины $l$. Мы будем считать, что по всей этой цепи равномерно распределены рассчитанные на единицу длины омическое сопротивление $R$, самоиндукция $L$, емкость $C$ и утечка изоляции $A$, чем этот случай отличается от разобранного в [I, 181], когда мы имели сопротивление, самоиндукцию и емкость сосредоточенными лишь в отдельных точках цепи, а остальными ее частями мы пренебрегали. Обозначим через $v$ и $i$ напряжение и силу тока в сечении цепи на расстоянии $x$ от конца $x=0$. Эти функции от $x$ и $t$ связаны двумя дифференциальными уравнениями, которые мы сейчас выведем.

Применяя закон индукции к элементу $dx$ цепи, мы должны написать, что падение напряжения в этом элементе

$$v-(v+dv)=-dv=-\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

складывается из омического $R\,dx\cdot i$ и индуктивного $L\,dx\,\frac{\partial i}{\partial t}$, или, разделяя на $dx$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0. \qquad (1)$$

Далее, разность между токами, входящим и выходящим из элемента $dx$, т. е.

$$i-(i+di)=-di=-\frac{\partial i}{\partial x}dx,$$

складывается из токов заряжения $C\,dx\,\frac{\partial v}{\partial t}$ и утечки $A\,dx\cdot v$, что дает:

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0. \qquad (2)$$

Весьма важное значение имеют *предельные условия*, которые должны выполняться на концах цепи. Если конец цепи открыт, то в этом конце мы должны иметь

$$i=0 \quad (\text{при } x=0 \text{ или } x=l). \qquad (3)$$

Вообще, если в конце цепи включена внешняя электродвижущая сила $E$, сопротивление $r$ и самоиндукция $\lambda$, то в этом конце мы должны иметь:

$$v = E + ri + \lambda \frac{di}{dt} \quad (\text{при } x = 0 \text{ или } x = l). \tag{4}$$

В частности, если, например, один конец $x = 0$ поддерживается под напряжением $E$, а другой $x = l$ замкнут накоротко, мы имеем

$$v|_{x=0} = E, \quad v|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

**182. Установившиеся процессы.** Скажем сперва несколько слов об установившихся процессах, когда внешние факторы, действующие на цепь, либо 1) постоянны, либо 2) являются синусоидальными величинами, причем в первом случае мы будем считать $v$ и $i$ независящими от $t$.

**1.** В первом случае уравнения (1) и (2) дают нам

$$\frac{dv}{dx} + Ri = 0; \quad \frac{di}{dx} + Av = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений и принимая во внимание второе, получим

$$\frac{d^2v}{dx^2} - RAv = 0. \tag{7}$$

Функция $v$ определяется сразу по способу, указанному в [**27**], и мы находим

$$v(x) = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}, \tag{8}$$

где

$$b = \sqrt{RA}.$$

Определив $v$, находим $i$ из первого из уравнений (6):

$$i(x) = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dx} = -\frac{b}{R}(C_1 e^{bx} - C_2 e^{-bx}). \tag{9}$$

Примеры. 1. В случае цепи под постоянным напряжением $E$ на одном конце и накоротко замкнутой на другом мы имеем условия (5), из которых определятся произвольные постоянные, входящие в формулу (8):

$$C_1 + C_2 = E; \quad C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{E}{e^{2bl} - 1} = -\frac{Ee^{-bl}}{e^{bl} - e^{-bl}}, \quad C_2 = \frac{Ee^{bl}}{e^{bl} - e^{-bl}},$$

и, подставляя в формулу (8), получим:

$$v(x) = E\frac{e^{b(l-x)} - e^{-b(l-x)}}{e^{bl} - e^{-bl}} = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}, \tag{$10_1$}$$

и формула (9) дает

$$i(x) = E\sqrt{\frac{A}{R}}\,\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} lb}. \qquad (10_2)$$

**2.** Пусть теперь на нашу цепь действует синусоидальная внешняя электродвижущая сила определенной частоты $\omega$; мы можем тогда перейти от действительных физических величин к векторам, как это было сделано в [**I, 180**], и под вынужденными колебаниями будем понимать синусоидальные колебания напряжения и тока цепи той же частоты $\omega$. Вспомнив правила из [**I, 180**] и введя векторы тока $\mathbf{I}$ и напряжения $\mathbf{V}$, которые в рассматриваемом случае зависят от $x$, мы перепишем систему дифференциальных уравнений (1) и (2) в виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx} + (R + i\omega L)\,\mathbf{I} = 0; \qquad \frac{d\mathbf{I}}{dx} + (A + i\omega C)\,\mathbf{V} = 0. \qquad (11)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по $x$ и пользуясь вторым исключим $\mathbf{I}$ и получим:

$$\frac{d^2\mathbf{V}}{dx^2} - (R + i\omega L)(A + i\omega C)\,\mathbf{V} = 0,$$

и совершенно такое же уравнение, как нетрудно показать, можно получить и для $\mathbf{I}$.

Стало быть, $\mathbf{I}$ и $\mathbf{V}$ являются решениями одного и того же дифференциального уравнения 2-го порядка. Применяя способ [**27**] и положив

$$(R + i\omega L)(A + i\omega C) = \varkappa^2, \qquad (12)$$

имеем:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x} + \mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x}, \qquad (13)$$

где $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — произвольные постоянные векторы. Подставив это в первое из уравнений (11), определим вектор

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{R + i\omega L}\,\frac{d\mathbf{V}}{dx} = \sqrt{\frac{A + i\omega C}{R + i\omega L}}\,(\mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x} - \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x}). \qquad (14)$$

Для окончательного решения задачи нужно определить постоянные векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, что можно сделать, воспользовавшись двумя предельными условиями (о начальных условиях здесь, конечно, говорить не приходится), причем вместо того, чтобы дать по одному условию для каждого конца в отдельности, можно задать два условия для одного и того же конца, например, задать там и вектор напряжения и вектор тока.

Как бы то ни было, формулы (13) и (14) определяют векторы вынужденных колебаний, которые зависят от $x$, т. е. меняются вдоль цепи как по амплитуде, так и по фазе. Изображая каждый вектор $(m + ni)$ точкой на плоскости комплексной переменной и меняя $x$ от 0 до $l$, мы получим для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{I}$ две кривые — *векторные диаграммы напряжения и тока*. При определении вида этих кривых нужно помнить, что $\varkappa$ есть, вообще говоря, число комплексное; положив

$$\varkappa = a + ib,$$

мы имеем:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + \mathbf{A}_2 e^{-ax}(\cos bx - i\sin bx).$$

Каждое из слагаемых в правой части дает спираль [**I, 183**], и $\mathbf{V}$ получается путем „геометрического сложения“ этих двух спиралей; радиус-вектор точки кривой $\mathbf{V}$, соответствующий какому-нибудь значению $x$, равен геометрической сумме радиусов-векторов точек этих двух спиралей при том же

значении $x$. То же можно сказать и относительно вектора **I**. Вводя множитель

$$\nu = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{A + i\omega C}}, \tag{15}$$

который называется *волновым сопротивлением*, можно написать выражение для **V** и **I** в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x} + \mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x}; \qquad \mathbf{I} = \frac{1}{\nu}(\mathbf{A}_2 e^{-\varkappa x} - \mathbf{A}_1 e^{\varkappa x}). \tag{16}$$

Если мы перейдем от векторной формы к обычной, то получим для искомых функций $v$ и $i$ выражения вида:

$$v = V(x)\sin[\omega t + \psi(x)]; \qquad i = I(x)\sin[\omega t + \chi(x)], \tag{17}$$

которые и дают гармонические колебания той же частоты $\omega$, что и у внешней силы, и в которых амплитуды $V(x)$ и $I(x)$ и фазы $\psi(x)$ и $\chi(x)$ зависят от положения рассматриваемого сечения цепи.

3. *Цепь под синусоидальным напряжением на одном конце и открытая на другом.* Данный на конце $x = 0$ вектор напряжения обозначим через $\mathbf{V}_0$. Кроме уравнений (11), мы имеем еще предельные условия:

$$\mathbf{V}\big|_{x=0} = \mathbf{V}_0; \qquad \mathbf{I}\big|_{x=l} = 0,$$

которые, в силу формул (16), дают нам:

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{V}_0; \qquad \mathbf{A}_2 e^{-\varkappa l} - \mathbf{A}_1 e^{\varkappa l} = 0.$$

Решая эти уравнения и подставляя в (16), находим без труда:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \frac{\operatorname{ch}\varkappa(l - x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}; \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_0}{\nu}\frac{\operatorname{sh}\varkappa(l - x)}{\operatorname{ch}\varkappa l}.$$

При $x = 0$ мы получаем комплексное сопротивление в точке $x = 0$ в виде:

$$\varphi_0 = \nu \frac{\operatorname{ch}\varkappa l}{\operatorname{sh}\varkappa l}.$$

**183. Устанавливающиеся процессы.** Сравним между собой два типа вынужденных колебаний в одной и той же цепи под действием различных внешних факторов. Эти колебания обозначим номерами (I) и (II). Напряжения и ток колебаний типа (I) обозначим через $v_1$, $i_1$, а те же величины типа (II) — через $v_2$, $i_2$.

Если мы внезапно заменим внешние условия, при которых имеют место колебания (I), на те, при коих должен получиться тип (II), то система не сразу перейдет от (I) к (II), а только по истечении более или менее продолжительного промежутка времени, который теоретически может быть равен бесконечности, но практически конечен; в цепи возникнут *свободные колебания* (или *устанавливающиеся*), которые характеризуются величинами напряжения $v$ и тока $i$, причем мы будем считать, что во время переходного процесса состояние линии получается путем сложения состояния (II) со свободными затухающими колебаниями, т. е. напряжение и ток переходного процесса определяются суммами:

$$v_2 + v; \quad i_2 + i. \tag{18}$$

При $t=0$, т. е. в начале переходного процесса, эти суммы должны обращаться в $v_1$ и $i_1$. Функции $v$ и $i$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (1) и (2) [181] и предельным условиям (3) или (4), в зависимости от условий на концах. Сверх того, они должны удовлетворять и начальным условиям вида:

$$\left.\begin{aligned} v|_{t=0} &= (v_1 - v_2)|_{t=0} = g(x); \\ i|_{t=0} &= (i_1 - i_2)_{t=0} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, h(x).^{1)} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Функции $v$ и $i$ мы будем искать не непосредственно, а выразив их через одну новую неизвестную функцию $w$, для чего положим:

$$v = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение (2) дает тогда:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(i + C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw\right) = 0,$$

откуда

$$i + C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = c,$$

где $c$ не зависит от $x$. Не ограничивая общности, мы можем, однако, считать $c=0$, ибо, не изменяя величины $v=\frac{\partial w}{\partial x}$, можем прибавлять к $w$ произвольное слагаемое, не зависящее от $x$.

Итак, мы имеем:

$$v = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad i = -C\frac{\partial w}{\partial t} - Aw, \qquad (20)$$

и уравнение (2) удовлетворено. Подставив (20) в уравнение (1), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция $w(x, t)$, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw\right) - R\left(C\frac{\partial w}{\partial t} + Aw\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (LA + RC)\frac{\partial w}{\partial t} - RAw = 0. \qquad (21)$$

Это уравнение называется *телеграфным уравнением*.

Для упрощения его введем новую неизвестную функцию $u(x, t)$ по формуле

$$w(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t) \qquad (22)$$

---

1) Множитель $\sqrt{\frac{C}{L}}$ введен для упрощения последующих выкладок.

и постараемся подобрать постоянный множитель $\mu$ так, чтобы в уравнении для $u$ пропал член, содержащий $\frac{\partial u}{\partial t}$. Дифференцируя и сокращая на $e^{-\mu t}$, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC\left(\mu^2 u - 2\mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - (LA + RC)\left(-\mu u + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - RAu = 0,$$

и для указанной цели достаточно выбрать $\mu$ под условием

$$2\mu LC - (LA + RC) = 0,$$

т. е.

$$\mu = \frac{LA + RC}{2LC}. \tag{23}$$

Подставив это значение $\mu$, мы после простых преобразований получим для $u$ уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta^2 u \tag{24}$$

где

$$\delta = \frac{LA - RC}{2LC}.$$

Разберем сначала тот случай, когда величиной $\delta$ можно пренебречь, или она в точности равна нулю, т. е.

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}. \tag{25}$$

В этом случае

$$\mu = \frac{R}{L}, \tag{26}$$

и, положив

$$\frac{1}{LC} = a^2, \tag{27}$$

для $u$ получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{28}$$

изученное выше.

Его общее решение есть [**164**]:

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at), \tag{29}$$

*и постоянная* $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ *дает скорость распространения возмущения по кабелю.* Формула (22) дает

$$w(x, t) = e^{-\mu t}[\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)],$$

и, наконец, из формул (20) получаем:

$$v(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} = e^{-\mu t}[\theta_1'(x - at) + \theta_2'(x + at)],$$

$$\begin{aligned} i(x, t) = -C\frac{\partial w}{\partial t} - Aw = -e^{-\mu t}[-aC\theta_1'(x - at) + aC\theta_2'(x + at) - \\ - \mu C\theta_1(x - at) - \mu C\theta_2(x + at) + A\theta_1(x - at) + A\theta_2(x + at)] = \\ = aCe^{-\mu t}[\theta_1'(x - at) - \theta_2'(x + at)], \end{aligned}$$

ибо, в силу (26) и (25), очевидно $\mu C = A$, и остальные члены сокращаются. Вместо произвольных функций $\theta_1$ и $\theta_2$ удобнее ввести непосредственно функции

$$\varphi_1(x) = \theta_1'(x) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \theta_2'(x),$$

после чего получаем окончательное выражение для $v$ и $i$ в виде:

$$\left.\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\mu t}[\varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at)], \\ i(x, t) &= \frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x + at)], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где для краткости положено $\alpha = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Именно этими выражениями мы и будем пользоваться. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определяются по начальным условиям (19), которые дают нам:

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = g(x); \qquad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = h(x),$$

откуда

$$\varphi_1(x) = \frac{g(x) + h(x)}{2}; \qquad \varphi_2(x) = \frac{g(x) - h(x)}{2}. \tag{31}$$

Задачу можно было бы считать решенной, если бы функции $g(x)$ и $h(x)$, или, что то же самое, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ были заданы во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$; на самом деле, однако, они известны лишь в промежутке $(0, l)$, и для того, чобы воспользоваться полученным решением, нужно *продолжить их вне этого промежутка*. Это можно сделать с помощью предельных условий, как и в случае струны, и здесь *физический смысл этого продолжения есть не что иное, как отражение волны в том или ином виде от концов цепи.*

Явления, которые соответствуют полученному решению (30), аналогичны разобранным выше в случае струны. Мы имеем здесь две волны, прямую и обратную, которые, дойдя до концов, отражаются от них. Существенное различие со случаем струны заключается в наличии множителя $e^{-\mu t}$, который убывает с течением времени и вызывает *затухание колебаний*, тем более быстрое, чем больше показатель $\mu$ — *логарифмический декремент затухания.*

**184. Примеры.** *Если конец* $x = l$ открыт, то условие

$$i|_{x=l} = 0$$

дает нам в силу (30)

$$\varphi_2(l + at) = \varphi_1(l - at)$$

или, заменив $at$ на $x$:

$$\varphi_2(l + x) = \varphi_1(l - x),$$

т. е. в этом конце *волна отражается, оставаясь неизменной и по величине и по знаку*, так как функция $\varphi_2(x)$ есть четное продолжение функции $\varphi_1(x)$. То же, понятно, получится, если открытый конец будет в точке $x = 0$.

*Если конец $x = l$ накоротко замкнут*, т. е.

$$v|_{x=l} = 0,$$

то, принимая во внимание (30) и заменяя $at$ на $x$, получим:

$$\varphi_2(l + x) = -\varphi_1(l - x),$$

т. е. *волна отражается, сохраняя абсолютную величину, но меняя знак*, ибо функция $\varphi_2(x)$ есть нечетное продолжение функции $\varphi_1(x)$. Дальнейшее продолжение идет так же, как и в случае струны.

**1.** В открытую на конце цепь включается переменный гармонический ток частоты $\omega$. Окончательно установившемуся состоянию (II) будут соответствовать гармонические колебания частоты $\omega$, которые были выведены выше [**182**]:

$$v_2 = V(x)\sin[\omega t + \psi(x)]; \qquad i_2 = I(x)\sin[\omega t + \chi(x)].$$

Если до включения цепь была пуста, то мы имеем:

$$v_1 = 0, \quad i_1 = 0.$$

Поэтому, в силу формул (19), начальные условия будут:

$$v|_{t=0} = -V(x)\sin\psi(x) = g(x),$$

$$i|_{t=0} = -I(x)\sin\chi(x) = \frac{1}{\alpha}h(x).$$

Предельные условия будут следующие: на открытом конце $x = l$ должно быть

$$i|_{x=l} = 0.$$

На конце $x = 0$ мы можем считать

$$v|_{x=0} = 0,$$

ибо в рассматриваемом устанавливающемся процессе нас интересуют только те колебания, которые происходят от различия начальных условий цепи с вынужденными колебаниями частоты $\omega$. По формулам (31) определяем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, а затем продолжаем их нечетным образом через конец $x = l$ и четным — через конец $x = 0$.

**2.** Рассмотрим затухающий процесс, происходящий при начальных условиях

$$v|_{t=0} = -E; \qquad i|_{t=0} = 0,$$

где $E$ — постоянная, и при предельных условиях

$$v|_{x=0} = 0; \qquad i|_{x=l} = 0.$$

Формулы (31) дают

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = -\frac{E}{2} \quad \text{при} \quad 0 < x < l,$$

а из предельных условий получаем:

$$\varphi_1(-x) = -\varphi_2(x); \qquad \varphi_1(l - x) = \varphi_2(l + x), \tag{32}$$

откуда видно, что $\varphi_2(x)$ продолжает в промежуток $(l, 2l)$ функцию $\varphi_1(x)$ четным образом, а функция $\varphi_1(x)$ продолжает в промежуток $(-l, 0)$

функцию $\varphi_2(x)$ нечетным образом, т. е.

$$\varphi_2(x) = -\frac{E}{2} \quad \text{при} \quad 0 < x < 2l$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{E}{2} & \text{при} \quad -l < x < 0 \\ -\dfrac{E}{2} & \text{при} \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

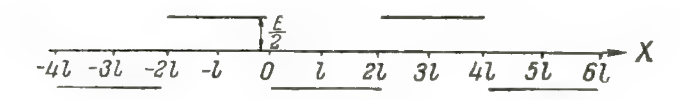
Заменяя во втором из уравнений (32) $x$ на $(l + x)$ и сравнивая полученное равенство с первым из равенств (32), будем иметь:

$$\varphi_2(2l + x) = -\varphi_2(x),$$

и точно так же нетрудно получить:

$$\varphi_1(2l - x) = -\varphi_1(-x),$$

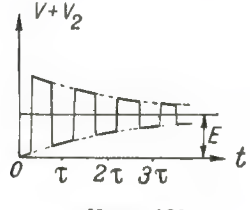
т. е. функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при прибавлении к аргументу $2l$ меняют знак и периодом для них будет только $4l$.




Черт. 138.

Сопоставляя все сказанное, нетрудно видеть, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают и имеют график, изображенный на черт. 138.

Для получения значений $v$ и $i$ мы двигаем этот график со скоростью $a$ налево и направо и берем полусумму ординат, умноженную на $e^{-\mu t}$ для $v$ и полуразность, умноженную на $\frac{1}{\alpha} e^{-\mu t}$, для $i$.




Черт. 139.

На черт. 139 изображен график напряжения на конце $x = l$, причем к свободному колебанию $v$ прибавлено установившееся $v_2 = E$. Буква $\tau = \frac{4l}{a}$ обозначает период свободного колебания.

Если на конце $x = l$ включены омическое сопротивление $r_l$, самоиндукция $\lambda_l$ и емкость $\gamma_l$, то условие (4) дает следующее соотношение для продолжения функции $\varphi_2(x)$ в промежуток $(l, 2l)$:

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l - at) + \varphi_2(l + at)] = \left[r_l + \lambda_l \frac{d}{dt}\right]\left\{\frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(l - at) - \varphi_2(l + at)]\right\}. \quad (33)$$

Если заменить в нем аргумент $at$ на $x$, то оно превращается в дифференциальное уравнение для определения неизвестной функции

$$\Phi(x) = \varphi_2(l + x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l.$$

Аналогичный результат мы получаем, пользуясь предельным условием на конце $x = 0$, и для продолжения $\varphi_1(x)$ в промежуток $(-l, 0)$.

3. В конце $x = l$ включено только омическое сопротивление $r_l$. Равенство (33) заменяется тогда следующим:

$$e^{-\mu t}[\varphi_1(l - at) + \varphi_2(l + at)] = r_l \frac{e^{-\mu t}}{\alpha}[\varphi_1(l - at) - \varphi_2(l + at)],$$

откуда, вводя $x$ вместо $at$, определяем $\varphi_2(l + x)$:

$$\varphi_2(l + x) = q\varphi_1(l - x), \quad \text{где} \quad q = \frac{r_l - \alpha}{r_l + \alpha}. \tag{34}$$

Таким образом в данном случае при отражении в конце $x = l$ волна умножается на множитель $q$. Очевидно, что $|q| \leqslant 1$, т. е. волна уменьшается по абсолютному значению, и происходит *поглощение*. При $r_l = \alpha$ этот множитель обращается в нуль, и происходит *полное поглощение волны*; при $r_l = \infty$ множитель $q = 1$, и мы получаем отражение волны без изменения, что и следовало ожидать, так как этот случай равносилен открытому (не замкнутому) контуру.

Продолжив таким путем $\varphi_2(x)$ в промежуток $(l, 2l)$ и соответственным образом $\varphi_1(x)$ в промежуток $(-l, 0)$, мы по формуле (34) продолжаем $\varphi_2(x)$ в промежуток $(2l, 3l)$ и т. д.

При этом, конечно, мы уже не получаем периодической функции, и если $|q| < 1$, то при последовательных отражениях будет происходить все более и более сильное поглощение волны. Функция $\varphi_2(x)$ будет определена таким образом при $x > 0$, функция же $\varphi_1(x)$ — при $x < l$; но это только нам и нужно, так как аргументы $(x - at)$ и $(x + at)$, от которых зависят $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, как раз удовлетворяют этим неравенствам.

**185. Обобщенное уравнение колебаний струны.** Мы рассмотрели телеграфное уравнение в частном случае $\delta = 0$. Прежде чем переходить к общему случаю, исследуем теоретически обобщенное волновое уравнение пока в линейном случае:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial v}{\partial x} + a_2 \frac{\partial v}{\partial t} + a_3 v, \tag{35}$$

причем первый коэффициент $a^2$ мы считаем положительным, а остальные — любых знаков. Введем вместо $v$ новую искомую функцию $u$ по формуле

$$v = e^{\alpha t + \beta x} u \tag{36}$$

и покажем, как и выше, что всегда можно выбрать числа $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы в уравнении для $u$ пропали члены, содержащие частные производные первого порядка. Подставляя выражение (36) в уравнение (35), сокращая на $e^{\alpha t + \beta x}$ и приводя подобные члены, придем к уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_1 + 2a^2\beta)\frac{\partial u}{\partial x} + (a_2 - 2\alpha)\frac{\partial u}{\partial t} + \\ + (a_3 + a^2\beta^2 + a_1\beta + a_2\alpha - \alpha^2)\, u,$$

и, полагая $\alpha = a_2 : 2$; $\beta = -a_1 : 2a^2$, придем к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u, \tag{37}$$

причем коэффициент $c^2$ может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. мы должны считать $c$ или положительным числом или чисто мнимым.

Будем решать уравнение (37) для бесконечной оси $X$ при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\omega(x). \tag{38}$$

Вместо поставленной задачи, определяемой формулами (37) и (38), будем решать другую задачу, определяемую следующим уравнением и начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{$39_1$}$$

$$w\Big|_{t=0}=0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=w(x)e^{\frac{c}{a}y}. \tag{$39_2$}$$

Решение этой задачи мы можем непосредственно написать, согласно формуле (80) из [**172**]:

$$w(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}}\frac{\omega(\alpha)e^{\frac{c}{a}\beta}\,d\alpha\,d\beta}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2-(\beta-y)^2}},$$

где $C_{at}$ — круг с центром $(x,\ y)$ и радиусом $at$. Вводя вместо $\alpha$ и $\beta$ новые переменные $\alpha'=\alpha-x$ и $\beta'=\beta-y$, преобразуем написанный двойной интеграл по кругу $C'_{at}$ с центром в начале и радиусом $at$:

$$w(x,\ y,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C'_{at}}\frac{\omega(\alpha'+x)e^{\frac{c}{a}(\beta'+y)}\,d\alpha'\,d\beta'}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}}$$

или, вынося $e^{\frac{c}{a}y}$ за знак интеграла, можем написать

$$w(x,\ y,\ t)=e^{\frac{c}{a}y}u(x,\ t), \tag{40}$$

где второй множитель

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C'_{at}}\frac{\omega(\alpha'+x)e^{\frac{c}{a}\beta'}\,d\alpha'\,d\beta'}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}} \tag{41}$$

уже не зависит, очевидно, от $y$. Покажем, что выражение (41) и решает нашу основную задачу, т. е. удовлетворяет уравнению (37) и начальным условиям (38). Действительно, $w$ удовлетворяет уравнению $(39_1)$, и, подставляя выражение (40) в уравнение $(39_1)$, получим

после сокращения на $e^{\frac{c}{a}y}$ уравнение (37) для $u$. Начальные условия для $u$ получаются непосредственно из начальных условий $(39_2)$ для $w$ и формулы (40). Итак, решение уравнения (37) при начальных условиях (38) дается формулой (41). Преобразуем выражение, стоящее в правой части этой формулы, к другому виду.

Приводим двойной интеграл по кругу $C'_{at}$ к двум квадратурам

$$u(x, t) = \\ = \frac{1}{2\pi a} \int_{-at}^{+at} \left[ \int_{-\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}}^{+\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}} \frac{e^{\frac{c}{a}\beta'}}{\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2-\beta'^2}} d\beta' \right] \omega(\alpha'+x)\, d\alpha'. \quad (42)$$

Вводя во внутреннем интеграле вместо $\beta'$ новую переменную интегрирования $\varphi$ по формуле: $\beta' = \sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi$, приведем этот интеграл к виду:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\sin\varphi}\, d\varphi$$

или, вводя новую трансцендентную функцию $I(z)$, определяемую интегралом, зависящим от параметра $z$:

$$I(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{z\sin\varphi}\, d\varphi, \quad (43)$$

можем написать формулу (42) в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-\alpha'^2}\right) \omega(\alpha'+x)\, d\alpha',$$

или, вводя переменную интегрирования $\alpha = \alpha' + x$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right) \omega(\alpha)\, d\alpha.$$

Дифференцируя полученное решение по $t$, получим, как и в [**171**], новое решение $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$ уравнения (37), удовлетворяющее уже не

начальным условиям (38), а условиям:

$$u\Big|_{t=0}=\omega(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \tag{44}$$

Для того чтобы получить решение уравнения (37), удовлетворяющее начальным условиям общего вида:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x), \tag{45}$$

достаточно в начальных условиях (38) взять $\omega(x)=\varphi_1(x)$, в начальных условиях (44) взять $\omega(x)=\varphi(x)$ и сложить соответствующие выражения для $u$, что приведет нас к формуле

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)\,d\alpha+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha\right]. \tag{46}$$

Производя дифференцирование по $t$ по верхнему и нижнему пределам, а также под знаком интеграла, и, принимая во внимание, что $I(0)=1$ в силу (43), можем переписать формулу (46) в виде:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi_1(\alpha)\,d\alpha+$$
$$+\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}I'\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha, \tag{47}$$

где через $I'(z)$ мы обозначили производную от $I(z)$ по аргументу $z$.

Установим теперь связь между функцией $I(z)$ и функцией Бесселя с нулевым значком [**48**]:

$$J_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}. \tag{48}$$

Разлагая $e^{z\sin\varphi}$ в степенной ряд

$$e^{z\sin\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\sin^n\varphi}{n!}$$

и интегрируя этот ряд почленно по промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, что возможно ввиду равномерной сходимости ряда, получим:

$$I(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\,d\varphi.$$

При нечетном $n$ написанные интегралы обращаются, очевидно, в нуль, а при четном $n=2s$ мы имеем [I, **100**]:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2s}\varphi\,d\varphi=\frac{(2s-1)(2s-3)\ldots1}{2s\cdot(2s-2)\ldots2}\pi,$$

откуда следует

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s}}{(2s)!}\cdot\frac{(2s-1)(2s-3)\ldots1}{2s\cdot(2s-2)\ldots2},$$

или

$$I(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(s!)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}. \tag{49}$$

Сравнивая это разложение с (48), мы получаем

$$I(z)=J_0(iz). \tag{50}$$

**186. Неограниченная цепь в общем случае.** Переходим теперь к рассмотрению телеграфного уравнения для неограниченной цепи. Предварительно заметим, что уравнение (21), которое мы получили в [**183**] для вспомогательной функции $w$, будет также уравнением, которому должны удовлетворять в отдельности напряжение $v$ и ток $i$.

Действительно, вернемся к основным уравнениям (1) и (2) и исключим $i$. Для этого продифференцируем уравнение (1) по $x$ и подставим вместо $\frac{\partial i}{\partial x}$ его выражение, получаемое из уравнения (2):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+L\frac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial x}+R\frac{\partial i}{\partial x}=0,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-L\frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)-R\left(C\frac{\partial v}{\partial t}+Av\right)=0$$

и для $v$ получаем уравнение (21):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (LA + RC)\frac{\partial v}{\partial t} - RAv = 0. \tag{51}$$

Если бы мы стали исключать из уравнений (1) и (2) напряжение $v$, то получили бы для $i$ такое же уравнение.

Определив $v$, мы можем найти $i$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнениям (1) и (2). Например, пользуясь уравнением (2), получим

$$i = -\int\left(C\frac{\partial v}{\partial t} + Av\right)dx + B(t), \tag{52}$$

где интегрирование совершается по $x$ при постоянном $t$ и $B(t)$ — произвольная пока функция от $t$. Подставляя это выражение $i$ в уравнение (1) и дифференцируя по параметру $t$ под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \int\left(LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + LA\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx - \int\left(RC\frac{\partial v}{\partial t} + RAv\right)dx + \\ + LB'(t) + RB(t) = 0. \tag{53}$$

Дифференцируя сумму первых трех слагаемых по $x$, в силу (51) получим нуль, т. е. эта сумма есть некоторая известная функция одного $t$, и для определения $B(t)$ получаем линейное уравнение первого порядка. Произвольная постоянная, получаемая при его интегрировании, определяется обычно из начального условия.

Уравнение (51), как и выше [**183**], приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u \tag{54}$$

при помощи подстановки

$$v(x, t) = e^{-\mu t}u(x, t), \tag{55}$$

где

$$\mu = \frac{LA + RC}{2LC}, \qquad c = \frac{|LA - RC|}{2LC}. \tag{56}$$

Если при $t = 0$ нам заданы вдоль цепи $v$ и $i$, то тем самым мы знаем $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial i}{\partial x}$ при $t = 0$, а уравнения (1) и (2) дадут нам $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial i}{\partial t}$ при $t = 0$. Таким образом, мы можем считать, что наряду с уравнением (51) мы имеем обычные начальные условия:

$$v\Big|_{t=0} = \Phi(x); \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Psi(x). \tag{57}$$

Пользуясь (55), мы получаем следующие начальные условия для $u$:

$$u\Big|_{t=0} = \Phi(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mu\Phi(x) + \Psi(x) \tag{58}$$

Применяя для $u$ формулу (47) и принимая во внимание (55), получим окончательно:

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2}e^{-\mu t}\Big\{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at}[\mu\Phi(\alpha)+\Psi(\alpha)]\,I\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)d\alpha+$$

$$+\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}}\,I'\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2t^2-(\alpha-x)^2}\right)\Phi(\alpha)\,d\alpha\Big\},\qquad(59)$$

где $\mu$ и $c$ указаны выше, и $a=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Здесь, как и в случае колебания струны, мы имеем определенную скорость $a$ распространения возмущения, так что если функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, дающие начальное возмущение, отличны от нуля только в некотором конечном промежутке $p\leqslant x\leqslant q$, и мы применим формулу (57) к точке $x$, где $x>q$, то $v(x,\ t)$ будет равно нулю до момента времени $t=\dfrac{1}{a}(x-q)$. Существенной разницей по сравнению со струной будет тот факт, что после прохождения заднего фронта начального возмущения функция $v(x,\ t)$ не обратится ни в нуль, ни в постоянную, но будет функцией $x$ и $t$. Действительно, если $t>\dfrac{1}{a}(x-p)$, то слагаемые формулы (59), стоящие вне знака интеграла, будут равны нулю, а интегралы останутся, и промежутком интегрирования будет постоянный промежуток $(p,\ q)$. Но все же переменные $x$ и $t$ будут входить под знаки интегралов в качестве параметров.

Если, например, при $t=0$ в цепи отсутствует ток, а потенциал $v$ определяется функцией $\Phi(x)$, то, в силу уравнения (2), мы имеем

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{A}{C}\Phi(x).\qquad(60)$$

Если считать $A=0$, т. е. пренебречь утечкой, то справа будет нуль.

**187. Способ Фурье для ограниченной цепи.** Нетрудно применить способ Фурье для интегрирования уравнения (51) при заданных начальных и предельных условиях в случае ограниченной цепи. Положим, что один конец цепи $x=0$ поддерживается при заданном постоянном напряжении $E$, а на другом конце $v=0$, т. е. имеются предельные условия:

$$v|_{x=0}=E\quad\text{и}\quad v|_{x=l}=0.\qquad(61)$$

Положим, кроме того, что в начальный момент $t=0$ в цепи нет ни напряжения, ни тока, т. е.

$$v\big|_{t=0}=0 \quad \text{и} \quad i\big|_{t=0}=0 \tag{62}$$

при $0<x<l$.

Уравнения (1) и (2) показывают нам, что при этом

$$\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial i}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0. \tag{63}$$

Таким образом нам надо интегрировать уравнение (51) при предельных условиях (61) и при начальных условиях

$$v\big|_{t=0}=0; \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \qquad (0<x<l). \tag{64}$$

Составим сначала решение уравнения (51) $v=F(x)$, зависящее только от $x$, которое бы удовлетворяло предельным условиям (61). Для $F(x)$ получаем уравнение

$$F''(x)-b^2F(x)=0 \qquad (b^2=RA).$$

В примере из **[182]** мы нашли как раз решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (61), а именно:

$$F(x)=E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl}. \tag{65}$$

Введем теперь вместо $v(x, t)$ новую искомую функцию $w(x, t)$ по формуле:

$$w(x, t)=v(x, t)-F(x). \tag{66}$$

Для $w(x, t)$ мы имеем то же уравнение (51), однородные предельные условия

$$w\big|_{x=0}=0; \quad w\big|_{x=l}=0 \tag{67}$$

и начальные условия

$$w\big|_{t=0}=-F(x); \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0. \tag{68}$$

Для сокращения письма перепишем уравнение (51) для $w$ в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2h\frac{\partial w}{\partial t}-b^2w=0, \tag{69}$$

где

$$a^2=LC; \qquad 2h=LA+RC; \qquad b^2=RA. \tag{70}$$

Дальше идет обычное применение метода Фурье. Ищем решение уравнения (69) в виде произведения функции только от $x$ на функцию только от $t$:

$$w=XT.$$

Подставляя в уравнение (69) и отделяя переменные, получим:

$$\frac{X''}{X} = \frac{a^2T'' + 2hT' + b^2T}{T} = -\frac{m^2\pi^2}{l^2},$$

где $m^2$ — пока произвольная постоянная. Имеем два линейных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$X'' + \frac{m^2\pi^2}{l^2} X = 0$$

$$a^2T'' + 2hT' + \left(b^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right) T = 0.$$

Принимая во внимание предельные условия (67), берем решение первого уравнения

$$X_m = \sin\frac{m\pi x}{l} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и считаем $m$ целым положительным числом. Уравнение для $T$ имеет общее решение

$$T_m = A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t},$$

где $A_m$ и $A'_m$ — произвольные постоянные, а $\alpha_m$ и $\alpha'_m$ — корни уравнения

$$a^2l^2\alpha^2 + 2hl^2\alpha + (b^2l^2 + m^2\pi^2) = 0, \tag{71}$$

причем мы считаем, что постоянные $R$, $L$, $C$ и $A$ у цепи таковы, что это уравнение при всяком целом $m$ имеет различные корни. Таким образом получаем бесчисленное множество решений, удовлетворяющих предельным условиям:

$$w_m = (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{72}$$

Берем сумму этих решений:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m e^{\alpha_m t} + A'_m e^{\alpha'_m t}) \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{73}$$

и подбираем постоянные $A_m$ и $A'_m$ так, чтобы удовлетворялись начальные условия (68). Это дает нам:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} (A_m + A'_m) \sin\frac{m\pi x}{l} = -F(x) \\ &\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m) \sin\frac{m\pi x}{l} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < l)$$

Определяя обычным образом коэффициенты Фурье, получим два уравнения для $A_m$ и $A'_m$:

$$\left.\begin{aligned} A_m + A'_m &= -\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \\ \alpha_m A_m + \alpha'_m A'_m &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Вставляя под знак интеграла функцию (65), мы сможем выполнить квадратуру и получим:

$$\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}E.$$

Решая систему двух уравнений (74), будем иметь

$$A_m = \frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot E\frac{\alpha'_m}{\alpha_m-\alpha'_m}; \qquad A'_m = -\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot E\frac{\alpha_m}{\alpha_m-\alpha'_m}.$$

Подставив это в формулу (73), получим:

$$w = E\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot\frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t}-\alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m-\alpha'_m}\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{75}$$

Корни уравнения (71) будут или вещественные отрицательные, или мнимые сопряженные с отрицательной вещественной частью. Во всяком случае решение (75) будет затухающим при возрастании $t$. Оно определяет переходный процесс от пустой цепи к установившемуся состоянию, определяемому функцией (65). Формула (66) дает нам окончательное выражение напряжения:

$$v = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} + E\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cdot\frac{\alpha'_m e^{\alpha_m t}-\alpha_m e^{\alpha'_m t}}{\alpha_m-\alpha'_m}\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{76}$$

Решая квадратное уравнение (71), получим для его корней выражения вида

$$\alpha_m = -\nu + k_m, \qquad \alpha'_m = -\nu - k_m, \tag{77}$$

где

$$\nu = \frac{h}{a^2}; \qquad k_m = \frac{1}{a^2 l}\sqrt{h^2l^2 - a^2(b^2l^2+m^2\pi^2)}. \tag{78}$$

Подставляя в (76), можем представить эту формулу в виде:

$$v = E\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - \\ - Ee^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{79}$$

Определим теперь $i$ по способу, указанному в предыдущем параграфе. Уравнение (2) дает нам:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -AE\frac{\operatorname{sh} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} +$$

$$+AEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\sin\frac{m\pi x}{l} +$$

$$+CEe^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m\pi}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(k_m - \frac{\nu^2}{k_m}\right)\operatorname{sh} k_m t \sin\frac{m\pi x}{l},$$

или, замечая, что в силу (78),

$$\nu^2 - k_m^2 = \frac{b^2l^2+m^2\pi^2}{a^2l^2},$$

получим, интегрируя по $x$ и принимая во внимание, что $a^2 = LC$:

$$i = \frac{AE}{b}\cdot\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} -$$

$$-2AEle^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2l^2+m^2\pi^2}\left(\operatorname{ch} k_m t + \frac{\nu}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\right)\cos\frac{m\pi x}{l} +$$

$$+\frac{2E}{Ll}e^{-\nu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k_m}\operatorname{sh} k_m t\cos\frac{m\pi x}{l} + B(t). \tag{80}$$

Подставляя в уравнение (1), получаем уравнение для определения $B(t)$:

$$LB'(t) + RB(t) = 0,$$

откуда

$$B(t) = B_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{81}$$

где $B_0$ — произвольная постоянная, которую надо определить из того условия, что $i$ при $t = 0$ равно нулю вдоль всей цепи. Подставляя выражение (81) в формулу (80) и полагая затем $t = 0$ и $i = 0$, получим:

$$0 = \frac{AE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} - 2AEl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{l} + B_0. \tag{82}$$

Но, разлагая первое слагаемое, стоящее справа, в ряд Фурье, в промежутке $0 < x < l$ по косинусам, мы получаем:

$$\frac{AE}{b}\frac{\operatorname{ch} b(l-x)}{\operatorname{sh} bl} = \frac{AE}{lb^2} + 2AEl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{b^2l^2+m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{l} \quad (0 < x < l),$$

и условие (82) дает

$$B_0 = -\frac{AE}{lb^2} = -\frac{E}{Rl},$$

так что

$$B(t) = -\frac{E}{Rl}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Подставляя это выражение $B(t)$ в формулу (80), получаем окончательное выражение силы тока.

Подробное исследование приведенного метода решения можно найти в статье акад. А. Н. Крылова „О распространении тока по кабелю“ (Журнал прикладной физики, том VI, вып. 2, стр. 66, 1929).

**188. Обобщенное волновое уравнение.** В [185] мы рассмотрели обобщенное волновое уравнение в линейном случае, т. е. с двумя независимыми переменными. Пользуясь тем же методом, можно рассмотреть обобщенное волновое уравнение с тремя и четырьмя независимыми переменными. Для упрощения дальнейших формул мы будем считать, что в волновом уравнении скорость $a=1$. Чтобы из полученных ниже формул перейти к формулам с любым $a$, достаточно заменить в них $t$ на $at$.

Рассмотрим для безграничной плоскости уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 u \tag{83}$$

с начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x, y). \tag{84}$$

Рассмотрим вместо этой задачи — новую, а именно задачу интегрирования волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

с начальными условиями

$$w\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x, y)e^{cz}.$$

Новая задача непосредственно решается формулой Пуассона:

$$w = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \omega(x + t\sin\theta\cos\varphi,\ y + t\sin\theta\sin\varphi)\, e^{c(z + t\cos\theta)}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Мы можем переписать эту формулу в виде:

$$w(x, y, z, t) = e^{cz}u(x, y, t),$$

где

$$u(x, y, t)=$$

$$=\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\omega(x+t\sin\theta\cos\varphi,\ y+t\sin\theta\sin\varphi)e^{ct\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{85}$$

и, совершенно так же, как и в [**185**], доказывается, что эта функция удовлетворяет уравнению (83) и начальным условиям (84). Преобразуем теперь формулу (85) к более простому виду. Введем вместо $\theta$ новую переменную интегрирования $\rho$ по формуле: $t\cos\theta=\rho$, откуда

$$t\sin\theta\,d\theta=-d\rho \quad \text{и} \quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{\rho^2}{t^2}}.$$

Интегрирование по $\theta$ в формуле (85) в новой переменной будет иметь вид:

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{+t}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)e^{c\rho}\,d\rho,$$

или, разбивая промежуток интегрирования на два: $(-t,\ 0)$ и $(0,\ t)$ и заменяя в первом промежутке $\rho$ на $(-\rho)$, мы сможем записать последний интеграл в виде:

$$\frac{2}{t}\int_0^t\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\operatorname{ch}c\rho\,d\rho,$$

и таким образом формула (85) запишется в виде:

$$u(x, y, t)=$$

$$=\int_0^t\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x+\sqrt{t^2-\rho^2}\cos\varphi,\ y+\sqrt{t^2-\rho^2}\sin\varphi)\,d\varphi\right]\operatorname{ch}c\rho\,d\rho.$$

Интегрирование по $\varphi$ в этой формуле дает нам среднее арифметическое значений функций $\omega(x, y)$ по окружности на плоскости $XY$ с центром $(x, y)$ и радиусом $\sqrt{t^2-\rho^2}$. Обозначая это среднее арифметическое через $T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x, y)\}$, мы можем написать окончательно формулу (85) в виде

$$u(x, y, t)=\int_0^t T_{\sqrt{t^2-\rho^2}}\{\omega(x, y)\}\operatorname{ch}c\rho\,d\rho. \tag{86}$$

Заметим, что если $c$ — чисто мнимое $c=c_1 i$, то $\operatorname{ch}c\rho=\cos c_1\rho$. Дифференцируя построенное решение по $t$, получим решение

$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$ уравнения (83), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u_1 = \Big|_{t=0} = \omega(x, y); \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Совершенно так же для интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c^2 u \tag{87}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \omega(x, y, z) \tag{88}$$

надо использовать формулу ($82_2$) из § 17 **[173]** при $n = 4$, заменяя $\omega$ на $\omega(x_2, x_3, x_4)e^{cx_1}$. Проделывая некоторые простые преобразования, мы получим решение уравнения (87) при начальных условиях (88) в виде:

$$u = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \rho^2 I_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})\, T_\rho\{\omega(x, y, z)\}\, d\rho,$$

где $T_\rho\{\omega(x, y, z)\}$ есть, как всегда, среднее от функции $\omega(x, y, z)$ по сфере с центром $(x, y, z)$ и радиусом $\rho$.

## § 19. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

**189. Основные уравнения.** Способ Фурье применяется ко многим задачам математической физики, приводящим к линейным дифференциальным уравнениям с частными производными. При этом мы встречаем различные разложения заданной функции по тем функциям, которые получаются при применении метода Фурье. Мы имели примеры таких разложений в ряде рассмотренных выше задач.

В качестве примера рассмотрим еще поперечные колебания стержней, уравнение для которых мы сейчас выведем.

Тонкий стержень мы отличаем от струны тем, что он работает на изгиб. Искомой функцией здесь будет ордината $y(x, t)$ деформированной оси стержня с абсциссой $x$ и в момент $t$.

Если $M$ есть изгибающий момент, а $F(x, t)$ — нагрузка, отнесенная к единице длины, то, как известно [16] из технической теории изгиба,

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = F, \tag{1}$$

откуда, дифференцируя первое из уравнений (1) два раза по $x$, получим:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = F(x, t). \tag{2}$$

Уравнение (2) выражало бы условие *равновесия* стержня, если бы сила $F$ не зависела от времени и стержень оставался в покое; для того же, чтобы получить уравнение *движения*, нужно по принципу Даламбера включить в состав внешней силы еще и силу инерции в сечении $x$, рассчитав и ее на единицу длины. Ускорение этого сечения можно принять постоянным во всех точках сечения и равным $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, силу же инерции, рассчитанную на единицу длины, получим, очевидно, если умножить ускорение на $-\rho S$, где $\rho$ есть *объемная* плотность вещества стержня, $S$ — площадь поперечного сечения. Итак, в уравнении (2) нужно будет заменить $F$ на $F - \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, что дает уравнение 4-го порядка:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, t), \tag{3}$$

где

$$b^2 = \frac{EI}{\rho S}, \quad f(x, t) = \frac{1}{\rho S} F(x, t). \tag{4}$$

Весьма важны *предельные условия*, которые должны выполняться на концах $x = 0$, $x = l$ стержня и вид которых зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если *конец закреплен наглухо* так, что в нем стержень имеет горизонтальное направление, то получаем два условия:

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ или } x = l. \tag{5}$$

*Если конец только подперт*, т. е. может свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом месте изгибающий момент должен равняться нулю, т. е. мы имеем условия:

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ или } x = l. \tag{6}$$

Наконец, если *конец свободен*, то в нем не только изгибающий момент, но и срезывающее усилие $\frac{\partial M}{\partial x}$ должно равняться нулю, но зато само $y$ уже может быть и отлично от нуля. Итак, в этом случае

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ или } x = l. \tag{7}$$

Во всех рассмотренных случаях мы получаем на *каждом конце стержня по два условия*, в отличие от струны, когда на каждом конце мы имели по одному условию.

Наконец, нужно иметь в виду еще и *начальные условия* того же типа, что в случае струны:

$$y\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{8}$$

Имея в виду свободные колебания, мы положим в уравнении (3) $f(x, t) = 0$, что дает:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{9}$$

**190. Частные решения.** Как и в случае струны, ищем частное решение этого уравнения в виде:

$$y = T(t) X(x). \tag{10}$$

Подставив в (9), находим:

$$T''(t) X(x) + b^2 T(t) X^{(4)}(x) = 0,$$

или, как и в случае струны:

$$\frac{T''(t)}{b^2 T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -k^4,$$

где $k^4$ — постоянная, причем мы считаем $k$ вещественным.

Это дает нам:

$$T''(t) + b^2 k^4 T(t) = 0, \tag{11}$$

$$X^{(4)}(x) - k^4 X(x) = 0. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (11) есть

$$T(t) = N \sin(bk^2 t + \varphi), \tag{13}$$

т. е. решение (10) есть опять-таки стоячая волна, при которой точки стержня совершают гармонические колебания одной и той же частоты и фазы и отличающиеся одно от другого лишь амплитудой $NX(x)$, которая зависит от $x$.

Нетрудно найти и общее решение уравнения (12). Его характеристическое уравнение [**30**]

$$\alpha^4 - k^4 = 0$$

при $k \neq 0$ имеет корни $k, -k, ik, -ik$, так что общее решение его будет:

$$X(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx, \tag{14}$$

или, выражая $e^{kx}$ и $e^{-kx}$ через $\operatorname{ch} kx$ и $\operatorname{sh} kx$ и изменяя значение произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, можем написать общее решение в виде:

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx. \tag{15}$$

Разберем теперь различные случаи предельных условий.

1. Если стержень оперт в обоих концах, мы должны удовлетворить при $x = 0$ и $x = l$ условиям (6), т. е.

$$X(0) = C_1 + C_3 = 0; \quad X''(0) = k^2(C_1 - C_3) = 0$$
$$X(l) = C_1 \operatorname{ch} kl + C_2 \operatorname{sh} kl + C_3 \cos kl + C_4 \sin kl = 0$$
$$X''(l) = k^2(C_1 \operatorname{ch} kl + C_2 \operatorname{sh} kl - C_3 \cos kl - C_4 \sin kl) = 0,$$

что дает, очевидно, при $k \neq 0$:

$$C_1 = C_3 = 0; \tag{16}$$

$$C_2 \operatorname{sh} kl + C_4 \sin kl = 0; \quad C_2 \operatorname{sh} kl - C_4 \sin kl = 0. \tag{16$_1$}$$

Эта система двух однородных уравнений имеет очевидное решение $C_2 = C_4 = 0$; но тогда все постоянные $C$ равны нулю, и мы получаем неинтересное решение $X(x) = 0$. Отбрасывая этот случай, мы должны считать, что по крайней мере одна из постоянных $C_2$, $C_4$ отлична от нуля.

Если $C_4 = 0$, то, так как $\operatorname{sh} kl \neq 0$ при $k \neq 0$ [I, 177], из уравнений ($16_1$) следует $C_2 = 0$. Следовательно, мы должны считать, что $C_4 \neq 0$. Вычитая уравнения ($16_1$) почленно, получим $C_4 \sin kl = 0$, и окончательно получаем для $k$ уравнение

$$\sin kl = 0.$$

Если это условие выполнено, то уравнения ($16_1$) приводятся к одному $C_2 \operatorname{sh} kl = 0$ и дают $C_2 = 0$, т. е., положив $C_4 = C$, в силу (14), получим:

$$X(x) = C \sin kx. \tag{17}$$

Уравнение (17) дает для $k$ те же решения

$$\frac{\pi}{l}, \ \frac{2\pi}{l}, \ \ldots, \ \frac{n\pi}{l}, \ \ldots,$$

что и в случае струны, и дальнейшие рассуждения и формулы будут те же, что в [167], с тем лишь изменением, что $\omega_n$ — частота $n$-й гармоники выражается не формулой (44) [168], а следующей:

$$\omega_n = \frac{bn^2\pi^2}{l^2}. \tag{18}$$

При $k = 0$ уравнение (12) имеет общее решение: $X(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$, и, пытаясь удовлетворить условиям (6), мы обнаружим, что все постоянные $C$ должны быть равны нулю.

2. Если стержень наглухо заделан в обоих концах, то мы должны удовлетворить условиям (5) при $x = 0$ и $x = l$, что дает

$$X(0) = C_1 + C_3 = 0; \quad X'(0) = k(C_2 + C_4) = 0$$

$$X(l) = C_1 \operatorname{ch} kl + C_2 \operatorname{sh} kl + C_3 \cos kl + C_4 \sin kl = 0$$

$$X'(l) = k(C_1 \operatorname{sh} kl + C_2 \operatorname{ch} kl - C_3 \sin kl + C_4 \cos kl) = 0,$$

откуда видно, что

$$C_3 = -C_1; \ C_4 = -C_2, \tag{19}$$

и мы получаем систему двух однородных уравнений для определения $C_1$ и $C_2$:

$$\left.\begin{aligned} C_1(\operatorname{ch} kl - \cos kl) + C_2(\operatorname{sh} kl - \sin kl) = 0 \\ C_1(\operatorname{sh} kl + \sin kl) + C_2(\operatorname{ch} kl - \cos kl) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

36 Зак. 3251, В. Смирнов, т. II

Для того чтобы эта система имела решение, отличное от $C_1 = C_2 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $C_1$ и $C_2$ были пропорциональны:

$$\frac{\operatorname{ch} kl - \cos kl}{\operatorname{sh} kl + \sin kl} = \frac{\operatorname{sh} kl - \sin kl}{\operatorname{ch} kl - \cos kl}.$$

При этом два уравнения (20) приводятся к одному. Написанное условие можно, пользуясь соотношениями:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

переписать в виде:

$$\operatorname{ch} kl \cdot \cos kl = 1. \tag{21}$$

Мы получили уравнение для $k$, аналогичное уравнению (17) предыдущего случая. Полагая для краткости

$$kl = \lambda,$$

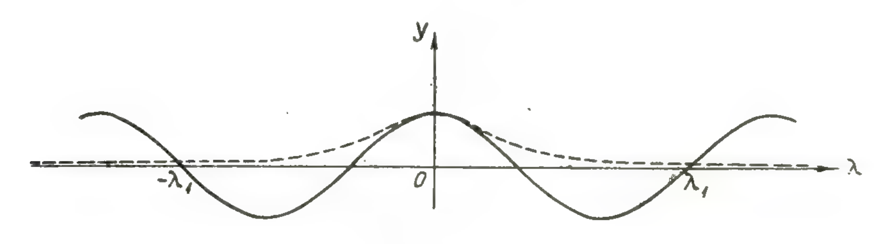
мы получаем трансцендентное уравнение для определения $\lambda$:

$$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 1. \tag{22}$$

Переписав уравнение (22) в виде

$$\cos \lambda = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda}$$

и начертив график кривых $\cos \lambda$ и $\frac{1}{\operatorname{ch} \lambda}$ (черт. 140), мы обнаружим,




Черт. 140.

что уравнение (22) имеет бесчисленное множество вещественных корней

$$0, \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \ldots, \pm\lambda_n, \ldots$$

причем разность

$$\lambda_n - \frac{2n+1}{2}\pi \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Мы обратим внимание пока только на положительные корни:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{23}$$

Им соответствует бесчисленное множество значений параметра $k$:

$$k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n,\ \ldots;\ \ k_n = \frac{\lambda_n}{l}\ \ldots \tag{24}$$

При этих значениях $k$ условие (21) выполняется, одно из уравнений (20) оказывается следствием другого, и можно положить:

$$C_1 = C(\operatorname{sh} kl - \sin kl); \quad C_2 = -C(\operatorname{ch} kl - \cos kl).$$

Определив по формулам (19) постоянные $C_3$ и $C_4$, подставив в (15) и положив $C = 1$, что, очевидно, не ограничивает общности, получим искомое решение $X(x)$ в виде:

$$X(x) = (\operatorname{sh} kl - \sin kl)(\operatorname{ch} kx - \cos kx) - \\ - (\operatorname{ch} kl - \cos kl)(\operatorname{sh} kx - \sin kx). \tag{25}$$

Точнее говоря, мы получаем бесчисленное множество решений

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x),\ \ldots, \tag{26}$$

которые выводятся из общей формулы (25) заменой $k$ на $k_n$.

Отрицательные корни $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, ... мы можем не принимать во внимание, так как им соответствуют значения $-k_1$, $-k_2$, ... параметра $k$, которые в силу нечетности функции (25) относительно $k$, дадут тот же ряд функции (26).

Подставляя вместо $k$ значения (24) в формулу (13), найдем соответствующий ряд функции $T(t)$:

$$T_1(t),\ T_2(t), \ldots,\ T_n(t), \ldots;\ T_n(t) = N_n \sin(\omega_n t + \varphi_n);\ \omega_n = bk_n^2, \tag{27}$$

и, наконец, ряд решений уравнения (9):

$$y_1(x,\ t),\ y_2(x,\ t),\ \ldots,\ y_n(x,\ t),\ \ldots;\ y_n(x,\ t) = T_n(t)\, X_n(x). \tag{28}$$

Совершенно аналогичные результаты мы получим при всех остальных условиях относительно концов стержня: выражая функцию $X(x)$ в виде (15) и подставляя в предельные условия, мы получаем систему четырех однородных уравнений с четырьмя неизвестными $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, которые будут допускать решения, отличные от нулевого, тогда и только тогда, когда параметр $k$ удовлетворяет некоторому трансцендентному уравнению, имеющему бесчисленное множество вещественных корней. Подставляя корень $k$ этого уравнения в коэффициенты системы, получим систему, в которой одно из уравнений есть следствие остальных, и постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ определяются с точностью до некоторого произвольного общего множителя, так что мы получаем функцию $X_n(x)$ в виде линейной комбинации обыкновенных и гиперболических синусов и косинусов.

**191. Разложение произвольной функции.** Не останавливаясь на детальном разборе всех частных случаев в отдельности, перейдем к выполнению оставшихся *начальных условий*:

$$y\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{29}$$

Для этого, как и в случае струны, ищем $y(x, t)$ в виде суммы частных решений (28):

$$y(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,X_n(x). \tag{30}$$

Полагая:

$$a_n=N_n\sin\varphi_n,\quad b_n=N_n\cos\varphi_n,$$

перепишем (30) в виде:

$$y(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)\,X_n(x), \tag{30$_1$}$$

после чего условия (29) дают:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nX_n(x)=\varphi(x);\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\omega_nX_n(x)=\varphi_1(x). \tag{31}$$

Мы видим, таким образом, что весь вопрос об определении постоянных $a_n$ и $b_n$ приводится к разложению данных функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ в ряды по функциям $X_n(x)$. Эти ряды аналогичны изученным выше рядам Фурье.

Не останавливаясь на вопросе о сходимости и возможности таких разложений, мы, допустив, что это разложение возможно, покажем лишь, как можно определить коэффициенты разложения, совершенно так же, как это было сделано в [**142**] относительно ряда Фурье. При этом мы будем предполагать, что предельные условия задачи не обязательно те, которые были разобраны в пунктах 1 и 2 [**190**], а какие угодно из перечисленных выше (5), (6) и (7).

Итак, пусть нам нужно разложить заданную в промежутке $(0, l)$ функцию $f(x)$ в ряд вида

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_nX_n(x). \tag{32}$$

Мы допустим, что такое разложение возможно, и что ряд (32) можно почленно интегрировать. Коэффициенты $A_n$ оказывается возможным определить благодаря свойству ортогональности функций

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_n(x),\ \ldots$$

в промежутке $(0, l)$, ибо мы сейчас покажем, что

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\,dx = 0, \text{ если } n \neq m. \tag{33}$$

Для этой цели заметим, что по самому построению своему функции $X_n(x)$ удовлетворяют уравнению (12), если там $k$ заменить на $k_n$, т. е.

$$X_n^{(4)}(x) = k_n^4 X_n(x).$$

Таким образом мы имеем:

$$X_n^{(4)}(x) = k_n^4 X_n(x); \quad X_m^{(4)}(x) = k_m^4 X_m(x). \tag{34}$$

Умножая первое из уравнений (34) на $X_m(x)$, второе на $X_n(x)$, вычитая почленно и интегрируя по $x$ от 0 до $l$, имеем:

$$(k_m^4 - k_n^4) \int_0^l X_n(x) X_m(x)\,dx =$$

$$= \int_0^l [X_m^{(4)}(x) X_n(x) - X_n^{(4)}(x) X_m(x)]\,dx, \tag{35}$$

и для доказательства формулы (33) нам остается только показать, что

$$\int_0^l [X_m^{(4)}(x) X_n(x) - X_n^{(4)}(x) X_m(x)]\,dx = 0, \tag{36}$$

так как множитель $(k_m^4 - k_n^4)$ отличен от нуля при $m \neq n$.

Интегрируя по частям, мы имеем:

$$\int X_m^{(4)}(x) X_n(x)\,dx = X_m'''(x) X_n(x) - \int X_m'''(x) X_n'(x)\,dx =$$

$$= X_m'''(x) X_n(x) - X_m''(x) X_n'(x) + \int X_m''(x) X_n''(x)\,dx,$$

и точно так же:

$$\int X_n^{(4)}(x) X_m(x)\,dx = X_n'''(x) X_m(x) - X_n'' X_m'(x) + \int X_n''(x) X_m''(x)\,dx,$$

откуда без труда выводим:

$$\int_0^l [(X_m^{(4)}(x) X_n(x) - X_n^{(4)}(x) X_m(x)]\,dx =$$

$$= [X_m'''(x) X_n(x) - X'''(x) X_m(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} - [X_m''(x) X_n'(x) -$$

$$- X_n''(x) X_m'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Правая часть написанного равенства содержит значения функций $X_m(x)$, $X_n(x)$ и их производных до третьего порядка включительно при $x=0$, $x=l$, и какие бы из условий (5), (6) и (7) мы ни взяли, в каждом из членов правой части найдется множитель, равный нулю. Итак, равенство (36), а вместе с тем и свойство ортогональности (33), доказаны.

При $m=n$ интеграл (33) превращается в

$$I_n=\int_0^l X_n^2(x)\,dx \tag{37}$$

и является вполне определенной постоянной, которую в каждом частном случае можно вычислить без труда. Так, например, в случае 1 **[190]** мы имеем:

$$I_n=\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{2}.$$

Таким образом, если мы заменим систему функций $X_1(x)$, $X_2(x)$, ..., $X_n(x)$ ... системой

$$\frac{X_1(x)}{\sqrt{I_1}},\ \frac{X_2(x)}{\sqrt{I_2}},\ \ldots,\ \frac{X_n(x)}{\sqrt{I_n}},\ \ldots,$$

то получим не только *ортогональную*, но и *нормальную* систему **[148]**, т. е. интеграл от квадрата каждой функции будет равен единице. Возвратимся к определению коэффициентов $A_n$ разложения (32). Умножая обе части на $X_m(x)$, интегрируя по $x$ от 0 до $l$ и принимая во внимание соотношения (33) и (37), находим непосредственно

$$\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx=A_mI_m,$$

откуда

$$A_m=\frac{\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx}{I_m}=\frac{\int_0^l f(x)X_m(x)\,dx}{\int_0^l X_m^2(x)\,dx}.$$

Мы приходим таким образом к разложению произвольной функции $f(x)$ в ряд, аналогичный ряду Фурье:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x),\quad \text{где}\quad A_n=\frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\,dx}{\int_0^l X_n^2(x)\,dx}. \tag{38}$$

После всего сказанного определение постоянных $a_n$ и $b_n$ в равенствах (31) не представит никакого труда, а именно — мы имеем, заменяя в (38) $f(x)$ на $\varphi(x)$ и на $\varphi_1(x)$:

$$a_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx}{\int_0^l X_n^2(x)\, dx}, \quad b_n = \frac{\int_0^l \varphi_1(x) X_n(x)\, dx}{\omega_n \int_0^l X_n^2(x)\, dx}. \tag{39}$$

Подставив все это в ряд (30), получим окончательное решение нашей задачи.

*Вынужденные колебания стержней* трактуются совершенно так же, как и струн, с той лишь разницей, что функцию $f(x, t)$ придется разлагать не по синусам, а по функциям $X_n(x)$.

Из предыдущего ясно, что способ стоячих волн применяется с одинаковым успехом к колебаниям как струн, так и стержней. Способ же характеристик, который весьма полезен при исследовании уравнений колебаний струн и телеграфного, до сих пор не удалось надлежащим образом применить к уравнению (9).

## § 20. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

**192. Гармонические функции.** В настоящем параграфе мы рассмотрим уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где $U$ есть функция от $x$, $y$ и $z$. Уравнение (1), как мы уже упоминали, называется уравнением Лапласа. Левая часть уравнения (1) обозначается, как мы видели выше, символом $\Delta U$ и называется оператором Лапласа над функцией $U$. В [**87**] мы видели, что уравнению (1) должен удовлетворять потенциал сил тяготения или сил взаимодействия электрических зарядов во всех точках пространства, находящихся вне притягивающих масс или вне зарядов, создающих поле.

Уравнение вида (1) встречалось также в [**114**]. Этому уравнению должен удовлетворять потенциал скорости невихревого течения несжимаемой жидкости. В [**117**] мы показали, что уравнению (1) должна удовлетворить температура в однородном теле, если теплообмен является стационарным, т. е. температура $U$ зависит только от места, но не от времени. Точно так же в [**118**] мы получили уравнение Лапласа при рассмотрении стационарного электромагнитного поля.

Если функция $U$ не зависит от одной из координат, например, от $z$, то уравнение (1) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

В этом случае $U$ сохраняет одно и то же значение на всякой прямой, параллельной оси $Z$, или, иначе говоря, картина значений $U$ в плоскостях, параллельных плоскости $XY$, одна и та же, так что достаточно рассмотреть лишь плоскость $XY$.

Функция, непрерывная со своими производными до второго порядка в некотором объеме (трехмерной области) $(D)$ и удовлетворяющая там уравнению (1), называется *гармонической в* $(D)$ *функцией*. Такой термин применяется и в отношении уравнения (2) для области в плоскости $XY$. В дальнейшем мы выясним некоторые свойства гармонических функций.

Обычно в задачах математической физики функция $U$, кроме уравнения (1), должна подчиняться некоторому предельному условию. Начальные условия в данном случае, конечно, отсутствуют. Основной предельной задачей для уравнения (1) является следующая задача: определить функцию, гармоническую в области $(D)$, если заданы ее значения на поверхности $(S)$ этой области. Задача эта называется обычно *задачей Дирихле*. В формулировке задачи под значениями $U$ на поверхности $(S)$ подразумеваются те предельные значения, которые получает $U$ при приближении изнутри области $(D)$ к точкам поверхности $(S)$. Более точно можно формулировать задачу так: ищется функция $U$, гармоническая внутри $(D)$ и непрерывная в области $(D)$, включая ее границу $(S)$, причем заданы значения $U$ на $(S)$. Эта заданная на $(S)$ функция должна быть, конечно, непрерывной. Будем для простоты считать, что граница $(D)$ есть одна замкнутая поверхность $(S)$. Заметим, что область $(D)$ может быть как конечной, так и бесконечной. В последнем случае она лежит вне $(S)$. В случае конечной области мы имеем *внутреннюю задачу Дирихле*, а в случае бесконечной — *внешнюю задачу Дирихле*. В последней задаче ставится еще то условие, чтобы функция стремилась к нулю при беспредельном удалении точки, или, как говорят, функция должна обращаться в нуль на бесконечности. Предельное условие в задаче Дирихле записывают в виде:

$$U|_{(S)}=f(M), \tag{3}$$

где $f(M)$ — заданная непрерывная функция на поверхности $(S)$ и $M$ — переменная точка этой поверхности. Аналогично формулируется внутренняя задача Дирихле и применительно к уравнению (2) для плоской области, причем предельным условием является задание $U$ на контуре области. В случае внешней задачи Дирихле на плоскости требуется, чтобы функция имела конечный предел при беспредельном удалении точки.

Укажем еще на один тип предельного условия, а именно на тот случай, когда на поверхности $(S)$ задается значение нормальной производной:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(S)} = f(M). \tag{4}$$

Задача нахождения гармонической функции, удовлетворяющей такому предельному условию, называется *задачей Неймана*. Он встречается в гидродинамике при рассмотрении движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Предельное условие (4) выражает при этом совпадение нормальной составляющей скорости точки $M$ поверхности $(S)$ тела и жидкой частицы, прилегающей к точке $M$. Задача Неймана может быть формулирована и для уравнения (2).

Прежде чем переходить к выяснению свойств гармонических функций, мы приведем вывод некоторых формул, необходимых нам в дальнейшем.

**193. Формула Грина.** Пусть $(D)$ — некоторое ограниченное тело, $(S)$ — его поверхность, $U$ и $V$ — две функции, непрерывные и имеющие непрерывные производные до второго порядка в области $(D)$ вплоть до его поверхности $(S)$. Рассмотрим интеграл:

$$I = \iiint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dv = \iiint\limits_{(D)} \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V\, dv.$$

Применяя очевидное тождество:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

и два аналогичных тождества для $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, можем переписать интеграл в виде

$$I = \iiint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] dv - \iiint\limits_{(D)} U\,\Delta V\, dv.$$

Преобразуем первое из слагаемых в правой части по формуле Остроградского:

$$I = \iint\limits_{(S)} \left[U\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n,\ X) + U\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n,\ Y) + \right.$$

$$\left. + U\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n,\ Z)\right] dS - \iiint\limits_{(D)} U\,\Delta V\, dv$$

или [**102**]:

$$I = \iint\limits_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n} dS - \iiint\limits_{(D)} U \Delta V \, dv,$$

где $(n)$ — направление нормали в точках поверхности $(S)$, внешней по отношению к телу $(D)$.

Таким образом мы приходим к так называемой предварительной формуле Грина:

$$\iiint\limits_{(D)} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv =$$

$$= \iiint\limits_{(D)} \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V \, dv = \iint\limits_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n} dS - \iiint\limits_{(D)} U \Delta V \, dv. \qquad (5)$$

Левая часть этого равенства не меняется при перестановке функций $U$ и $V$, а потому то же относится и к правой части, т. е. мы можем написать:

$$\iint\limits_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n} dS - \iiint\limits_{(D)} U \Delta V \, dv = \iint\limits_{(S)} V \frac{\partial U}{\partial n} dS - \iiint\limits_{(D)} V \Delta U \, dv,$$

откуда и получается формула Грина в окончательной форме:

$$\iiint\limits_{(D)} (U \Delta V - V \Delta U) \, dv = \iint\limits_{(S)} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \qquad (6)$$

Иногда пользуются не внешней, а внутренней нормалью, при этом надо только изменить знаки у производных по нормали в правой части формулы, и для случая внутренней нормали формула Грина будет выглядеть так:

$$\iiint\limits_{(D)} (U \Delta V - V \Delta U) \, dv = \iint\limits_{(S)} \left( V \frac{\partial U}{\partial n_i} - U \frac{\partial V}{\partial n_i} \right) dS, \qquad (6_1)$$

где $n_i$ — направление нормали внутрь $(D)$.

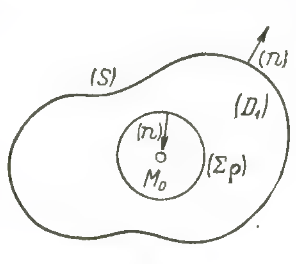
Область $(D)$ может быть ограничена и несколькими поверхностями $(S)$. Формула Грина применима и в этом случае, но только поверхностный интеграл, стоящий в правой части этой формулы, надо брать по всем поверхностям, ограничивающим область $(D)$. Заметим, что при этом нормаль $(n)$, внешняя по отношению к объему $(D)$, будет на поверхностях, ограничивающих этот объем изнутри, направлена внутрь поверхностей [**63**].

Как мы упоминали, при выводе формулы Грина (6) достаточно потребовать, чтобы функции $U$ и $V$ были непрерывны вместе с производными до второго порядка вплоть до $(S)$. Необходимо, конечно,

предъявить некоторые требования и к поверхности $(S)$. Можно при этом сослаться на те условия, при которых была выведена формула Остроградского [63]. Эти условия сводились к следующему: поверхность $(S)$ может быть разбита на конечное число кусков так, что на каждом куске, вплоть до его границы, имеется непрерывно меняющаяся касательная плоскость. Такие поверхности называются обычно *кусочно-гладкими*. Ребра поверхности, являющиеся границами упомянутых кусков, должны быть *кусочно-гладкими линиями*. Это условие, налагаемое на поверхность, может быть выражено и в аналитической форме.

Следствием формулы Грина является важная в приложениях формула, дающая выражение значения функции в любой точке $M_0$ внутри $(D)$ в виде суммы некоторого поверхностного и некоторого объемного интеграла. Пусть $U(M)$ — функция, определенная в области $(D)$ и непрерывная с производными до второго порядка вплоть до $(S)$.

Применим формулу Грина к этой функции и к функции $V=\frac{1}{r}$, где $r$ — расстояние от определенной точки $M_0$, лежащей внутри $(D)$, до переменной точки $M$. Функция $V=\frac{1}{r}$ обращается в бесконечность, если точка $M$ совпадает с $M_0$, и мы не можем применять формулу Грина ко всему телу $(D)$. Выделим из этого тела малую сферу с центром $M_0$ и малым радиусом $\rho$ и обозначим через $(D_1)$ оставшуюся часть тела $(D)$ и через $(\Sigma_\rho)$ — поверхность выделенной сферы (черт. 141). В области $(D_1)$ функции $U$ и $V=\frac{1}{r}$ обладают требуемым свойством непрерывности, и, применяя к этой области формулу Грина, мы получим:



Черт. 141.

$$\iiint\limits_{(D_1)}\left[U\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta U\right]dv=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS+\iint\limits_{(\Sigma_\rho)}\left[U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS, \qquad (7)$$

причем интегрирование совершается по обеим поверхностям $(S)$ и $(\Sigma_\rho)$, ограничивающим тело $(D_1)$. Но, как мы видели, функция $V=\frac{1}{r}$

удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\Delta \frac{1}{r} = 0$ [119]. Кроме того, на сфере $(\Sigma_\rho)$ нормаль $n$ направлена внутрь сферы прямо противоположно направлению радиуса $r$, так что производная по нормали под знаком интеграла по $(\Sigma_\rho)$ есть взятая с обратным знаком производная по $r$. Принимая во внимание все сказанное, мы можем переписать формулу (7) в виде:

$$\iint_{(D_1)}\int \frac{\Delta U}{r}\,dv + \iint_{(S)} \left[U \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\right] dS + \\ + \iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U\,dS - \iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS = 0. \qquad (8)$$

Будем теперь стремить радиус $\rho$ выделенной сферы к нулю. При этом первое из слагаемых в написанной формуле будет стремиться к объемному интегралу по всему телу $(D)$ [86]. Второе слагаемое от $\rho$ не зависит. Покажем, что третье из написанных слагаемых стремится к пределу $4\pi U(M_0)$. Принимая во внимание, что на $(\Sigma_\rho)$ величина $r$ имеет постоянное значение $\rho$, можем написать:

$$\iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U(M)\,dS = \frac{1}{\rho^2} \iint_{(\Sigma_\rho)} U(M)\,dS.$$

Применяя теорему о среднем, будем иметь:

$$\iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r^2} U(M)\,dS = \frac{1}{\rho^2} U(M_\rho)\cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi U(M_\rho),$$

где $M_\rho$ — некоторая точка на поверхности сферы $(\Sigma_\rho)$. Эта точка стремится к $M_0$ при $\rho \to 0$, откуда видно, что написанное выше выражение стремится к $4\pi U(M_0)$. Точно так же применение теоремы о среднем к последнему слагаемому дает:

$$-\iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}\,dS = -\frac{1}{\rho}\iint_{(\Sigma_\rho)} \frac{\partial U}{\partial n}\,dS = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{M_\rho} 4\pi\rho^2 = -\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{M_\rho} 4\pi\rho.$$

Производные первого порядка функции $U$ по любому направлению при стремлении $M_\rho$ к $M_0$ остаются ограниченными, так как по предположению функция $U$ везде внутри $(D)$ имеет непрерывные производные до второго порядка. Множитель $4\pi\rho$ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Отсюда видно, что последнее слагаемое в формуле (8) стремится к нулю. Окончательно формула (8) в пределе даст нам

искомое следствие формулы Грина:

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{dU}{r} \Delta v + \iint\limits_{(S)} \left[ U \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS + 4\pi U(M_0) = 0$$

или

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{(D)} \frac{\Delta U}{r} dv. \qquad (9)$$

Заметим еще раз, что эта формула справедлива для любой функции $U$, непрерывной в области $(D)$ вплоть до $S$ вместе со своими производными до второго порядка.

Совершенно аналогичные формулы имеют место и для случая плоскости. Мы приведем их, не останавливаясь на их доказательстве. Пусть $(B)$ — некоторая область на плоскости, $(l)$ — контур этой области и $n$ — направление нормали к этому контуру, внешней по отношению к $(B)$. Оператор Лапласа для случая плоскости имеет в декартовых координатах вид:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Аналогично формуле (6), мы будем иметь на плоскости формулу

$$\iint\limits_{(B)} (U \Delta V - V \Delta U) \, dS = \int\limits_{(l)} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \qquad (10)$$

В отношении формулы (9) аналогия не будет полной, а именно при выводе формулы (9) было существенным, что функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Для случая плоскости это не будет иметь места, и вместо функции $\frac{1}{r}$ решение уравнения Лапласа надо будет брать в виде $\lg r$ или $\lg \frac{1}{r} = -\lg r$, где $r$ — расстояние от какой-либо постоянной точки плоскости до переменной точки $M$. Таким образом вместо формулы (9) мы на плоскости будем иметь формулу:

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(l)} \left[ U \frac{\partial (\lg r)}{\partial n} - \lg r \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(B)} \Delta U \cdot \lg r \, dS, \qquad (11)$$

где $M_0$ — любая фиксированная точка внутри $(B)$ и $r$ — расстояние переменной точки $M$ до точки $M_0$.

Заметим, что тройной интеграл в формуле (9) есть интеграл несобственный, так как подинтегральная функция обращается

в бесконечность в точке $M_0$. Но этот интеграл, очевидно, сходится, так как подинтегральная функция по абсолютной величине меньше выражения $\frac{A}{r^p}$ при $p=1$. Аналогичное замечание имеет место и по отношению к формуле (11).

**194. Основные свойства гармонических функций.** Рассмотрим функцию $U$, гармоническую в ограниченной области $(D)$ с поверхностью $(S)$. Считая, что $U$ непрерывна вместе с производными второго порядка вплоть до $(S)$ и применяя формулу Грина (6) к этой функции $U$ и к гармонической функции $V \equiv 1$, получим, в силу $\Delta V = \Delta(1) = 0$ и $\frac{\partial(1)}{\partial n} = 0$

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0, \tag{12}$$

т. е. имеем первое свойство гармонической функции: *интеграл от нормальной производной гармонической функции по поверхности области равен нулю.*

Если применим к гармонической функции $U$ формулу (9), то, в силу $\Delta U = 0$, получим:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(S)} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] dS. \tag{13}$$

Это дает нам второе свойство гармонической функции: *значение гармонической функции в любой точке внутри области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на поверхности области формулой* (13).

Отметим, что интегралы в формулах (12) и (13) не содержат производных второго порядка функции $U$, и для применимости этих формул достаточно предположить, что гармоническая функция непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до $(S)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно несколько сжать поверхность $(S)$, написать формулы (12) и (13) для сжатой области $(D')$, в которой имеется непрерывность и производных второго порядка вплоть до поверхности, и затем перейти к пределу, расширяя $(D')$ до $(D)$. Сжатие можно произвести, например, откладывая на внутренней нормали к $(S)$ в каждой ее точке один и тот же малый отрезок длины $\delta$. Концы этих отрезков образуют новую (сжатую) поверхность. При этом поверхность $(S)$ должна быть такой, что описанное преобразование при всех достаточно малых $\delta$ приводит к поверхности, которая не пересекает сама себя и является кусочно-гладкой [**193**]. Этот вопрос будет подробно изложен в четвертом томе.

Применим формулу (13) к частному случаю области, а именно к сфере с центром в $M_0$ и радиусом $R$, считая, конечно, что функ-

ция $U$ гармоническая в этой сфере и непрерывна с производными первого порядка вплоть до ее поверхности ($\Sigma_R$).

В данном случае направление внешней нормали $n$ совпадает с направлением радиуса сферы, так что мы будем иметь

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},$$

и формула (13) дает:

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}+\frac{1}{r^2}U\right)dS.$$

Но на поверхности сферы $\Sigma_R$ величина $r$ имеет постоянное значение $R$, так что:

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{(\Sigma_R)}\frac{\partial U}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(\Sigma_R)}U\,dS,$$

или, в силу (12), будем иметь окончательно

$$U(M_0)=\frac{\iint\limits_{(\Sigma_R)}U\,dS}{4\pi R^2}. \tag{14}$$

Формула эта выражает третье свойство гармонической функции: *значение гармонической функции в центре сферы равно среднему арифметическому значению этой функции на поверхности сферы*, т. е. *равно интегралу от значений функции по поверхности сферы, деленному на площадь этой поверхности.*

Из этого свойства почти с очевидностью вытекает следующее четвертое свойство гармонической функции:

*Функция, гармоническая внутри области и непрерывная вплоть до границы области, достигает своего наибольшего и наименьшего значения только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.* Приведем подробное доказательство этого утверждения. Пусть $U(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_1$ той области $D$, где $U(M)$ — гармоническая функция. Построим сферу $\Sigma_\rho$ с центром $M_1$ и радиусом $\rho$, принадлежащую $D$, применим формулу (14) и заменим подинтегральную функцию $U$ ее наибольшим значением $U_\rho^{(\max)}$ на сфере $\Sigma_\rho$. Таким образом получим

$$U(M_1)\leqslant U_\rho^{(\max)},$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда $U$ на сфере $\Sigma_\rho$ есть постоянная, равная $U(M_1)$. Поскольку по предположению $U(M_1)$ есть наибольшее значение $U(M)$ в $D$, мы можем утверждать, что имеет место знак равенства, и что, следовательно, $U(M)$ равна постоянной

внутри и на поверхности всякой сферы с центром $M_1$, принадлежащей $D$. Покажем, что отсюда следует, что $U(M)$ есть постоянная и во всей области $D$.

Пусть $N$ — любая точка, лежащая внутри $D$. Нам надо показать, что $U(N) = U(M_1)$. Соединим $M_1$ с $N$ линией $l$ конечной длины, например ломаной линией, лежащей внутри $D$, и пусть $d$ — кратчайшее расстояние $l$ от границы $S$ области $D$ ($d$ — положительное число). В силу доказанного выше $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ в шаре с центром $M_1$ и радиусом $d$. Пусть $M_2$ — последняя точка пересечения линии $l$ с поверхностью упомянутого шара, если считать от $M_1$. Мы имеем $U(M_2) = U(M_1)$, и по доказанному выше $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ и в шаре с центром $M_2$ и радиусом $d$. Пусть $M_3$ — последняя точка пересечения $l$ с поверхностью этого шара. Как и выше, функция $U(M)$ равна постоянной $U(M_1)$ и в шаре с центром $M_3$ и радиусом $d$ и т. д. Путем построения конечного числа таких шаров мы и убедимся в том, что $U(N) = U(M_1)$, что и требовалось доказать. Можно показать также, что $U(M)$ не может иметь внутри $D$ ни максимумов, ни минимумов. Пользуясь доказанным свойством гармонических функций, очень легко показать, что *внутренняя задача Дирихле*, о которой мы упоминали в [**185**], *может иметь только одно решение*. Действительно, если предположить, что существуют две функции $U_1(M)$ и $U_2(M)$, гармонические внутри $D$ и принимающие на поверхности $S$ этой области одни и те же предельные значения $f(M)$, то разность $V(M) = U_1(M) - U_2(M)$ будет также удовлетворять внутри $D$ уравнению Лапласа, т. е. будет гармонической функцией, и ее предельные значения на поверхности $S$ везде равны нулю. Отсюда, в силу доказанного выше, непосредственно следует, что $V(M)$ обращается в нуль тождественно во всей области $D$, ибо в противном случае она должна была бы достигать внутри положительного наибольшего значения или отрицательного наименьшего значения, что невозможно. Таким образом два решения $U_1(M)$ и $U_2(M)$ задачи Дирихле должны совпадать во всей области $D$. Совершенно так же доказывается единственность внешней задачи Дирихле, если учесть, что по условию в бесконечно далекой точке гармоническая функция должна обращаться в нуль.

Совершенно аналогичные свойства получаются и для гармонических функций на плоскости. В данном случае вместо формулы (13) мы будем иметь формулу

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_l \left( U \frac{\partial \lg r}{\partial n} - \lg r \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \tag{15}$$

и теорема о среднем будет выражаться в виде:

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\lambda_R} U\, ds, \tag{16}$$

где $\lambda_R$ — окружность с центром $M_0$ и радиусом $R$. Для внешней здачи Дирихле в бесконечно далекой точке требуется не обращение в нуль, как в трехмерном случае, но лишь существование какого-либо конечного предела, и единственность задачи Дирихле надо доказывать иначе, чем в прежнем случае. Мы приведем это доказательство в томе IV, где рассмотрим задачи Дирихле и Неймана более подробно.

Отметим сейчас, что любая постоянная есть гармоническая функция, удовлетворяющая предельному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\rho} = 0,$$

откуда видно, что если к решению задачи Неймана добавить произвольную постоянную, то полученная сумма также будет решением задачи Неймана с теми же предельными значениями $\frac{\partial U}{\partial n}$, т. е. решение задачи Неймана определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Из формулы (12) следует также, что функция $f(M)$, входящая в предельное условие внутренней задачи Неймана, не может быть произвольной, но должна удовлетворять условию:

$$\iint\limits_S f(M)\,dS = 0.$$

В заключение отметим еще, что формула (13) справедлива и в том случае, когда $U(M)$ есть гармоническая функция в *бесконечной области*, образованной частью пространства, находящейся вне поверхности $S$. При этом надо только сделать предположение о порядке малости $U(M)$ на бесконечности, т. е. при беспредельном удалении точки $M$. Достаточно (и необходимо) предположить, что при беспредельном удалении имеют место неравенства

$$R\,|U(M)| \leqslant A; \quad R^2 \left|\frac{\partial U(M)}{\partial l}\right| \leqslant A, \tag{*}$$

где $R$ — расстояние от $M$ до начала или какой-либо другой определенной точки пространства, $A$ — численная постоянная и $l$ — произвольное направление в пространстве. Для доказательства формулы (13) для безграничной области при указанных условиях достаточно применить формулу (13) для конечной области, ограниченной поверхностью $S$ и сферой с центром, например, в точке $M_0$ и достаточно большим радиусом. При стремлении этого радиуса к бесконечности интеграл по поверхности сферы будет стремиться к нулю в силу приведенных выше условий, и мы получим формулу (13) для любой точки $M_0$, лежащей вне $S$. Как мы увидим в томе IV, условия (*) наверно выполняются, если $U(M)$ стремится к нулю при беспредельном удалении точки $M$.

37 Зак. 3251. В. Смирнов, т. II

**195. Решение задачи Дирихле для круга.** В предыдущем параграфе мы видели, что задача Дирихле может иметь только одно решение, но мы еще не знаем, имеет ли она вообще решение. Не рассматривая этого вопроса в общем случае, мы ограничимся лишь частными случаями. При этом мы применим к решению задачи различные методы. Начнем с плоского случая.

Пусть требуется найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на окружности этого круга наперед заданные значения. Пусть $R$ — радиус этого круга, и примем центр круга за начало координат. При этом заданные предельные значения на окружности круга будут представлять собою некоторую известную непрерывную функцию полярного угла на окружности $f(\theta)$. Берем внутри круга переменную точку $M$ с полярными координатами $(r, \theta)$. Искомая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа [**119**]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0$$

или

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0. \tag{17}$$

Применим в данном случае метод Фурье и будем искать решение уравнения (17) в виде произведения функции только от $\theta$ на функцию только от $r$:

$$U=\chi(\theta)\cdot\omega(r). \tag{18}$$

Подставляем это выражение в уравнение (17):

$$r^2\omega''(r)\chi(\theta)+r\omega'(r)\chi(\theta)+\chi''(\theta)\omega(r)=0$$

или

$$\frac{\chi''(\theta)}{\chi(\theta)}=-\frac{r^2\omega''(r)+r\omega'(r)}{\omega(r)}. \tag{18$_1$}$$

Левая часть написанного уравнения содержит одну независимую переменную $\theta$, а правая — независимую переменную $r$ и, следовательно, обе части должны равняться одной и той же постоянной, которую мы обозначим через $(-k^2)$. Таким образом получаем два уравнения

$$\chi''(\theta)+k^2\chi(\theta)=0 \quad \text{и} \quad r^2\omega''(r)+r\omega'(r)-k^2\omega(r)=0.$$

Первое из них при $k\neq 0$ дает:

$$\chi(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta.$$

Второе — есть уравнение Эйлера [**92**]. Ищем его решение в виде $\omega(r)=r^m$:

$$r^2\cdot m(m-1)r^{m-2}+rmr^{m-1}-k^2r^m=0,$$

откуда, сокращая на $r^m$, получаем $m^2-k^2=0$, т. е. $m=\pm k$, и общий интеграл уравнения будет:

$$\omega(r)=Cr^k+Dr^{-k},$$

если только постоянная $k$ отлична от нуля. Подставив в формулу (18), получим для $U$ выражение:

$$U = (A\cos k\theta + B\sin k\theta)(Cr^k + Dr^{-k}). \tag{19}$$

При $k = 0$ будем иметь уравнения

$$\chi''(\theta) = 0 \quad \text{и} \quad r\omega''(r) + \omega'(r) = 0,$$

и, как нетрудно показать, получим:

$$U = (A + B\theta)(C + D\lg r). \tag{$19_1$}$$

В формулах (19) и ($19_1$) — $A$, $B$, $C$, $D$ и $k$ — постоянные, к определению которых мы сейчас и переходим. Заметим, что прибавление к углу $\theta$ величины $2\pi$ равносильно обходу вокруг начала координат. При этом однозначная функция $U(r, \theta)$ должна вернуться к исходному значению, т. е. в формуле (19) первый множитель, зависящий от $\theta$, должен быть периодической функцией от $\theta$ с периодом $2\pi$. Отсюда следует, что постоянная $k$ может принимать только целые значения $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots$

Но если подставить в формулу (19) $k = n$ или $k = -n$, то ввиду произвольности коэффициента $B$ результат получится по существу один и тот же, и поэтому мы можем ограничиться только целыми положительными значениями постоянной $k$ (характеристические числа задачи), т. е. $k = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Периодичность решения ($19_1$) требует, чтобы постоянная $B$ была равна нулю. Таким образом мы приходим к следующим решениям:

$$U_n(r, \theta) = (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$U_0(r, \theta) = A_0(C_0 + D_0\lg r),$$

причем постоянные могут быть различными при различных значениях целого числа $n$, почему мы и снабдили их значками. Обращаясь теперь ко второму множителю, зависящему от $r$, заметим, что искомое решение должно быть конечным и непрерывным в центре круга, т. е. при $r = 0$. Отсюда следует, что все постоянные $D_n$ и $D_0$ необходимо положить равными нулю. Обозначая произвольные постоянные $A_nC_n$ через $A_n$, $B_nC_n$ — через $B_n$ и $A_0C_0$ — через $\frac{A_0}{2}$, мы можем написать решения в виде:

$$U_n(r, \theta) = (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)\, r^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$U_0(r, \theta) = \frac{A_0}{2}.$$

В силу линейности и однородности уравнения Лапласа сумма этих решений будет также решением, т. е. мы получаем решение

вида:

$$U(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n. \tag{20}$$

Определим теперь произвольные постоянные $A_n$ и $B_n$ по заданному предельному условию

$$U(r, \theta)|_{r=R} = f(\theta), \tag{21}$$

где $f(\theta)$ — заданная в промежутке $(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ непрерывная функция, причем $f(-\pi) = f(\pi)$.

Это условие дает

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) R^n. \tag{22}$$

Отсюда видно, что $A_n R^n$ и $B_n R^n$ суть коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$ в промежутке длины $2\pi$, например в промежутке $(-\pi, \pi)$. Вычисляя их по известным формулам

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt\, dt; \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt\, dt \tag{23}$$

и подставляя найденные отсюда значения в формулу (20), получим искомое решение задачи Дирихле.

Сравнивая ряд Фурье (22) с формулой (20), дающей решение задачи, можем формулировать полученный результат следующим образом: *чтобы получить решение задачи Дирихле для круга, надо написать ряд Фурье для предельных значений* $f(\theta)$ *и умножить* $(n+1)$-*й член этого ряда на множитель* $\left(\frac{r}{R}\right)^n$.

Вместо бесконечного ряда (20) решение можно представить в виде определенного интеграла. Подставляем в формулу (20) выражения коэффициентов (23):

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos n(t-\theta) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n dt$$

или

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\theta)\right] dt.$$

Формула (14) из **[I, 174]** дает непосредственно:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} \quad (0 \leqslant r < 1). \tag{24}$$

Заменяя $r$ на $\frac{r}{R}$ и $\varphi$ на $(t-\theta)$, получим окончательно следующее выражение для $U(r, \theta)$:

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{25}$$

Заметим, что если бы обозначали обе части уравнения ($18_1$) не через $(-k^2)$, а через $(+k^2)$, то в выражении (19) вместо $(A\cos k\theta+$ $+B\sin k\theta)$ мы получили бы $(Ae^{k\theta}+Be^{-k\theta})$, а эта последняя функция не является периодической ни при каком вещественном $k$.

При выводе формулы (25) мы предполагали, что решение задачи Дирихле, т. е. искомая функция $U(r, \theta)$, существует. Кроме того, мы пользовались разложением $f(\theta)$ в ряд Фурье (22), что не обязательно имеет место, и в это разложение непосредственно подставляли $r=R$. Все это заставляет нас проверить формулу (25), т. е. мы должны показать, что интеграл, стоящий в правой части формулы (25), дает гармоническую функцию внутри круга $r<R$ и что $f(\theta)$ суть предельные значения этой функции на окружности этого круга. Отметим, что интеграл формулы (25) называется обычно *интегралом Пуассона*.

**196. Интеграл Пуассона.** Для простоты письма мы будем считать в этом номере радиус круга $R$ равным единице, так что формулу (25) перепишем в виде

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{26}$$

Интеграл дает функцию от $r$ и $\theta$, так как второй множитель

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} \tag{27}$$

его подинтегральной функции кроме переменной интегрирования $t$ содержит параметры $r$ и $\theta$. При этом функция (27), а потому и (26), имеют период $2\pi$ по отношению к переменной $\theta$. Из очевидного неравенства $1-2r\cos(t-\theta)+r^2\geqslant 1-2r+r^2=(1-r)^2$ следует, что выражение (27) и его производные любого порядка суть непрерывные функции $r$ и $\theta$ при $0\leqslant r<1$. Отсюда следует, что интеграл (25) можно дифференцировать по $r$ и $\theta$ под знаком интеграла [**80**], и это дифференцирование будет касаться только множителя (27). Но, пользуясь выражением оператора Лапласа в полярных координатах [**119**], нетрудно проверить, что функция (27) удовлетворяет уравнению Лапласа. Отсюда непосредственно следует, что формула (26) определяет функцию $U(r, \theta)$, гармоническую при $r<1$. Остается показать,

что ее предельные значения на окружности круга $r=1$ равны $f(\theta)$, что и составляет главную часть доказательства.

Заметим прежде всего, что если в формуле (26) положить $f(t)=1$, то и гармоническая функция $U(r, \theta)$ будет тождественно равна единице, т. е. надо ожидать, что справедлива формула:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}\,dt. \tag{28}$$

Докажем эту формулу. Согласно (24)

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(t-\theta) \quad (0\leqslant r<1),$$

причем ряд, стоящий справа, сходится равномерно относительно $t$, так как члены этого ряда по абсолютной величине не превышают $2r^n$. Интегрируя ряд почленно по $t$, и получим (28).

Функция $f(t)$, определенная на окружности $r=1$, имеет период $2\pi$, т. е. $f(-\pi)=f(\pi)$. Мы продолжаем ее вне промежутка $(-\pi, \pi)$ по закону периодичности, что дает нам непрерывную в промежутке $-\infty<t<+\infty$ функцию $f(t)$ с периодом $2\pi$.

Введем вместо $t$ новую переменную интегрирования $t-\theta=\varphi$, т. е. $t=\varphi+\theta$ и $dt=d\varphi$. Принимая во внимание периодичность $f(t)$ и $\cos(t-\theta)$, мы можем оставить прежний промежуток интегрирования $(-\pi, \pi)$ **[142]** и написать:

$$U(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\varphi+\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,d\varphi. \tag{29}$$

Пусть точка $(r, \theta)$ стремится к точке $(1, \theta_0)$ на окружности. Нам надо доказать, что при этом

$$\lim U(r, \theta)=f(\theta_0).$$

В интеграле (28) совершим такую же замену переменных, умножим обе части на $f(\theta_0)$ и вычтем полученное равенство почленно из (29):

$$U(r, \theta)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,d\varphi. \tag{30}$$

Нам надо доказать, что интеграл, стоящий справа, стремится к нулю при $r\to 1$ и $\theta\to\theta_0$, т. е. будет сколь угодно малым по абсолютной величине, если $r$ достаточно близко к единице и $\theta$ к $\theta_0$. При любом заданном положительном $\varepsilon$ можно указать такое $\eta$, что в про-

межутке $-\eta \leqslant \varphi \leqslant \eta$

$$|f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

при всех $\theta$, достаточно близких к $\theta_0$. В интеграле (30) разобьем весь промежуток интегрирования на три части:

$$(-\pi, -\eta),\ (-\eta, \eta),\ (\eta, \pi). \tag{32}$$

Оценим абсолютное значение интеграла по второму промежутку:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta} [f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)] \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\, d\varphi.$$

Принимая во внимание, что дробь, стоящая под знаком интеграла, положительна, заменяя стоящую там разность ее абсолютным значением и применяя (31), получим:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{+\eta} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\, d\varphi$$

или, расширяя промежуток интегрирования:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\, d\varphi,$$

и, следовательно, в силу (28),

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

Рассмотрим теперь интеграл по первому из промежутков (32). В этом промежутке $\cos\varphi \leqslant \cos\eta$ и, следовательно,

$$1-2r\cos\varphi+r^2 \geqslant 1-2r\cos\eta+r^2 = (1-r)^2+2r(1-\cos\eta)$$

или

$$1-2r\cos\varphi+r^2 \geqslant 4r\sin^2\frac{\eta}{2}.$$

Абсолютное значение разности $[f(\varphi+\theta)-f(\theta_0)]$ не превышает некоторого определенного положительного числа $M$, раз $f(t)$ — непрерывная периодическая функция. Таким образом для интеграла по первому из промежутков (32) получаем оценку:

$$|I_1| < \frac{M}{8\pi r\sin^2\frac{\eta}{2}}(1-r^2)(\pi-\eta),$$

и такую же оценку получим и для интеграла по третьему из промежутков (32). При $r \to 1$ правая часть написанного неравенства стремится к нулю и, следовательно, сумма интегралов по первому и третьему из промежутков (32) будет при всех $r$, достаточно близких к единице, по абсолютному значению меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Принимая во внимание (33) и произвольную малость $\varepsilon$, мы можем утверждать, что правая часть равенства (30) действительно стремится к нулю при $r \to 1$ и $\theta \to \theta_0$.

Отметим связь интеграла (26) с рядом Фурье функции $f(\theta)$. Этот ряд Фурье имеет вид (22), причем мы полагаем сейчас $R = 1$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \tag{34}$$

где коэффициенты определяются по формулам (23) при $R = 1$. Если, например, $f(\theta)$ удовлетворяет условиям Дирихле [**143**], то ряд (34) сходится при всяком $\theta$. Но в общем случае непрерывной функции мы этого утверждать не можем. Но во всяком случае $A_n$ и $B_n \to 0$ при $n \to \infty$, так что ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\, r^n \tag{35}$$

сходится при $r < 1$, и, как это видно из [**195**], сумма этого ряда и дает функцию (26). Далее оказывается, что при $r \to 1$ сумма ряда (35) стремится к $f(\theta)$, т. е. к той функции, от которой произошел ряд Фурье (34), который может быть и расходящимся рядом.

Применим эту же идею к любому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{36}$$

Если этот ряд сходится и имеет сумму $s$, то теоремы Абеля из теории степенных рядов [**I, 148**] показывают, что при $0 \leqslant r < 1$ сходится ряд

$$\omega(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n \tag{37}$$

и, ввиду его равномерной сходимости в промежутке $0 \leqslant r \leqslant 1$ [**I, 149**], мы имеем:

$$\lim_{r \to 1-0} \omega(r) = s. \tag{38}$$

Но может случиться, что ряд (36) расходится, а ряд (37) при $0 \leqslant r < 1$ сходится и $\omega(r)$ имеет предел при $r \to 1-0$, т. е. имеет место (38). В этом случае $s$ называется обобщенной суммой расхо-

дящегося ряда (36) в смысле Абеля, и говорят, что ряд (36) суммируем по Абелю. Из сказанного выше непосредственно вытекает, что для сходящегося ряда эта обобщенная сумма существует и совпадает с обычной суммой ряда.

Полученные выше результаты об интеграле Пуассона можно формулировать так: *ряд Фурье непрерывной периодической функции $f(\theta)$ при всяком $\theta$ суммируем по Абелю и имеет обобщенную сумму, равную* $f(\theta)$. Отметим еще, что при исследовании интеграла Пуассона мы стремили точку $(r, \theta)$ к предельной точке $(1, \theta_0)$ не обязательно по радиусу, а любым образом.

Положим, что в интеграле (26) $r > 1$. Совершенно так же как и выше, мы убеждаемся в том, что интеграл (26) дает гармоническую функцию вне окружности $r = 1$. Для исследования его предельных значений перепишем его в виде:

$$U(r, \theta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^2}{1-2\frac{1}{r}\cos(t-\theta)+\left(\frac{1}{r}\right)^2}dt. \qquad (26_1)$$

Написанный интеграл совпадает с интегралом (26), если в этом последнем заменить $r$ на $1:r$, причем, в силу $r>1$, мы имеем $1:r<1$. Таким образом, к интегралу, входящему в формулу $(26_1)$ применимы все предыдущие рассуждения с заменой $r$ на $1:r$, и функция $(26_1)$ при стремлении точки $(r, \theta)$ к точке $(1, \theta_0)$ извне окружности стремится к $-f(\theta_0)$. Мы можем таким образом утверждать, что функция

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{r^2-1}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}dt$$

дает решение задачи Дирихле для части плоскости, находящейся вне окружности $r = 1$ с предельными значениями $f(\theta)$. При беспредельном удалении точки $(r, \theta)$ функция $V(r, \theta)$, как это видно из последней формулы, имеет конечный предел:

$$\lim_{r\to\infty} V(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt.$$

Как мы упоминали выше, решение задачи Дирихле $u(M)$ для бесконечной части плоскости, находящейся вне замкнутого контура $l$, единственно, если предположить, что искомая функция стремится к конечному пределу при беспредельном удалении точки $M$ (см. том IV).

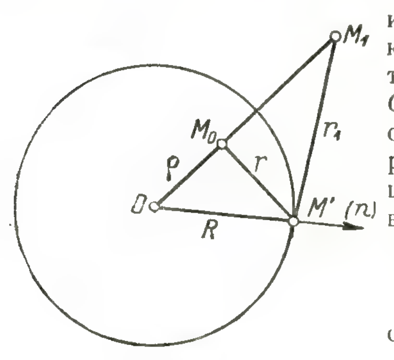
**197. Задача Дирихле для сферы.** Пусть $R$ — радиус сферы $(\Sigma)$ и $f(M')$ — заданные предельные значения гармонической функции на поверхности сферы, причем $M'$ — переменная точка этой поверхности.

Мы предполагаем, что $f(M')$ — непрерывная на поверхности сферы функция.

Рассмотрим какую-либо, но определенную точку $M_0$ внутри $(\Sigma)$ и обозначим через $r$ расстояние переменной точки пространства $M$ до $M_0$. Наряду с точкой $M_0$ рассмотрим точку $M_1$, лежащую на продолжении радиуса сферы $\overline{OM_0}$ и такую, что (черт. 142):

$$\overline{OM_0} \cdot \overline{OM_1} = R^2. \tag{39}$$

Точка $M_1$, лежащая вне сферы $(\Sigma)$, называется иногда симметричной с $M_0$ относительно $(\Sigma)$. Обозначим через $r_1$ расстояние переменной точки $M$ до $M_1$. Если $M$ находится на поверхности $(\Sigma)$ в некоторой точке $M'$, то величины $r$ и $r_1$ связаны простой зависимостью, которую мы сейчас и выведем. Заметим, что треугольники $OM_0M'$ и $OM_1M'$ подобны, так как они имеют общий угол при вершине $O$ и стороны, образующие эти углы, пропорциональны в силу (39). Из подобия вытекает:




Черт. 142.

$$\frac{|M_0M'|}{|M_1M'|} = \frac{|OM_0|}{|OM'|} \quad \text{или} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{|OM_0|}{R},$$

откуда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\rho}{R} \cdot \frac{1}{r}, \tag{40}$$

где $\rho = |OM_0|$ есть длина радиуса-вектора из центра сферы в точку $M_0$. Функция $\frac{1}{r_1}$ внутри сферы в бесконечность не обращается, ибо $M_1$ лежит вне сферы, и есть, следовательно, функция, гармоническая внутри сферы [**119**]. Формула (40) дает предельные значения этой функции на поверхности сферы. Пусть $U(M)$ — искомое решение задачи Дирихле. Формула (13) дает:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(\Sigma)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS. \tag{41}$$

С другой стороны, применяя формулу (6) к гармоническим функциям $U$ и $V = \frac{1}{r_1}$, получим:

$$0 = \iint\limits_{(\Sigma)} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n} \right) dS. \tag{42}$$

Умножая обе части (42) на постоянное число $\frac{R}{4\pi\rho}$ и вычитая из (41), мы, в силу (40), исключим $\frac{\partial U}{\partial n}$:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\int U \cdot \left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] dS.$$

Но значения $U$ на $(\Sigma)$ представляют собою заданную функцию $f(M')$, и мы можем написать:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\int f(M')\left[\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] dS. \qquad (43)$$

Формула эта и решает задачу Дирихле для сферы, так как под знаком интеграла стоят известные величины. Преобразуем еще разность, стоящую в квадратных скобках. Заметим прежде всего, что поверхности $r = \text{const}$ суть сферы с центром $M_0$, так что grad $r$ есть вектор длины единица, имеющий направление $\overline{M_0M}$, и, следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \text{grad}_n\, r = \cos(r, n)$$

и

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n).$$

Точно так же

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1, n),$$

где $r$ и $r_1$ под знаком косинуса обозначают направления $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_1M}$. Это дает

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{1}{r^2}\cos(r, n) - \frac{R}{\rho r_1^2}\cos(r_1, n). \qquad (44)$$

Вводя величину $\rho_1 = |OM_1| = \frac{R^2}{\rho}$, можем написать из треугольников $OM'M_0$ и $OM'M_1$:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(r, n); \quad \rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos(r_1, n).$$

Определяя отсюда $\cos(r, n)$, $\cos(r_1, n)$ и подставляя в выражение (44), будем иметь, в силу (40) и определения $\rho_1$:

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^3},$$

и формула (43) может быть переписана в виде:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{(\Sigma)} f(M') \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS, \tag{45}$$

или, если ввести угол $\gamma$, образованный радиусом-вектором $\overline{OM_0}$, с переменным радиусом-вектором $\overline{OM'}$, угловые сферические координаты $(\theta', \varphi')$ точки $M'$ и сферические координаты $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ точки $M_0$ с началом в точке $O$:

$$U(\rho, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} f(\theta', \varphi') \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 - 2\rho R \cos\gamma + \rho^2)^{3/2}} \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'. \tag{46}$$

Полученное интегральное представление $U(M_0)$ аналогично интегралу Пуассона в случае плоскости. Для того, чтобы показать, что интеграл, входящий в формулу (45), дает гармоническую функцию, достаточно показать, что при фиксированной точке $M'$ дробь $(R^2 - \rho^2) : r^3$ есть гармоническая функция от $M_0$. Введем сферическую систему координат с началом в точке $M'$ и с осью $Z$, направленной от $M'$ к $O$, и обозначим, как всегда в сферической системе, $\theta = \angle OM'M_0$. При этом $\rho^2 = R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2$ и

$$\frac{R^2 - \rho^2}{r^3} = \frac{2R\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{r}.$$

Подставляя эту разность в уравнение Лапласа, выраженное в сферических координатах, убедимся в том, что упомянутая дробь есть гармоническая функция точки $M_0$. Докажем теперь, что при любом положении $M_0$ внутри сферы имеет место формула:

$$\frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{\Sigma} \frac{R^2 - \rho^2}{r^3} dS = 1. \tag{*}$$

Введем сферическую систему координат с началом в точке $O$ и с осью $Z$, направленной из $O$ в $M_0$, причем в данном случае $\theta = \angle M_0OM'$ и $r^2 = R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2$. Интеграл, входящий в формулу (*), будет

$$\frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{(R^2 - \rho^2) R}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{(R^2 - 2\rho R\cos\theta + \rho^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{R^2 - \rho^2}{2\rho} (R^2 - 2\rho R\cos\theta + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

или, принимая во внимание, что $\rho < R$, получим формулу (*)

$$\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS=\frac{R^2-\rho^2}{2\rho}\left(\frac{1}{R-\rho}-\frac{1}{R+\rho}\right)=1.$$

Дальнейшее доказательство того, что интеграл (45) имеет на сфере предельные значения $f(M)$, проводится так же, как и в случае интеграла Пуассона.

Решение внешней задачи Дирихле с предельными значениями $f(M')$ дается формулой:

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma'} f(M')\,\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\,dS \tag{$45_1$}$$

или

$$U(\rho,\ \theta_0,\ \varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\ \varphi')\,\frac{\rho^2-R^2}{(R^2-2\rho R\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \tag{$46_1$}$$

где $\rho=|\overline{OM_0}|$, $r=|\overline{M_0M'}|$ и $\gamma=\angle M_0OM'$, но в данном случае $\rho > R$. Как и выше, мы убедимся в том, что интеграл формулы ($45_1$) дает гармоническую функцию вне сферы. Для того чтобы убедиться, что предельные значения $U(M_0)$ равны $f(M)$, перепишем ($46_1$) в виде:

$$U(\rho,\ \theta_0,\ \varphi_0)=$$
$$=\frac{\rho'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\ \varphi')\,\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho' R'\cos\gamma+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \tag{$46_2$}$$

где $\rho'=\rho^{-1}$ и $R'=R^{-1}$. При этом $\rho' < R'$, и когда точка $(\rho,\ \theta_0,\ \varphi_0)$ стремится к точке $M(R,\ \theta,\ \varphi)$, лежащей на сфере $\Sigma$, то $(\rho',\ \theta_0,\ \varphi_0)$ стремится к $(R',\ \theta,\ \varphi)$. В силу результата, полученного для внутренности сферы, мы имеем:

$$\frac{R'}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta',\ \varphi')\,\frac{R'^2-\rho'^2}{(R'^2-2\rho' R'\cos\gamma+\rho'^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi' \to f(M),$$

и, принимая во внимание, что $\rho' \to R'$, можем утверждать, что и правая часть формулы ($46_2$) стремится к $f(M)$, что мы и хотели доказать. Отметим еще, что в силу ($46_1$) $U(\rho,\ \theta_0,\ \varphi_0)$ стремится к нулю, когда $M_0$ удаляется на бесконечность, т. е. когда $\rho \to \infty$. Это следует из того, что под знаком интеграла формулы ($46_1$) числитель содержит $\rho^2$, а знаменатель имеет, очевидно, порядок $\rho^3$.

**198. Функция Грина.** Из приведенного решения задачи Дирихле для сферы можно вывести указания и для общего случая внутренней задачи Дирихле для любой поверхности $(S)$. Формула (13) непосредственно не дает

решения задачи, так как под знак двойного интеграла входит не только само $U$, для которого значения на поверхности заданы, но и $\frac{\partial U}{\partial n}$. Надо исключить последнюю величину, чтобы получить решение задачи. Пусть $M_0$ — фиксированная точка внутри $(S)$. Пусть нам известна функция $G_1(M;\ M_0)$, обладающая следующими двумя свойствами: 1) как функция переменной точки $M$, это есть гармоническая функция внутри $(S)$; 2) на поверхности $(S)$ ее предельные значения равны $\frac{1}{r}$, где $r$ — расстояние переменной точки $(S)$ до $M_0$. Пусть $U(M)$ — искомое решение задачи Дирихле. Применяя формулу (6) к гармоническим функциям $U(M)$ и $G_1(M;\ M_0)$, можем написать:

$$0=\iint\limits_{(S)}\left[U(M)\frac{\partial G_1(M;\ M_0)}{\partial n}-G_1(M;\ M_0)\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS,$$

или в силу предельных условий для $G_1(M;\ M_0)$:

$$0=\iint\limits_{(S)}\left[U(M)\frac{\partial G_1(M;\ M_0)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial U(M)}{\partial n}\right]dS.$$

Умножая это равенство на $\frac{1}{4\pi}$ и складывая с (13), получим:

$$U(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}U(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}-G_1(M;\ M_0)\right]dS. \qquad (47)$$

Эта формула и дает решение задачи Дирихле, если известна функция $G_1(M;\ M_0)$. Разность, стоящая в квадратных скобках:

$$G(M;\ M_0)=\frac{1}{r}-G_1(M;\ M_0), \qquad (48)$$

называется *функцией Грина для области, ограниченной поверхностью* $(S)$ *с полюсом в точке* $M_0$. Из определения $G_1(M;\ M_0)$ вытекают два основных свойства функции Грина:

1. $G(M;\ M_0)$ есть гармоническая функция внутри $(S)$, кроме точки $M_0$, где она обращается в бесконечность, причем разность $G(M;\ M_0)-\frac{1}{r}$ остается конечной и является везде внутри $(S)$ гармонической функцией.

2. Предельные значения $G(M;\ M_0)$ на поверхности $(S)$ равны нулю.

Если мы поместим в точке $M_0$ единицу положительного электричества и, предполагая $(S)$ проводящей поверхностью, соединим ее с землей, то функция Грина $G(M;\ M_0)$ будет давать электростатический потенциал полученного поля внутри $(S)$.

В случае сферы, в силу формулы (26), функция $G_1(M;\ M_0)$ будет равна $\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}$ и функция Грина будет:

$$G(M;M_0)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1}{r_1}. \qquad (49)$$

Мы получили формулу (47), пользуясь формулой (13) и применяя интегральную формулу Грина к $U(M)$ и $G_1(M;\ M_0)$. Возможность применения этих интегральных формул требует особых доказательств, которые основаны на изучении поведения производных при приближении к поверхности $(S)$.

Строгое доказательство формулы (47) при широких предположениях относительно поверхности $(S)$ и функции $U(M)$ на $(S)$ было впервые дано А. М. Ляпуновым.

Совершенно аналогично для случая плоскости мы имеем формулу для решения внутренней задачи Дирихле:

$$U(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_l U(M)\frac{\partial G(M;\ M_0)}{\partial n}\,ds, \qquad (47_1)$$

где функция Грина $G(M;\ M_0)$ для области с контуром $l$ и с полюсом $M_0$ должна обладать следующими двумя свойствами:

1. $G(M;\ M_0)$ есть гармоническая функция внутри $(l)$, кроме точки $M_0$, где она обращается в бесконечность, причем разность $G(M;\ M_0) - \lg\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция и в точке $M_0$.

2. Предельные значения $G(M;\ M_0)$ на контуре $l$ равны нулю.

Нетрудно видеть, что может существовать только одна функция с указанными двумя свойствами. Действительно, если бы их было две: $G^{(2)}(M;\ M_0)$ и $G^{(1)}(M;\ M_0)$, то их разность $G^{(2)}(M;\ M_0) - G^{(1)}(M;\ M_0)$ была бы гармонической везде внутри $S$ или $l$ и имела бы нулевые предельные значения на $S$ или $l$, т. е. была бы тождественно равной нулю внутри $S$ или $l$.

**199. Случай полупространства.** В качестве примера применения формулы (47) рассмотрим задачу Дирихле для полупространства. Требуется найти функцию $U(x,\ y,\ z)$, гармоническую в полупространстве $z > 0$, если известны ее предельные значения $f(x,\ y)$ на плоскости $z = 0$:

$$U|_{z=0} = f(x,\ y). \qquad (50)$$

Пусть $r$ — расстояние от переменной точки $M$ до точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, причем $z_0 > 0$, и $r_1$ — расстояние от переменной точки $M$ до точки $M_0'(x_0,\ y_0,\ -z_0)$, симметричной с $M_0$ относительно плоскости $z = 0$. Дробь $\frac{1}{r_1}$ есть гармоническая функция точки $M$ в полупространстве $z > 0$, ибо $M_0'$ лежит вне этого полупространства. Если $M$ находится на плоскости $z = 0$, то очевидно $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}$. Таким образом функция Грина в рассматриваемом случае имеет вид:

$$G(M;\ M_0) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.$$

Направление нормали к плоскости $z = 0$, внешней по отношению к полупространству $z > 0$, есть направление, противоположное оси $Z$, т. е. $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$, и формула (48) дает:

$$U(x_0,\ y_0,\ z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]_{z=0} dx\,dy.$$

После дифференцирования квадратной скобки надо положить $z=0$. Производя несложные выкладки, получим окончательно:

$$U(x_0, y_0, z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x, y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}dx\,dy. \tag{51}$$

Мы не будем проверять, что правая часть представляет гармоническую функцию и имеет предельные значения $f(x, y)$, когда $(x_0, y_0, z_0)$ стремится к $(x, y, 0)$. В данном случае бесконечно далекая точка лежит на поверхности области, и нетрудно проверить, что построенное решение обладает следующим свойством: если $f(x, y)$ непрерывна и на бесконечности, т. е. если $f(x, y)$ имеет конечный определенный предел $a$ при беспредельном удалении точки $(x, y)$ на плоскости $z=0$, то и $U(x_0, y_0, z_0)$ имеет тот же предел $a$ при любом беспредельном удалении точки $(x_0, y_0, z_0)$ в полупространстве $z>0$.

Иначе говоря, построенное решение имеет требуемое предельное значение и в бесконечно далекой точке плоскости, если $f(x, y)$ непрерывна в этой точке.

Совершенно аналогично при решении задачи Дирихле для полуплоскости $y>0$ функция Грина имеет вид:

$$\lg\frac{1}{r}-\lg\frac{1}{r_1}=\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\lg\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}},$$

и формула (48) при предельных значениях

$$U|_{y=0}=f(x) \tag{52}$$

дает решение задачи:

$$U(x_0, y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx. \tag{53}$$

Подробное рассмотрение задачи Неймана мы относим к тому IV.

**200. Потенциал объемных масс.** Рассмотрим неоднородное уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z) \tag{54}$$

в конечной области $D$ с поверхностью $S$. Общее решение этого уравнения есть сумма какого-либо частного его решения и гармонической в $D$ функции. Пусть имеется решение уравнения (54), к которому применима формула (9). Поскольку производная от $\frac{1}{r}$ по любому фиксированному направлению удовлетворяет уравнению Лапласа, то подинтегральная функция в поверхностном интеграле формулы (9) и сам этот интеграл суть гармонические функции в $D$. Таким образом тройной интеграл должен удовлетворять уравнению (54). Но в силу (54) в этом интеграле $\Delta U$ можно заменить на $\varphi(x, y, z)$, и таким образом мы получаем частное решение

уравнения (54) вида:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r} dv \tag{55}$$

$$\left(r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}\right).$$

Мы получили этот результат, предполагая, что уравнение (54) имеет решение, к которому применима формула (9). Для полного решения задачи нам надо более подробно исследовать объемный потенциал (55) при определенных предположениях относительно функции $\varphi(N)$. Мы положим $\mu(N) = -\varphi(N) : 4\pi$ и будем исследовать следующий потенциал объемных масс

$$V(M) = \iiint\limits_D \frac{\mu(N)}{r} dv \tag{56}$$

или

$$V(x, y, z) = \iiint\limits_D \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r} dv. \tag{$56_1$}$$

Положим, что $\mu(N)$ непрерывна в $D$ вплоть до $S$. Как мы уже упоминали, интеграл (56) является собственным интегралом, если $M$ лежит вне $D$. В этом случае функция $V(M)$ имеет частные производные всех порядков. Эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, и $V(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta V = 0$. Если $M$ принадлежит $D$, то существует несобственный интеграл (56) и существует также интеграл, полученный путем дифференцирования подинтегральной функции, например, по $x$. Но не было доказано, что этот интеграл дает частную производную от $V$ по $x$. Докажем по поводу интеграла (56) две теоремы:

Теорема 1. *Если $\mu(N)$ непрерывна в области $D$ вплоть до $S$, то $V(M)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны во всем пространстве, и упомянутые частные производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство будем проводить при любом положении $M$ относительно области $D$. Вместо $\frac{1}{r}$ введем новую функцию, которая отличается от $\frac{1}{r}$ лишь при $r < \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданное положительное число, но которая сама непрерывна и имеет непрерывные производные по координатам вплоть до $r = 0$. Для этого заменим $\frac{1}{r}$ при $r < \varepsilon$ полиномом: $\alpha + \beta r^2 = \alpha + \beta[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]$, выбрав $\alpha$ и $\beta$ так, чтобы при $r = \varepsilon$ иметь

$$\alpha + \beta\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad 2\beta\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

что дает непрерывность производных на стыке функции $\frac{1}{r}$ и $\alpha+\beta r^2$, т. е. при $r=\varepsilon$. Написанные формулы дают: $\alpha=\frac{3}{2\varepsilon}$, $\beta=-\frac{1}{2\varepsilon^3}$, и мы приходим к функции $g_\varepsilon(r)$, определенной равенствами:

$$
\begin{aligned}
g_\varepsilon(r) &= \frac{1}{r} \qquad \text{при } r \geqslant \varepsilon \\
g_\varepsilon(r) &= \frac{3}{2\varepsilon}-\frac{1}{2\varepsilon^3}r^2 \quad \text{при } r<\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Подставляя эту функцию вместо $\frac{1}{r}$ в интеграл (56), получим вместо $V(M)$ новую функцию:

$$V_\varepsilon(M)=\iiint_D \mu(N)\,g_\varepsilon(r)\,dv, \tag{58}$$

непрерывную во всем пространстве и с непрерывными частными производными, которые могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, поскольку подинтегральная функция интеграла формулы (58) сама непрерывна и имеет непрерывные производные при $r\geqslant 0$. Мы можем, например, написать:

$$\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint_D \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\,dv. \tag{59}$$

Составим разность:

$$V(M)-V_\varepsilon(M)=\iiint_D \mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]dv. \tag{60}$$

Поскольку $\frac{1}{r}$ и $g_\varepsilon(r)$ совпадают при $r\geqslant\varepsilon$, разность, стоящая справа, равна нулю для всех точек $N$, лежащих вне сферы $\sigma_\varepsilon$ с центром $M$ и радиусом $\varepsilon$. Если, например, $M$ лежит вне $D$ и $\varepsilon$ меньше расстояния от $M$ до $D$, то интеграл, стоящий в правой части (60), равен нулю.

В других случаях сфера $\sigma_\varepsilon$ может частично или целиком попадать в $D$. Обозначая через $m$ наибольшее абсолютное значение $\mu(N)$ в $D$ и принимая во внимание, что $g_\varepsilon(r)$ положительная функция, мы получим для подинтегральной функции правой части оценку

$$\left|\mu(N)\left[\frac{1}{r}-g_\varepsilon(r)\right]\right|<m\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right], \tag{61}$$

и вне сферы $\sigma_\varepsilon$ подинтегральная функция, как указано выше, обращается в нуль. Если мы проинтегрируем положительную функцию, стоящую в правой части (61), по всей сфере $\sigma_\varepsilon$, то получим, оче-

видно, следующую оценку:

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)| \leqslant m\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{r}+g_\varepsilon(r)\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Подставляя вместо $g_\varepsilon(r)$ вторую из формул (57) и выполняя квадратуры, получим

$$|V(M)-V_\varepsilon(M)| < \frac{18\pi}{5}m\varepsilon^2.$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon\to 0$ непрерывные функции $V_\varepsilon(M)$ равномерно по отношению к положению точки $M$ стремятся к $V(M)$, а потому $V(M)$ есть также непрерывная функция [I, 144]. Для исследования частных производных функции $V(M)$ составим интеграл, который получается дифференцированием интеграла формулы (56) по $x$ под знаком интеграла, и обозначим полученную функцию через $W(M)$:

$$W(M)=\iiint_D \mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv. \qquad (62)$$

Составим, как и выше, разность

$$W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}=\iiint_D \mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]dv.$$

Принимая во внимание, что для любой функции $h(r)$ мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}h(r)=\frac{dh(r)}{dr}\frac{x-\xi}{r}$$

и что $\left|\frac{x-\xi}{r}\right| \leqslant 1$, можем для подинтегральной функции последнего интеграла написать неравенство:

$$\left|\mu(N)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial x}g_\varepsilon(r)\right]\right| \leqslant m\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right],$$

и, совершенно так же, как и выше:

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right| \leqslant m\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{r^2}+\left|\frac{\partial g_\varepsilon(r)}{dr}\right|\right]r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Принимая во внимание, что в силу (57):

$$\left|\frac{dg_\varepsilon(r)}{dr}\right|=\frac{r}{\varepsilon^3} \quad \text{при } r\leqslant\varepsilon,$$

и выполняя квадратуры, получим:

$$\left|W(M)-\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}\right| \leqslant 5\pi m\varepsilon,$$

откуда следует, что при $\varepsilon\to 0$ производная $\frac{\partial V_\varepsilon(M)}{\partial x}$ равномерно относительно $M$ стремится к $W(M)$. Выше было доказано, что $V_\varepsilon(M)$

равномерно стремится к $V(M)$. Принимая во внимание теорему из [I, 144], мы видим, что $W(M)$ есть частная производная от $V(M)$ по $x$, т. е., в силу (62).

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_{D}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv=\iiint\limits_{D}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv.$$

Непрерывность $W(M)$ вытекает из непрерывности частных производных (59) и равномерного стремления их к пределу $W(M)$, и теорема доказана полностью. Производные по $y$ и $z$ исследуются точно так же. Отметим, что при доказательстве теоремы мы использовали лишь ограниченность $\mu(N)$ и ее интегрируемость.

**201. Уравнение Пуассона.** Для построения производных второго порядка от функции $V(M)$ мы должны усилить наши предположения относительно $\mu(N)$.

Теорема 2. *Если непрерывная функция $\mu(N)$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри $D$, то $V(M)$ имеет непрерывные производные второго порядка внутри $D$ и удовлетворяет внутри $D$ уравнению*:

$$\Delta V(M)=-4\pi\mu(M). \tag{63}$$

Фиксируем внутри $D$ какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть $\sigma_\varepsilon$ — сфера с центром $M_0$ и радиусом $\varepsilon$, лежащая внутри $D$, и $D_1$ — часть $D$, лежащая вне $\sigma_\varepsilon$. Разобьем потенциал (56) на два слагаемых:

$$V(M)=\iiint\limits_{D_1}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv+\\+\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\mu(N)\frac{1}{r}\,dv=V_1(M)+V_0(M), \tag{64}$$

и, в силу теоремы 1:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x}=\iiint\limits_{D_1}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv+\\+\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv=\frac{\partial V_1(M)}{\partial x}+\frac{\partial V_0(M)}{\partial x}. \tag{65}$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right)\left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\right),$$

и, следовательно, можем написать:

$$\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mu(N)\frac{1}{r}\right]+\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}.$$

Подставляя это выражение вместо подинтегральной функции в интеграле по $\sigma_\varepsilon$ формулы (65) и применяя формулу Остроградского, получим:

$$\frac{\partial V(M)}{\partial x}=\iiint_{D_1}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dv+$$
$$+\iiint_{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\cdot\frac{1}{r}\,dv-\iint_{S_\varepsilon}\mu(N)\cos(n,\ x)\frac{1}{r}\,dS, \qquad (66)$$

где $S_\varepsilon$ есть поверхность сферы $\sigma_\varepsilon$ и $n$ — направление внешней нормали к $S_\varepsilon$ в точке $N$. Первое слагаемое правой части есть собственный интеграл для точек $M$, лежащих внутри $\sigma_\varepsilon$, и он имеет внутри $\sigma_\varepsilon$ производные всех порядков. То же можно утверждать относительно третьего слагаемого, которое является интегралом по поверхности сферы $\sigma_\varepsilon$. Второе слагаемое есть объемный интеграл по $\sigma_\varepsilon$ с непрерывной плотностью $\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}$, и в силу теоремы 1, он имеет непрерывные производные первого порядка во всем пространстве. Таким образом можно утверждать, что $\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри $\sigma_\varepsilon$. Принимая во внимание произвольность выбора точки $M_0$ внутри $D$, можем утверждать, что $\frac{\partial V(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка везде внутри $D$. Применяя те же рассуждения к $\frac{\partial V(M)}{\partial y}$ и $\frac{\partial V(M)}{\partial z}$, можем утверждать, что $V(M)$ имеет внутри $D$ непрерывные производные второго порядка. Остается доказать формулу (63) для любой точки $M_0$ внутри $D$.

Вернемся к формулам (64) и (66). Потенциал $V_1(M)$ объемных масс по области $D_1$, как мы знаем, есть гармоническая функция внутри $\sigma_\varepsilon$, ибо $\sigma_\varepsilon$ лежит вне $D_1$, т. е. $\Delta V_1(M)=0$ внутри $\sigma_\varepsilon$, и тем самым $\Delta V(M)=\Delta V_0(M)$ внутри $\sigma_\varepsilon$. Таким образом для составления $\Delta V(M)$ достаточно продифференцировать по $x$ под знаком интеграла (пользуемся теоремой 1) те члены в (66), в которых интегрирование совершается по $\sigma_\varepsilon$ и $S_\varepsilon$, составить аналогичные выражения для производных второго порядка по $y$ и $z$ и сложить все три производные. При этом надо помнить, что под знаком интеграла только множитель $\frac{1}{r}$ зависит от $(x,\ y,\ z)$. Составив таким образом $\Delta V(M)$ внутри $\sigma_\varepsilon$, мы возьмем его значение в центре $M_0$ сферы $\sigma_\varepsilon$. Обозначая через $\Delta V(M_0)$ это значение и через $r_0$ расстояние от $M_0$ до переменной точки

интегрирования, мы получим

$$\Delta V(M_0)=\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\left[\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\frac{\xi-x_0}{r_0^3}+\frac{\partial\mu(N)}{\partial\eta}\frac{\eta-y_0}{r_0^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\mu(N)}{\partial\zeta}\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\right]dv-\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\left[\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n,\ x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n,\ y)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n,\ z)\right]dS. \qquad (67)$$

Эта формула справедлива при любом выборе радиуса $\varepsilon$, лишь бы сфера $\sigma$ лежала внутри $D$, и величина $\Delta V(M_0)$ не зависит, очевидно, от выбора $\varepsilon$. Будем стремить $\varepsilon$ к нулю. Докажем, что при этом тройной интеграл будет стремиться к нулю. Достаточно рассмотреть интеграл от одного из слагаемых. Пусть $m$ — наибольшее абсолютное значение непрерывной функции $\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}$ в некоторой фиксированной достаточно малой сфере $\sigma_{\varepsilon_0}$. При $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ мы имеем, принимая во внимание, что $\left|\frac{\xi-x_0}{r_0}\right|\leqslant 1$:

$$\left|\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\mu(N)}{\partial\xi}\cdot\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\,dv\right|\leqslant m\iiint\limits_{\sigma_\varepsilon}\frac{dv}{r_0^2}.$$

Вводя сферические координаты с началом в $M_0$ и заменяя $dv=$ $=r_0^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr_0$, мы убедимся в том, что выражение, стоящее в правой части, равно $m\cdot 4\pi\varepsilon$, откуда и следует, что тройной интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Займемся теперь поверхностным интегралом формулы (67). Мы имеем, принимая во внимание, что внешняя нормаль $n$ направлена по радиусу сферы:

$$\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n,\ x)+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n,\ y)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n,\ z)=$$

$$=\frac{1}{r_0^2}\left[\cos^2(n,\ x)+\cos^2(n,\ y)+\cos^2(n,\ z)\right]=\frac{1}{r_0^2},$$

и, следовательно, поверхностный интеграл может быть записан в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\,dS,$$

или, применяя теорему о среднем:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\mu(N)\,dS=4\pi\mu(N_\varepsilon),$$

где $N_\varepsilon$ — некоторая точка на $S_\varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ точка $N_\varepsilon$ стремится к точке $M_0$ и $\mu(N_\varepsilon) \to \mu(M_0)$, и в пределе поверхностный интеграл формулы (67) дает $4\pi\mu(M_0)$, что и приводит к формуле (63). Эта формула называется обычно формулой Пуассона или уравнением Пуассона.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $\varphi(x, y, z)$ непрерывна в области $D$ вплоть до поверхности $S$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри $D$, то формула (55) дает решение уравнения (54). Заметим, что если $\varphi(N)$ определена во всем пространстве и достаточно быстро убывает при беспредельном удалении точки $N$, то за $D$ мы можем взять всё пространство.

Совершенно аналогичные теоремы могут быть доказаны и для интеграла по плоской области:

$$V(M) = \iint_B \mu(N) \lg \frac{1}{r}\, d\sigma$$

или

$$V(x, y) = \iint_B \mu(\xi, \eta) \lg \frac{1}{r}\, d\sigma \quad (r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}).$$

Если $\mu(N)$ непрерывна в $B$ вплоть до контура этой области, то $V(M)$ сама непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка на всей плоскости, причем эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла. Если, кроме того, $\mu(N)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри $B$, то $V(M)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка внутри $B$ и в каждой точке внутри $B$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta V(M) = -2\pi\mu(N).$$

Составим наряду с интегралом (55) интеграл

$$U_1(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \varphi(N)\, G(M; N)\, dv, \tag{55$_1$}$$

где $G(M; N)$ — функция Грина области $D$ с полюсом $N$. В интеграле (55) интегрирование совершается по точке $N$. Принимая во внимание формулу (49), можем написать

$$U_1(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\varphi(N)}{r}\, dv + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \varphi(N)\, G_1(M; N)\, dv,$$

где $G_1(M; N)$ — гармоническая функция $M$ везде внутри $D$ и имеющая предельные значения $\frac{1}{\rho}$ на $S$, где $\rho$ — расстояние от переменной точки на $S$ до точки $N$. Второй интеграл справа есть функция точки $M$, входящей под знак интеграла в виде параметра, и поскольку $G_1(M; N)$ — гармоническая функция везде внутри $D$, то и второй интеграл справа есть гармоническая функция $M$

внутри $D$. Оператор Лапласа от первого слагаемого справа по доказанному равен $\varphi(M)$, и таким образом функция $U_1(M)$, определенная формулой $(55_1)$, удовлетворяет уравнению (54). Далее, принимая во внимание, что $G(M;\ N)$ имеет на $S$ нулевые предельные значения, мы видим на основании $(55_1)$, что $U_1(M)$ удовлетворяет на $S$ предельному условию

$$U_1(M)|_S = 0.$$

Итак, *формула* $(55_1)$ *определяет решение уравнения* (54), *удовлетворяющее написанному предельному условию*. Предельные значения решения (55), которые получаются, как значения интеграла, стоящего в правой части, когда точка $(x,\ y,\ z)$ находится на $S$, зависят от $\varphi(x,\ y,\ z)$. Заметим, что проведенное выше исследование функции $(55_1)$ не является вполне строгим. Оно требует дополнительного исследования зависимости $G(M;\ N)$ от точки $N$, доказательства возможности дифференцирования под знаком интеграла и предельного перехода под знаком интеграла, когда $M$ стремится к точке поверхности $S$ (см. том IV).

**202. Формула Кирхгофа.** Формула (13) дает для гармонической внутри поверхности $S$ функции значение во всякой внутренней точке в виде интеграла по поверхности $S$. Можно получить аналогичную формулу и для функции $V(x,\ y,\ z,\ t) = V(M;\ t)$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V. \tag{68}$$

Положим, что функция $V(M;\ t)$ непрерывна со своими производными до второго порядка в области $D$, ограниченной поверхностью $S$, при всех $t > 0$. Пусть $M_0$ — некоторая фиксированная точка внутри $(D)$. Обозначим через $r$ — расстояние $r = M_0M$ от $M_0$ до переменной точки $M$. Применим общую формулу (9) к функции:

$$U(x,\ y,\ z,\ t) = V\left(x,\ y,\ z,\ t - \frac{r}{a}\right), \tag{69}$$

или, короче,

$$U(M, V-t)\left(M;\ t - \frac{r}{a}\right). \tag{70}$$

Если $\omega(t)$ есть некоторая функция от $t$, то обозначим символом $[\omega]$ ту функцию, которая получится из $\omega(t)$ заменой $t$ на $t - \frac{r}{a}$, т. е. $[\omega] = \omega\left(t - \frac{r}{a}\right)$.

Обычно называют $[\omega]$ *запаздывающим значением функции* $\omega(t)$. Смысл этого станет понятным, если считать, что $a$ есть скорость распространения некоторого процесса.

При таком обозначении мы можем формулу (69) или (70) записать в виде: $U = [V]$. При дифференцировании функции (69) по координатам надо принимать во внимание, что $[V]$ зависит от координат как непосредственно, так и через посредство $r$, которое входит в четвертый аргумент. Таким образом мы будем иметь:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}. \tag{71}$$

Точно так же, пользуясь выражением оператора Лапласа в полярных координатах с центром $M_0$ [119]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right]; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left[\frac{\partial V}{\partial r}\right] - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right] - \frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right] + \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right],$$

получим:

$$\Delta U = [\Delta V] - \frac{2}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right] + \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right] - \frac{2}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right].$$

Но, в силу (68), мы имеем $[\Delta V] = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right]$, и, следовательно:

$$\Delta U = \frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right] - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\}.$$

Нетрудно показать, что

$$-\frac{\Delta U}{r} = -\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{ar}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right] - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial r}\right] - \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\right\} \qquad (72)$$

есть расходимость некоторого вектора:

$$-\frac{\Delta U}{r} = \operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}(\lg r)\right\}. \qquad (73)$$

Действительно, мы имеем формулу [**112**]:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{A}) = f\operatorname{div}\mathbf{A} + \operatorname{grad} f\cdot\mathbf{A}.$$

В данном случае $f = \frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$, и $\mathbf{A} = \operatorname{grad}(\lg r)$ есть вектор длины $\frac{1}{r}$, направленный по радиусу-вектору из $M_0$. Скалярное произведение $\operatorname{grad} f\cdot\mathbf{A}$ есть произведение $|\mathbf{A}|$ на проекцию $\operatorname{grad} f$ на направление $\mathbf{A}$, т. е. на производную от $f$ по направлению вектора $\mathbf{A}$. Итак, в данном случае будем иметь:

$$\operatorname{div}\left\{\frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\operatorname{grad}\lg r\right\} = \frac{2}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\Delta\lg r + \frac{2}{ar}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right].$$

Применяя (72) и дифференцируя $\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]$ по правилу дифференцирования сложных функций, мы и докажем справедливость формулы (73). Применяя затем формулу Остроградского и принимая во внимание, что $\operatorname{grad}_n(\lg r) = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}$, получим:

$$-\iiint\limits_{(D)}\frac{\Delta U}{r}\,dv = \frac{2}{a}\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\,dS.$$

Подставляя это выражение и выражение (71) в правую часть формулы (9) и принимая во внимание, что $U(M_0, t) = V(M_0, t)$, так как в точке $M_0$ мы имеем $r = 0$, получим формулу Кирхгофа:

$$V(M_0, t) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - [V]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right\}dS. \qquad (74)$$

Формула эта выражает $V(M_0, t)$ через запаздывающие значения $V$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ на поверхности $(S)$. В данном случае, как и в формуле (9) для гармонических функций, присутствие $\frac{\partial V}{\partial n}$ не дает возможности применять формулу (74) непосредственно для решения задач, связанных с волновым уравнением. Формула (74), данная Кирхгофом, тесно связана с принципом Гюйгенса.

Положим, что $(S)$ есть сфера с центром $M_0$ и радиусом $r$. В этом случае $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$, и формула (74) переписывается в виде:

$$V(M_0, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{(S)} \left\{ r\left[\frac{\partial V}{\partial r}\right] + \frac{r}{a}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] + [V] \right\} dS,$$

или, полагая $dS = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^2 d\omega$:

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial (rV)}{\partial r}\right] d\omega + \frac{r}{4\pi a} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] d\omega. \tag{75}$$

Если взять радиус сферы равным $r = at$, то $t - \frac{r}{a} = 0$, т. е. запаздывающее значение сводится к значению функции при $t = 0$, и формула (75) дает формулу Пуассона (81) из [181], решающую задачу о распространении колебаний в безграничном пространстве при заданных начальных условиях:

$$V(M_0, t) = \frac{t}{4\pi} \iint_{(S_{at})} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 d\omega + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \left\{ t \iint_{(S_{at})} (V)_0 \, d\omega \right\}, \tag{76}$$

причем значок нуль указывает, что надо брать $\frac{\partial V}{\partial t}$ и $V$ при $t = 0$, и интегрирование производится по сфере с центром $M_0$ и радиусом $at$. Вид формулы Кирхгофа (74) тесно связан с понятием *запаздывающего потенциала*. Выше мы видели, что при любом выборе функции $\omega(t)$, имеющей непрерывные производные до второго порядка, функция

$$\frac{1}{r}\omega\left(t - \frac{r}{a}\right) = \frac{[\omega]}{r} \tag{77}$$

есть решение уравнения (68). При этом $r$ есть расстояние от любой фиксированной точки пространства до переменной точки [175].

Совершенно аналогично предыдущему можно построить формулу Кирхгофа и для любого решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V + f(x, y, z, t) \tag{78}$$

в области $D$, и эта формула, кроме поверхностного интеграла, будет содержать и тройной:

$$V(M_0; t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left\{ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n} - [V]\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right\} dS + $$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{D} \frac{[f]}{r} \, dv. \tag{79}$$

Применяя эту формулу к сфере с центром $M_0$ и радиусом $at$ для решения, удовлетворяющего нулевым начальным данным при $t=0$, получим формулу (91) из [174].

## § 21. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**203. Основные уравнения.** Уравнение теплопроводности в однородной среде, как мы видели, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \tag{2}$$

$k$ — коэффициент внутренней теплопроводности, $\gamma$ — теплоемкость вещества и $\rho$ — плотность. Кроме уравнения (1), нужно иметь в виду *начальное условие*, дающее начальное распределение температуры и при $t=0$

$$u|_{t=0}=f(x,\ y,\ z). \tag{3}$$

Если тело ограничено поверхностью $(S)$, то на этой поверхности мы будем иметь и *предельное условие*, которое может быть различным, смотря по физическим обстоятельствам. Так, например, поверхность $(S)$ может поддерживаться при определенной температуре, которая может и меняться *с течением времени*. В этом случае предельное условие сводится к заданию функции $U$ на поверхности $(S)$, причем эта заданная функция может зависеть и от времени $t$. Если температура поверхности не фиксирована, но имеется лучеиспускание в окружающую среду данной температуры $U_0$, то по закону Ньютона, правда, далеко не точному, поток тепла через поверхность $(S)$ пропорционален разности температур окружающего пространства и поверхности тела $(S)$. Это дает предельное условие вида:

$$\frac{\partial U}{\partial n}+h(U-U_0)=0 \quad (\text{на } S), \tag{4}$$

где коэффициент пропорциональности $h$ называется *коэффициентом внешней теплопроводности*.

В случае распространения тепла в теле линейных размеров, т. е. в однородном стержне, который мы считаем расположенным вдоль оси $X$, вместо уравнения (1) мы будем иметь уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{5}$$

При такой форме уравнения не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью стержня и окружающим пространством.

Уравнение (5) можно получить также из уравнения (1), предполагая $U$ не зависящей от $y$ и $z$. Начальное условие в случае стержня

будет:

$$U|_{t=0} = f(x). \tag{6}$$

Если стержень ограничен, то на обоих концах мы имеем предельное условие. Как и выше, конец может поддерживаться при определенной температуре. В случае лучеиспускания предельное условие (4) будет иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \mp h(U - U_0) = 0 \text{ (на конце)}, \tag{7}$$

причем знак (—) имеет место для левого конца, с наименьшей абсциссой $x$, а знак (+) — для правого конца, и $h$ есть положительная постоянная.

**204. Неограниченный стержень.** Мы начнем с *неограниченного стержня*, для которого, кроме уравнения (5), нужно только удовлетворить начальному условию (6). По способу Фурье мы ищем прежде всего частное решение уравнения (5) в виде:

$$T(t)\,X(x),$$

что дает нам

$$T'(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где $\lambda^2$ — постоянная. Мы получаем таким путем:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{8}$$

откуда, отбрасывая постоянный множитель в выражении $T(t)$:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x;$$

постоянные $A$ и $B$ могут зависеть от $\lambda$.

Так как никаких предельных условий мы здесь не имеем, то параметр $\lambda$ остается совершенно произвольным, и при составлении функции $u(x, t)$ в виде суммы

$$\sum_{(\lambda)} e^{-\lambda^2 a^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]$$

все значения $\lambda$ для нас равноценны. Естественно поэтому заменить *сумму* по отдельным значениям $\lambda$ — *интегралом*, взятым по параметру $\lambda$ от $(-\infty)$ до $(+\infty)$, т. е. положить:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{9}$$

Применяя формулу дифференцирования под знаком определенного интеграла, убедимся без труда, что написанная функция дает действительно решение уравнения (5). Переходим теперь к начальному условию (6), которое дает нам

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, d\lambda. \tag{10}$$

Сравнивая интеграл в правой части с формулой Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi + \sin\lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi\right] d\lambda,$$

мы видим, что можно удовлетворить условию (10), положив

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi.$$

Подставляя полученные выражения для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (9), получаем:

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}[\cos\lambda\xi\cos\lambda x + \sin\lambda\xi\sin\lambda x]\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\, d\lambda, \tag{11}$$

причем мы использовали тот факт, что подинтегральная функция есть четная функция от $\lambda$.

Формула (11) дает решение нашей задачи, но может быть упрощена. Для этого достаточно заметить, что [81]:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

а потому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},$$

после чего формула (11) принимает вид:

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{12}$$

Во всех предыдущих вычислениях и дальше мы считаем, конечно, $t$ положительным. Представленное в такой форме решение получает важный физический смысл. Заметим прежде всего, что функция

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \tag{13}$$

рассматриваемая как функция от $(x,\ t)$, есть также решение уравнения (5), как это ясно и из самого способа ее получения, и может быть проверено непосредственным дифференцированием. Каков же физический смысл этого решения?

Выделим малый элемент стержня $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ около точки $x_0$, и пусть функция $f(x)$ равна нулю вне промежутка $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ и имеет постоянное значение $U_0$ внутри его. Физически можно представить себе дело так, что мы в начальный момент сообщили этому элементу количество тепла $Q=2\delta c\rho U_0$, которое вызвало повышение температуры на $U_0$ в этом участке. В последующие моменты распределение температуры в стержне дается формулой (12), которая в нашем случае принимает вид:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}U_0\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Если мы будем теперь приближать $\delta$ к 0, т. е. будем считать, что то же количество тепла $Q$ распределяется на всё меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке $x_0$, то будем иметь дело с *мгновенным источником тепла в точке* $x=x_0$ *напряжения* $Q$. От наличия такого источника тепла в стержне получится распределение температур по формуле:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{Q}{2c\rho a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Так как по теореме о среднем:

$$\frac{1}{2\delta}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=e^{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4a^2t}},\quad\text{где } x_0-\delta<\xi_0<x_0+\delta,$$

то $\xi_0 \to x_0$ при $\delta \to 0$, и предыдущее выражение обратится в:

$$\frac{Q}{c\rho} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Стало быть, *функция* (13) *дает распределение температуры, которое вызывается мгновенным источником тепла напряжения* $Q = c\rho$, *помещенным в начальный момент* $t = 0$ *в точке* $x = \xi$ *стержня* (замена $x_0$ на $\xi$). Решение (12) становится теперь очевидным. Для того чтобы придать сечению $\xi$ стержня температуру $f(\xi)$ в начальный момент, мы должны распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла:

$$dQ = c\rho f(\xi)\, d\xi,$$

или, что то же самое, поместить в точке $\xi$ мгновенный источник тепла напряжения $dQ$; распределение температуры, вызываемое этим источником, согласно формуле (13), будет:

$$f(\xi)\, d\xi \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Общее же действие от начальной температуры $f(\xi)$ во всех точках стержня суммируется из этих отдельных элементов, что и даст нам полученное выше решение (12):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Положим, что температура $f(x)$ в начальный момент $t = 0$ равна нулю везде, кроме некоторого промежутка $(\alpha_1, \alpha_2)$, в котором она положительна. Решение (12) в данном случае будет:

$$u(x, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \qquad (14)$$

Если взять $t$ сколь угодно близким к нулю и $x$ сколь угодно большим, т. е. если взять сколь угодно далекую точку стержня в момент, сколь угодно близкий к начальному, то формула (14) даст для $u(x, t)$ положительное значение, так как подинтегральная функция положительна. Таким образом из формулы (12) вытекает то обстоятельство, что тепло распространяется не с какой-либо конечной скоростью, но мгновенно. Это существенно отличает уравнение теплопроводности от волнового уравнения, которое мы получили при рассмотрении колебаний струны.

В случае распространения тепла в неограниченной трехмерной среде мы имеем дифференциальное уравнение (1) и начальное

условие (3), и вместо формулы (12) решение будет:

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}}d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (15)$$

Проверим тот факт, что функция, определяемая формулой (12), удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию (6). Первое утверждение непосредственно вытекает из того, что функция (12) удовлетворяет уравнению (5), и из возможности дифференцировать интеграл формулы (12) по $t$ и $x$ под знаком интеграла, если, например, $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема по промежутку $(-\infty, +\infty)$. Для проверки начального условия (6) введем вместо $\xi$ новую переменную $\alpha$ по формуле:

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}.$$

Формула (12) после этого переписывается в виде:

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+\alpha 2a\sqrt{t})\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \quad (16)$$

Напомним еще формулу [78]

$$1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \quad (17)$$

Умножим ее почленно на $f(x)$ и вычтем из (16):

$$u(x, t)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)]\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

откуда

$$|u(x, t)-f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \quad (18)$$

Кроме непрерывности и абсолютной интегрируемости, будем еще считать $f(x)$ ограниченной, т. е. $|f(x)|\leqslant c$, и таким образом при любых $x$, $t$ и $\alpha$ мы имеем: $|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\leqslant 2c$. Пусть $\varepsilon$ — заданное положительное число. Можно фиксировать столь большое положительное $N$, что

$$\frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-N} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{N}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

При этом из (18) будет следовать:

$$|u(x,\ t)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{+N}|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)|\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

В силу непрерывности $f(x)$, можем утверждать, что при всех $t$, достаточно близких к нулю, и при $|\alpha| \leqslant N$ мы имеем:

$$|f(x+\alpha 2a\sqrt{t})-f(x)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon,$$

и последнее неравенство дает:

$$|u(x,\ t)-f(x) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-N}^{+N}e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

и тем более

$$|u(x,\ t)-f(x)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

т. е., в силу (17), мы имеем: $|u(x,\ t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $t$, достаточно близких к нулю, откуда, ввиду произвольности $\varepsilon$, и следует:

$$\lim_{t\to+0} u(x,\ t)=f(x),$$

что и представляет собой начальное условие (6). Отметим, что $t$ стремится к нулю от положительных значений. Если $m$ и $M$ — границы значений $f(x)$, т. е. $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то из (16) следует:

$$\frac{m}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha \leqslant u(x,\ t) \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

и, в силу (17), имеем $m \leqslant u(x,\ t) \leqslant M$, т. е. температура $u(x,\ t)$ при всех положительных $t$ лежит в тех же границах, что и начальная температура. Совершенно так же, как и выше, может быть проверена и формула (15).

**205. Стержень, ограниченный с одного конца.** Пусть это будет конец $x=0$ стержня $x \geqslant 0$; мы допустим, что на этом конце имеется лучеиспускание в окружающую среду с температурой 0°.

В этом случае мы имеем, кроме начального условия (6), предельное условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.hu\right|_{x=0}, \tag{19}$$

и, с другой стороны, решение (12) непосредственно не годится, так как в силу начального условия подинтегральная функция $f(x)$ определена только

в промежутке $(0, \infty)$. Стало быть, для применения формулы (12) надлежит продолжить функцию $f(x)$ в промежуток $(-\infty, 0)$.

Для этой цели перепишем формулу (12) в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + f(-\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi, \tag{20}$$

что можно легко показать, разбив $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ на два: $\int\limits_{-\infty}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{+\infty}$ и заменив в первом $\xi$ на $(-\xi)$. Для подстановки в формулу (19) вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[ f(\xi) \frac{\xi - x}{2a^2t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - f(-\xi) \frac{\xi + x}{2a^2t} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi.$$

При $x = 0$ отсюда выводим:

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f(\xi) + f(-\xi)]\, d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f(\xi) - f(-\xi)] \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t}.$$

Интегрируя по частям, мы имеем [1]):

$$\int_0^\infty f(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t} = -\int_0^\infty f(\xi)\, d\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right) = -e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} f(\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} +$$

$$+ \int_0^\infty f'(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi = f(+0) + \int_0^\infty f'(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi,$$

точно так же:

$$\int_0^\infty f(-\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \frac{\xi\, d\xi}{2a^2t} = f(-0) - \int_0^\infty f'(-\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\, d\xi.$$

Мы предположим, что $f(x)$ продолжена непрерывно в промежуток $(-\infty, 0)$. Тогда очевидно

$$f(+0) = f(-0) = f(0),$$

и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f'(\xi) + f'(-\xi)]\, d\xi;$$

---

[1]) Предполагается, что $e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} f(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.

условие (19) превращается в

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\{[f'(\xi)+f'(-\xi)]-h[f(\xi)+f(-\xi)]\}\,d\xi=0,$$

которое наверно удовлетворяется, если положить

$$f'(-\xi)+f'(\xi)=h[f(-\xi)+f(\xi)],$$

или, обозначив пока

$$\Phi(\xi)=f(-\xi);\quad \Phi'(\xi)=-f'(-\xi),$$

определить неизвестную функцию $\Phi(\xi)$ из дифференциального уравнения

$$\Phi'(\xi)+h\,\Phi(\xi)=f'(\xi)-hf(\xi)\qquad(\xi\geqslant 0).$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\Phi(\xi)=e^{-h\xi}\left\{C+\int_0^\xi e^{h\xi}[f'(\xi)-hf(\xi)]\,d\xi\right\}.$$

Полагая $\xi=0$, определяем постоянную $C$:

$$C=\Phi(0)=f(0),$$

и так как

$$\int_0^\xi e^{h\xi}f'(\xi)\,d\xi=f(\xi)\,e^{h\xi}\Big|_{\xi=0}^{\xi=\xi}-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi=e^{h\xi}f(\xi)-f(0)-h\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi,$$

то

$$f(-\xi)=\Phi(\xi)=f(\xi)-2he^{-h\xi}\int_0^\xi e^{h\xi}f(\xi)\,d\xi.$$

Подставляя это выражение для $f(-\xi)$ в формулу (20), мы и получаем окончательное решение нашей задачи. Заметим, что из последней формулы при $\xi\to+0$ вытекает $f(-0)=f(+0)$, т. е. непрерывное продолжение $f(x)$ в промежуток $(-\infty,0)$, что мы предполагали выше.

Если, например, начальная температура постоянна:

$$f(x)=u_0\quad\text{при}\quad x\geqslant 0,$$

то мы имеем:

$$f(-x)=u_0-2he^{-hx}\int_0^x u_0e^{hx}\,dx=u_0(2e^{-hx}-1),$$

и формула (20) дает:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi-\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\,d\xi+\right.$$

$$\left.+2\int_0^\infty e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}-h\xi}\,d\xi\right\}. \qquad (21)$$

Читатель без труда покажет, что это решение может быть выражено через функцию

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

следующим образом:

$$u(x, t) = u_0 \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + u_0 e^{a^2h^2t+hx}\left[1 - \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)\right]. \qquad (22)$$

Более простой результат получается, если на конце $x = 0$ отсутствует лучеиспускание, и этот конец поддерживается при температуре 0°. Мы имеем тогда предельное условие

$$u|_{x=0} = 0, \qquad (23)$$

которое можно получить и из (19), разделив на $h$ и затем переходя к пределу при $h \to \infty$. Решение можно найти из формулы (22) при $h \to \infty$, но проще поступать, непосредственно продолжая функцию $f(x)$ в промежуток $(-\infty, 0)$ так, чтобы выполнялось условие

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} [f(\xi) + f(-\xi)]\, d\xi = 0,$$

для чего достаточно положить

$$f(-\xi) = -f(\xi),$$

т. е. надо продолжить $f(x)$ нечетным образом.

Формула (20) примет тогда вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right] d\xi, \qquad (24)$$

и если

$$u|_{t=0} = f(x) = u_0,$$

она обратится в

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = u_0 \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \qquad (25)$$

*Рассмотрим теперь стержень, ограниченный с одного конца $x = 0$, который поддерживается при заданной температуре $u = \varphi(t)$.*

Допустим сперва, что начальная температура есть 0°, т. е.

$$u|_{t=0} = 0, \qquad (26)$$

и начнем с частного случая $\varphi(t) = 1$, т. е.

$$u|_{x=0} = 1. \qquad (27)$$

Нетрудно получить решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (26) и (27). Для этого мы положим

$$u = v + 1;$$

функция $v$ будет также решением уравнения (5), но должна удовлетворять условиям

$$v|_{x=0} = 0; \quad v_{t=0} = -1,$$

так что получится сразу по формуле (25), если положить там $u_0 = -1$,

$$v(x, t) = -\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad \text{и} \quad u(x, t) = 1 - \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{28}$$

Определим теперь распределение температур, если на конце $x = 0$ температура поддерживалась равной 0° до момента $\tau$, а затем поддерживалась равной 1°. Это распределение мы обозначим через $u_\tau(x, t)$. Очевидно, что до момента $t = \tau$ мы будем иметь $u_\tau = 0$; после же этого момента $u_\tau$ совпадает с решением, полученным выше, если начать отсчитывать $t$ не от 0, а от $\tau$, т. е. заменить в выражении (28) $t$ на $t - \tau$, что даст нам

$$u_\tau(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \tau \\ 1 - \Theta\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) & \text{при } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Но тогда очевидно, что если на конце $x = 0$ температура 1° поддерживалась только в течение промежутка $(\tau, \tau + d\tau)$, а все остальное время она была 0°, то соответствующее распределение температур будет:

$$u_\tau(x, t) - u_{\tau+d\tau}(x, t) = -\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} d\tau;$$

если же она поддерживалась в течение промежутка $(\tau, \tau + d\tau)$ на температуре $\varphi(\tau)$, а не 1°, то получим решение:

$$-\varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} d\tau,$$

откуда ясно, что если поддерживать конец $x = 0$ на температуре $\varphi(\tau)$ при всех $\tau > 0$, то при изменении $\tau$ от 0 до $t$ мы получим полный эффект, сложив все элементарные эффекты, что дает нам искомое решение задачи в виде:

$$u(x, t) = -\int_0^t \varphi(\tau)\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} d\tau,$$

или, так как при $t \geqslant \tau$:

$$-\frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-x^2}\,dx = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

то окончательно

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau. \tag{29}$$

Для того чтобы получить решение, которое сверх предельного условия

$$u|_{x=0}=\varphi(t)$$

удовлетворяет не (26), а начальному условию общего вида

$$u|_{t=0}=f(x),$$

очевидно, достаточно прибавить к решению (29) полученное выше решение (24).

**206. Стержень, ограниченный с обоих концов.** Мы исследуем один из наиболее типичных случаев, когда на конце $x=0$ поддерживается температура 0°:

$$u|_{x=0}=0; \tag{30}$$

на конце $x=l$ тепло излучается в окружающую среду с температурой нуль:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=-\left.hu\right|_{x=l}; \tag{31}$$

начальная температура есть

$$u|_{t=0}=f(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{32}$$

Задача эта решается весьма просто по способу Фурье.

Так как здесь имеются предельные условия, то мы подчиним найденное выше решение

$$e^{-\lambda^2a^2t}X(x)=e^{-\lambda^2a^2t}[A\cos\lambda x+B\sin\lambda x] \tag{33}$$

условиям (30) и (31), что дает нам:

$$X(0)=0, \text{ т. е. } A=0; \ X'(l)=-hX(l),$$

откуда имеем, отбрасывая постоянный множитель $B$,

$$X(x)=\sin\lambda x \tag{34}$$

и

$$\lambda\cos\lambda l=-h\sin\lambda l. \tag{35}$$

Полагая $\lambda l=v$, получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} v=\alpha v, \quad \text{где } \alpha=-\frac{1}{hl}. \tag{36}$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней (черт. 143), из которых мы обратим внимание только на положительные:

$$v_1,\ v_2,\ v_3\ \dots,\ v_n,\ \dots \tag{37}$$

Этим корням соответствует бесчисленное множество значений $\lambda$:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \dots,\ \lambda_n,\dots, \quad \text{где } \lambda_n=\frac{v_n}{l}, \tag{38}$$

а им, в свою очередь, — бесчисленное множество частных решений уравнения (5)

$$B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

удовлетворяющих предельным условиям.

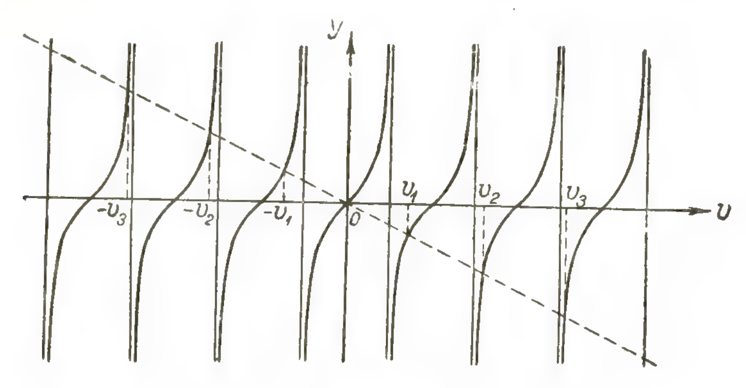
Для того чтобы удовлетворить начальным условиям, ищем $u$ в виде:

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x, \tag{39}$$

и при $t = 0$ получаем:

$$u\,|_{t=0} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x), \tag{40}$$

где мы обозначили: $X_n(x) = \sin \lambda_n x$. Докажем, что функции $X_n(x)$ ортогональны.




Черт. 143.

Напишем для двух из них соответствующие дифференциальные уравнения (8):

$$X_m''(x) + \lambda_m^2 X_m(x) = 0; \qquad X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0.$$

Умножая первое почленно на $X_n(x)$, второе на $X_m(x)$, вычитаем почленно полученные уравнения и интегрируем по промежутку $(0,\ l)$:

$$\int_0^l [X_m''(x) X_n(x) - X_n''(x) X_m(x)]\,dx + \\ + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^l X_m(x) X_n(x)\,dx = 0.$$

Интегрируя в первом интеграле по частям, получим:

$$X'_m(l)X_n(l)-X'_n(l)X_m(l)+X'_n(0)X_m(0)-X'_m(0)X_n(0)+ \\ +(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=0. \quad (41)$$

Но $X_m(x)$ и $X_n(x)$ удовлетворяют предельным условиям (30) и (31), т. е.

$$X_m(0)=X_n(0)=0; \quad X'_m(l)=-hX_m(l); \\ X'_n(l)=-hX_n(l).$$

В силу этих равенств внеинтегральный член формулы (41) обращается в нуль, и, принимая во внимание, что $\lambda_m^2-\lambda_n^2\neq 0$ при различных $m$ и $n$, мы получаем:

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=0 \quad \text{при } m\neq n.$$

Установив ортогональность, мы обычным приемом убеждаемся в том, что в разложении (40) коэффициенты $B_n$ должны определяться формулой:

$$B_n=\int_0^l f(x)X_n(x)\,dx : \int_0^l X_n^2(x)\,dx.$$

Это решает задачу разложения функции $f(x)$ по функциям $X_n(x)$ и вместе с тем дает решение поставленной выше задачи в виде ряда (39). В томе IV мы покажем, что система функций $X_n(x)$, которые получаются, как выше, в результате применения метода Фурье к типичным задачам математической физики, есть замкнутая система, и что при некоторых предположениях относительно $f(x)$ эта функция разлагается в основном промежутке в равномерно сходящийся ряд по функциям $X_n(x)$. Отметим, что если бы вместо предельных условий (30) и (31) мы взяли предельные условия $u=0$ при $x=0$ и при $x=l$, то получили бы $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$, и пришли к обычному ряду Фурье по синусам.

При исследовании распространенности тепла в кольце мы, вместо предельных условий, должны поставить условие периодичности температуры [ср. **195**]. Считая радиус кольца равным единице, так что длина всего кольца есть $2\pi$, и обозначая через $x$ длину кольца, отсчитываемую от некоторой точки, мы приходим к решению вида:

$$u(x,\ t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,e^{-a^2nt},$$

где

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{a}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ряд Фурье начального распределения температуры $f(x)$ в кольце.

Достаточные условия для того, чтобы полученный здесь для $u(x, t)$ ряд действительно решал рассматриваемую задачу, будут даны в четвертом томе.

**207. Дополнительные замечания.** Возьмем обобщенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - cv, \tag{42}$$

которое получается, если учесть лучеиспускание со всей поверхности стержня в окружающее пространство, температура которого принимается равной нулю.

Легко проверить, что уравнение (42) простой подстановкой

$$v = e^{-ct}u$$

приводится к уравнению (5) для $u$.

Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \tag{43}$$

в случае неограниченного стержня при нулевой начальной температуре, т. е. при условии $u = 0$ для $t = 0$, имеет решение вида

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \, d\tau. \tag{44}$$

Оно может быть получено или тем же методом, который мы применяем в [174] к неоднородному волновому уравнению, или суперпозицией основного сингулярного решения (13), в котором мы заменяем $t$ на $(t-\tau)$ и после умножения на $F(\xi, \tau)$ интегрируем по $\xi$ от $-\infty$ до $+\infty$ и по $\tau$ от $\tau = 0$ до $\tau = t$. Физический смысл этих операций очевиден. Решение уравнения (43) получается путем суперпозиции источников, которые размещены по всему стержню с интенсивностью $F(\xi, \tau)$, причем такой источник начинает действовать с момента времени $\tau$. Производится суперпозиция таких источников и по времени.

Применение метода Фурье в двумерном и трехмерном случае проводится совершенно так же, как и для волнового уравнения, но только множитель, зависящий от времени, в рассматриваемом случае есть показательная функция.

Так, например, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

в случае прямоугольной пластинки мы имеем решение в виде

$$u = e^{-\omega^2 t} U(x, y), \tag{45}$$

причем мы поставили в показателе $\omega^2$ с тем, чтобы пользоваться формулами из [177]. Пусть имеется предельное условие $u = 0$ на $C$ и начальное условие $u = \varphi_1(x, y)$ при $t = 0$. Решение представляется рядом:

$$u = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} a_{\sigma,\tau} e^{-\omega^2_{\sigma,\tau} t} \sin \frac{\sigma\pi x}{e} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

где $\omega^2_{\sigma,\tau}$ определяется формулой (119) из [177] и $a_{\sigma,\tau}$ — первой из формул (114)

В случае круглой пластинки [ср. 178] та же подстановка (45) приводит к следующему решению:

$$u = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty} \alpha_{m,n} e^{-\omega^2_{m,n} t} \cos n\theta J_n(k_m^{(n)} r) + \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\infty} \beta_{m,n} e^{-\omega^2_{m,n} t} \sin n\theta J_n(k_m^{(n)} r),$$

причем $\alpha_{m,n}$ и $\beta_{m,n}$ определяются по тем же формулам, что и $\alpha^{(1)}_{m,n}$ и $\beta^{(1)}_{m,n}$ из [178], $\omega_{m,n}$ — по формуле (128).

**208. Случай сферы.** Рассмотрим параллельно волновое уравнение и уравнение теплопроводности в случае сферы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u; \tag{46}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v, \tag{47}$$

считая, что начальные данные зависят только от расстояния $r$ точки до центра сферы:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_2(r); \tag{48}$$

$$v\big|_{t=0} = \psi(r). \tag{49}$$

Предельные условия мы возьмем вида:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R; \tag{50}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0 \quad \text{при } r = R, \tag{51}$$

где $R$ — радиус сферы и $h > 0$. В силу центральной симметрии решения также не будут зависеть от полярных углов и будут, таким образом, функциями только от $r$ и $t$. Полагая

$$u = (A \cos \omega t + B \sin \omega t)\, U(r); \tag{52}$$

$$v = A e^{-\omega^2 t} V(r), \tag{53}$$

получим для $U(r)$ и $V(r)$ одно и то же уравнение $\Delta W + k^2 W = 0$, где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. Выражая оператор Лапласа в сферических координатах и принимая во внимание, что $W$ зависит только от $r$, получим уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dW}{dr}\right) + k^2 W = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dW}{dr} + k^2 W = 0.$$

Вместо $W$ введем новую искомую функцию

$$R(r) = rW(r).$$

Подставляя $W(r) = \frac{R(r)}{r}$ в уравнение для $W$, получим для $R(r)$ уравнение: $R''(r) + k^2R(r) = 0$, откуда $R(r) = C_1 \cos kr + C_2 \sin kr$, и, следовательно,

$$W(r) = C_1 \frac{\cos kr}{r} + C_2 \frac{\sin kr}{r}.$$

Принимая во внимание, что решение должно оставаться конечным в центре сферы, т. е. при $r = 0$, мы должны считать $C_1 = 0$, и, подставляя в (52), получаем решения вида:

$$u = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \frac{\sin kr}{r}; \tag{54}$$

$$v = Ae^{-\omega^2 t} \frac{\sin kr}{r}. \tag{55}$$

Постоянная $k$ и, тем самым, $\omega = ak$ определяются из предельных условий (50) и (51).

Второе из них в применении к $\frac{\sin kr}{r}$ дает следующее уравнение для $k$:

$$kR \operatorname{ctg} kR = 1 - hR. \tag{56}$$

При $h = 0$ приходим к уравнению, получаемому из предельного условия (50):

$$\operatorname{tg} kR = kR. \tag{57}$$

Полагая $kR = v$, мы видим, что уравнения (56) и (57) совершенно аналогичны уравнению (36). Пусть: $k_1, k_2, \ldots$ — положительные корни уравнения (56). Принимая во внимание (55), получаем для $v(r, t)$:

$$v(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 k_n^2 t} \frac{\sin k_n r}{r}. \tag{58}$$

Начальное условие (49) дает:

$$r\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n r. \tag{59}$$

Совершенно так же, как и в [206], функции $\sin k_n r$ ортогональны на промежутке $(0, R)$ и, следовательно, коэффициенты разложения (59) определяются формулами:

$$a_n = \int_0^R r\psi(r) \sin k_n r \, dr : \int_0^R \sin^2 k_n r \, dr.$$

Переходя к уравнению для $u$, мы попрежнему обозначим через $k_n$ $(n = 1, 2)$ положительные корни уравнения (57). Здесь мы должны еще учесть и корень $k = 0$, который соответствует частоте $\omega$, равной нулю. При этом вместо $(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ мы должны написать $A + Bt$, уравнение для $R(r)$ будет $R''(r) = 0$, и $W(r) = R(r) : r$ есть постоянная, так что соответствующее решение уравнения (46) будет $a_0 + b_0 t$. Оно удовлетворяет, очевидно, при любых значениях постоянных $a_0$ и $b_0$, предельному условию (50).

Окончательно для $u$ получим:

$$u(r, t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ak_n t + b_n \sin k_n t) \frac{\sin k_n r}{r}.$$

Дифференцируя по $t$ и полагая $t = 0$, получим разложение функций, входящих в начальные условия (48):

$$r\varphi_1(r) = a_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n r; \quad r\varphi_2(r) = b_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} k_n b_n \sin k_n r.$$

Принимая во внимание уравнение (57), нетрудно проверить, что $\sin k_n r$ ортогональны не только между собой, но и с функцией $r$ на промежутке $(0, R)$, т. е.

$$\int_0^R r \sin k_n r\, dr = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^R \sin k_m r \sin k_n r\, dr = 0, \quad \text{при } m \neq n,$$

и коэффициенты в последних разложениях определяются по обычному правилу:

$$a_0 = \int_0^R r^2 \varphi_1(r)\, dr : \int_0^R r^2\, dr = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 \varphi_1(r)\, dr,$$

$$a_n = \int_0^R r\varphi_1(r) \sin k_n r\, dr : \int_0^R \sin^2 k_n r\, dr.$$

Аналогичные формулы получаются и для коэффициентов $b_n$. Отметим, что для уравнения (47) при $\omega = 0$, мы получаем решение $v = \text{const}$, но это решение не удовлетворяет предельному условию (51), ибо по условию $h > 0$.

Уравнение (46) мы можем толковать как уравнение для потенциала скорости $u$ при колебании газа. При этом предельное условие (50) выражает тот факт, что скорость газовых частиц, находящихся на поверхности сферы, имеет составляющую, направленную по нормали к сфере, равную нулю.

Предельное условие (51) для уравнения теплопроводности (47) выражает тот факт, что поверхность сферы лучеиспускает в окружающее пространство, температура которого принимается равной нулю.

**209. Теорема единственности.** Перейдем теперь к вопросу об единственности решения уравнения теплопроводности при заданных начальном и предельных условиях [ср. **179**]. Возьмем одномерную задачу, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{60}$$

для ограниченного стержня $0 \leqslant x \leqslant l$. Построим на плоскости $xt$ область $G$, ограниченную прямыми $x = 0$, $x = l$ и находящуюся сверху отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ оси $x$ (черт. 144). Проведем еще какой-

либо прямолинейный отрезок $t = t_0$, $t_0 > 0$, параллельный оси $x$. Он отсечет от области $G$ конечный прямоугольник $OAQP$, который мы обозначим одной буквой $H$. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению* (60) *внутри $G$ и непрерывна вплоть до контура $G$. При этом наибольшее и наименьшее значение $u(x, t)$ в $H$ достигается на части $l$ контура $H$, образуемой сторонами $OP$, $OA$ и $AQ$.*

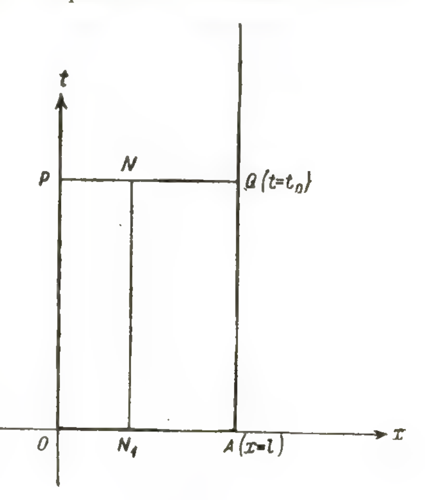
При доказательстве ограничимся рассмотрением случая наибольшего значения и будем доказывать от обратного. Положим, что наибольшее значение $u(x, t)$ достигается не на $l$, а внутри $H$ или внутри стороны $PQ$, и приведем это к противоречию. Пусть это наибольшее значение достигается в точке $(x', y')$ и равно $M$. Тем самым наибольшее значение функции $u(x, t)$ на $l$ меньше, чем $M$. Построим новую функцию $v(x, t)$ следующим образом:

$$v(x, t) = u(x, t) - k(t - t_0), \quad (61)$$

где $k$ — положительное число, которое мы сейчас фиксируем. Мы имеем в прямоугольнике $H$:

$$u(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant u(x, t) + kt_0,$$

и можно фиксировать число $k$ настолько близким к нулю, чтобы наибольшее значение $v(x, t)$ на $l$ было, как и для $u(x, t)$, меньше, чем значение $v(x, t)$ в точке $(x', t')$. При таком выборе $k$ функция $v(x, t)$ будет принимать наибольшее в $H$ значение не на $l$, а внутри $H$ или внутри стороны $PQ$. Рассмотрим эти случаи отдельно и приведем оба эти случая к противоречию.




Черт. 144.

Пусть $v(x, t)$ принимает наибольшее значение в некоторой точке $C(x_1, t_1)$, находящейся внутри $H$. Тем самым в этой точке $C$ будет иметь место максимум функции $v(x, t)$, и мы должны иметь в этой точке **[I, 58]**:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0,$$

или, в силу (61):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - k \geqslant 0.$$

Но внутри $G$ функция $u$ удовлетворяет уравнению (60), и написанное неравенство приводит к нелепому неравенству: $-k \geqslant 0$. Положим теперь, что $v(x, t)$ достигает наибольшего в $H$ значения в точке $N(x_1, t_0)$, находящейся внутри стороны $PQ$. Рассматривая изменение $v(x, t)$ вдоль отрезка $N_1N$, параллельного оси $t$, мы приходим к неравенству $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ в точке $N$, поскольку значения функции $v(x, t)$ в точке $N$ не меньше ее значений на всем отрезке $N_1N$. Рассматривая теперь изменение $v(x, t)$ вдоль $PQ$, приходим к неравенству $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0$ в точке $N$, ибо $v(x, t_0)$ имеет в точке $N$ $(x = x_1)$ максимум. Таким образом $\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \geqslant 0$ в точке $N$, и мы приходим к противоречию совершенно так же, как и выше, и теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что если $u(x, t)$ обращается в нуль на всем контуре $l$, то $u(x, t)$ равно нулю и во всем прямоугольнике $H$, а это очень просто приводит к теореме единственности.

Положим, что кроме уравнения (1) имеются начальные условия и предельные условия (задание температуры на концах):

$$u|_{t=0} = f(x) \ (0 \leqslant x \leqslant l); \quad u|_{x=0} = \omega(t); \quad u|_{x=l} = \omega_1(t). \tag{62}$$

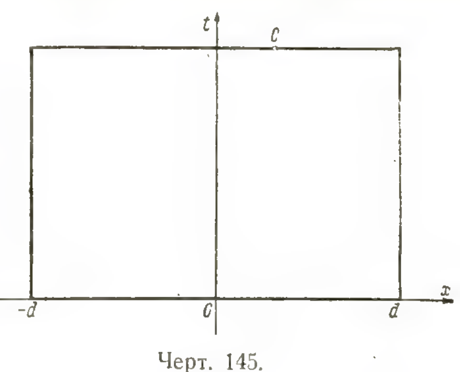
Эти условия сводятся к заданию функции $u(x, t)$ на части $l$ контура $G$. Мы считаем, что эти граничные значения представляют собой непрерывную функцию на всем контуре $G$, включая и точки $O$ и $A$, т. е. $\omega(0) = f(0)$ и $\omega_1(0) = f(l)$. Пусть при условиях (62) существуют внутри $G$ два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ уравнения (60), непрерывных вплоть до контура $G$. При этом их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ есть решение уравнения (60), равное нулю на $l$. Из доказанной выше теоремы непосредственно следует, что $u$ равно нулю везде внутри $G$, т. е. $u_1(x, t)$ совпадает с $u_2(x, t)$. Отметим, что теорема единственности сохраняется, если не требовать непрерывности $u(x, t)$ в точках $O$ и $A$, но потребовать ограниченности этой функции в окрестности указанных точек. При этом и граничные значения не должны быть непрерывными в этих точках.

Для безграничного стержня решение дается формулой (12). Предположим, что заданная функция $f(x)$ непрерывна и обращается в нуль вне некоторого отрезка $(-b, +b)$, так что

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-b}^{+b} f(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно показать, что $u(x, t) \to 0$ равномерно относительно $t$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, т. е.

при любом заданном положительном $\varepsilon$ существует такое положительное число $N$, что $|u(x, t)| \leqslant \varepsilon$ при $|x| \geqslant N$ и любом положительном $t$. Докажем, что существует только одно решение с таким свойством при заданном начальном условии (6). Как и выше, достаточно показать, что $u(x, t)$ принимает наибольшее и наименьшее значение на оси $x$. Доказываем от обратного. Пусть $u(x, t)$ принимает наибольшее значение $M$ в некоторой точке $C(x_1, t_1)$, причем $t_1 > 0$, т. е. $f(x) < M$ в промежутке $-\infty < x < +\infty$. Принимая во внимание, что $f(x) = 0$ вне промежутка $(-b, b)$, можем утверждать, что $M > 0$. Проведем две прямые $x = d$ и $x = -d$, выбрав $d$ настолько большим, чтобы на указанных прямых имело место неравенство $|u(x, t)| < M$, и построим прямоугольник $H$, образованный указанными прямыми, осью $x$ и прямой, параллельной этой оси и проходящей через точку $C$ (черт. 145). Значение функции $u(x, t)$ в точке $C$ больше, чем ее значение на части $l$ контура $H$, образованной тремя сторонами: $x = d$, $x = -d$ и $t = 0$. Таким образом функция $u(x, t)$ достигает в прямоугольнике $H$ наибольшего значения или внутри $H$, или внутри стороны, проходящей через точку $C$, а это, как и выше, приводит к противоречию. Таким образом единственность решения задачи с указанным выше свойством при сделанных относительно $f(x)$ предположениях доказана.




Черт. 145.

# АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

с 1-1-61 г. цена 1 р. 43 к.